

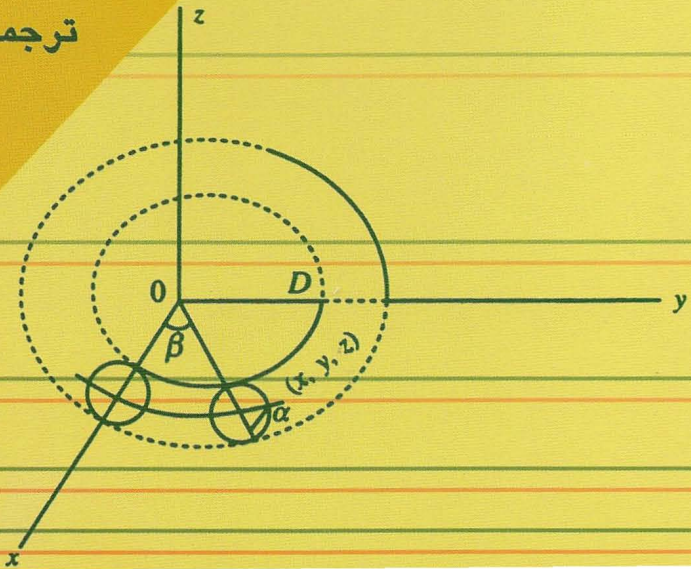


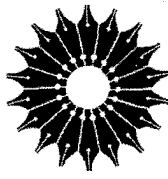
نخستین درس در

توپولوژی جبری

بنوی کومار لاهیری

ترجمہ شہرام رضاپور





نخستین درس در توپولوژی جبری

بنوی کومار لاهیری

ترجمہ شہرام رضاپور

۱. فضای اینترنت	۷۸
۲. انواع هویت‌های دیجیتال و روش‌های احراز هویت	۷۸
۳. هویت‌های دیجیتال	۷۵
۴. ویژگی‌های هویت‌های دیجیتال	۶۱
۱. امنیت و حریم خصوصی	۶۱
۲. هویت‌های دیجیتال	۶۱
۱. روش‌ها	۱۷
۲. روش‌ها و تأثیرات	۱۵
۱. مفاهیم اساسی	۵
ساختار و فرآیندها	۳
پیشینه	۱
مبانی	صفحه

فهرست

مجموعه کتابخانه دیجیتال

۵. کسپتوئیل بولای بهای کوه	۶۸
۴. کسپتوئیل بولای بولای کوه	۷۸
۳. کسپتوئیل بولای	۶۸
۲. کسپتوئیل بولای بولای	۶۸
۱. کسپتوئیل بولای	۷۸
۷. کسپتوئیل بولای بولای	۷۸
۵. کسپتوئیل بولای بولای	۷۶
۴. کسپتوئیل بولای	۷۶
۳. کسپتوئیل بولای بولای	۵۶
۲. کسپتوئیل بولای	۶۶
۱. کسپتوئیل بولای	۶۶
۸. کسپتوئیل بولای بولای	۶۶
۵. کسپتوئیل بولای بولای	۷۵
۴. کسپتوئیل بولای بولای	۷۵
۳. کسپتوئیل بولای بولای	۵۵
۲. کسپتوئیل بولای بولای	۶۶
۱. کسپتوئیل بولای بولای	۶۶
۵. کسپتوئیل بولای بولای	۶۶
۳. کسپتوئیل بولای بولای	۶۶
۲. کسپتوئیل بولای بولای	۷۶
۱. کسپتوئیل بولای بولای	۶۶
۵. کسپتوئیل بولای بولای	۶۶
۳. کسپتوئیل بولای بولای	۶۶
۲. کسپتوئیل بولای بولای	۷۶
۱. کسپتوئیل بولای بولای	۶۶
۵. کسپتوئیل بولای بولای	۶۶
۳. کسپتوئیل بولای بولای	۶۶
۲. کسپتوئیل بولای بولای	۷۶
۱. کسپتوئیل بولای بولای	۶۶

۸۲	۹. تاریندی
۸۲	۱. تعاریف
۸۳	۲. ترفیع مسیری منحصر به فرد
۸۵	۳. تاریندیها و مسیرهای هم‌ارز
۸۶	۴. نگاشت پوششی و تاریندیها
۹۰	۱۰. سادک هندسی و مجتمع
۹۰	۱. مجموعه هندسی مستقل
۹۴	۲. سادک
۹۸	۳. جهت‌دهی سادک
۹۹	۴. مجتمع
۱۰۱	۵. مثلث‌بندی
۱۰۳	۶. نگاشت سادکی
۱۰۴	۷. بعد توپولوژیک
۱۰۶	۸. قضیه نقطه ثابت براوئر
۱۰۸	۹. افراز گرانیگاهی
۱۱۶	۱۱. نظریه مانستگی سادکی
۱۱۶	۱. مقدمه
۱۱۷	۲. گروه آبلی متناهی مولد
۱۱۸	۳. زنجیر
۱۱۹	۴. تلازم
۱۲۲	۵. مرز
۱۲۴	۶. چرخه
۱۲۵	۷. گروههای مانستگی
۱۲۷	۸. مجتمع همبند

۱۳۰	۱۲. مانستگی تکین
۱۳۰	۱. تعاریف
۱۳۲	۲. عملگر مرزی
۱۳۳	۳. چرخه و مرز
۱۳۴	۴. گروههای مانستگی
۱۳۶	۵. همریختی القایی
۱۴۱	۶. دنبالهٔ مایر-ویتوریس
۱۴۵	مراجع
۱۴۶	واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی
۱۴۸	واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی
۱۵۰	نمایه

پیشگفتار

برخی از مسائل توپولوژی از طریق توپولوژی جبری به مسائل جبری بدل می‌شوند. در برخی موارد پیدا کردن جواب مسائل در جبر ممکن است آسانتر از پیدا کردن جواب مسائل متناظر آنها در توپولوژی باشد. در این موارد می‌توان برای مسائل توپولوژیک راه‌حلهای مناسبی به‌دست آورد. به‌عنوان مثال، می‌توان با استفاده از یک فضای توپولوژیک مفروض، گروهی (به نام گروه بنیادی) تشکیل داد و از یک همسانریختی بین دو فضای توپولوژیک، یک یکرختی بین گروههای بنیادی متناظر آن دو فضا به‌دست آورد.

در کتاب حاضر که برای آشنایی با مبادی نوشته شده است، به مفاهیم اساسی چندی از توپولوژی جبری می‌پردازیم. مطالب این کتاب چنان نوشته شده‌اند که خوانندگان مبتدی برای درک بی‌ابهام مفاهیم مختلف مطرح‌شده در آن هیچ‌گونه مشکلی نداشته باشند. معتقدیم که برای مطالعه عمیقتر توپولوژی جبری در یک سطح پیشرفته و کسب تصویری روشن به‌منظور کاربرد نظریه، فهم دقیق آن در سطح مقدماتی ضروری است.

در نگارش این کتاب، تلاش کافی برای عرضه روشن مفاهیم صورت گرفته است و تقریباً برای تمام مفاهیم جدید، مثالهای مناسبی ارائه شده است. تمامی مطالب کتاب به‌گونه‌ای عرضه شده است که دانشجویان سالهای آخر کارشناسی و دانشجویان کارشناسی ارشد بتوانند از آن بهره‌ای لازم را ببرند. آگاهی مختصری از نظریه مجموعه‌ها، آنالیز حقیقی، توپولوژی و جبر را دانسته فرض کرده‌ام، مع‌هذا مطالب مورد نیاز برای مطالعه این کتاب در فصل اول توضیح داده شده‌اند، ولی اثبات قضایا آورده نشده است. به جای نمودارهای تعویض‌پذیری که معمولاً در چند مورد به‌کار برده می‌شوند، ترجیح داده‌ام که این موارد به‌صورت نظری تشریح شوند.

از مؤلفان و ناشران کتابهای مختلفی که در فهرست مراجع از آنها نام برده شده و برداشتی

آزاد از آثار آنها داشته‌ام، تشکر می‌کنم. به خوانندگان توصیه می‌کنم برای مطالعه بیشتر به این کتابها مراجعه کنند. برخی از مثالهای این کتاب بدیع (از آن خود من) هستند اما بعضی دیگر از کتابهای متعارف گردآوری شده‌اند و متناسب با زمینه بحث تغییراتی در آنها داده شده است. از آنجا که معتقدم هر اثری را همواره می‌توان اصلاح کرد، از هر پیشنهادی در این زمینه با تشکر استقبال می‌کنم.

بنوی کومار لاهیری

نمادها و قراردادهای

\mathbb{R} = مجموعه اعداد حقیقی

\mathbb{N} = مجموعه اعداد صحیح مثبت

\mathbb{Z} = مجموعه اعداد صحیح

\mathbb{C} = مجموعه اعداد مختلط

J, Λ = مجموعه‌های اندیسگذار

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ = فضای اقلیدسی n بعدی

اگر $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ آنگاه

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} = x \text{ نرم}$$

$$B^n = D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} = \text{گوی بسته } n \text{ بعدی}$$

$$S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \text{کره } (n-1) \text{ بعدی}$$

اگر $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ و $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ آنگاه

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \text{حاصلضرب اسکالری } x \text{ و } y$$

$I_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq n\} =$ مکعب n بعدی

$C = [0, 1]$ بازه واحد بسته

$B^n(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \delta\} = \delta > 0$ گوی باز n بعدی به مرکز $x \in \mathbb{R}^n$ و شعاع

$X, Y, \dots =$ فضاهای توپولوژیک (مگر آنکه به خلاف آن تصریح شود)

مفاهیم اساسی

اگر A و B دو مجموعه باشند و B زیرمجموعه‌ای از A باشد، می‌نویسیم $B \subseteq A$. مجموعه $A - B$ مجموعه عضوهایی از A است که متعلق به B نیستند. مجموعه تهی را با ϕ نمایش می‌دهیم.

حاصلضرب دکارتی (یا حاصلضرب مستقیم) مجموعه‌های A و B مجموعه زوجهای مرتبی به صورت (a, b) است که در آن $a \in A$ و $b \in B$. این حاصلضرب را با $A \times B$ نمایش می‌دهیم. لذا

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

حاصلضرب دکارتی تعداد متناهی مجموعه A_1, \dots, A_n به طور مشابه تعریف می‌شود:

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

رابطه روی مجموعه A زیرمجموعه‌ای مانند \sim از $A \times A$ است. هرگاه $(a, b) \in \sim$ ، معمولاً می‌نویسیم $a \sim b$. رابطه \sim روی A را رابطه هم‌ارزی می‌نامند هرگاه در شرایط زیر صدق کند

(الف) به ازای هر $a \in A$ ، $a \sim a$ (شرط بازتابی)؛

(ب) اگر $a \sim b$ ، آنگاه $b \sim a$ (شرط تقارن)؛

(ج) اگر $a \sim b$ و $b \sim c$ ، آنگاه $a \sim c$ (شرط ترابایی).

رده هم‌ارزی $a \in A$ را با $[a]$ نشان می‌دهیم و به صورت

$$[a] = \{b \in A : a \sim b\}$$

تعریف می‌کنیم. اگر رابطه \sim یک رابطه هم‌ارزی روی A باشد، هر عضو A دقیقاً به یکی از رده‌های هم‌ارزی متعلق است.

فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای متشکل از اعضای x, y, z و غیره باشد. فرض می‌کنیم هر دو عضو x و y بتوانند با یک عمل، که جمع نامیده می‌شود، با هم ترکیب شوند و عضوی از X را، که با $y + x$ نشان می‌دهیم، تولید کنند. همچنین فرض می‌کنیم با هر $x \in X$ و α که عددی حقیقی یا مختلط است و اسکالر نامیده می‌شود، عضوی از X متناظر شود، که آن را با αx نشان می‌دهیم و حاصلضرب α و x می‌نامیم. این عمل را ضرب اسکالر [در بردار] می‌نامند. مجموعه X را با این دو عمل فضای برداری می‌نامند هرگاه در اصول زیر صدق کند

$$1. \quad x + y = y + x$$

$$2. \quad x + (y + z) = (x + y) + z$$

۳. عضو منحصر به فردی مانند $\theta \in X$ چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in X$ ، $x + \theta = x$ ؛ θ را عضو صفر X می‌نامند؛

۴. به ازای هر $x \in X$ عضو منحصر به فردی از X ، که با $-x$ نمایش داده می‌شود، چنان موجود باشد که $x + (-x) = \theta$ ؛

اگر $x, y \in X$ و α, β اسکالر باشند، آنگاه

$$5. \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$6. \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$7. \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$8. \quad 1 \cdot x = x$$

$$9. \quad 0 \cdot x = \theta$$

فضای برداری را بسته به اینکه اسکالرها اعداد حقیقی یا مختلط باشند، فضای برداری حقیقی یا فضای برداری مختلط می‌نامند. اگر X فضای برداری باشد، هر عضو $x \in X$ را بردار می‌نامند.

مجموعه متناهی x_1, \dots, x_n از بردارها را **خطی وابسته** می‌نامند هرگاه اسکالرهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ که همگی صفر نیستند، چنان موجود باشند که

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \theta.$$

از طرف دیگر، اگر برابری

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$$

ایجاب کند که به ازای هر i ، $\alpha_i = 0$ ، آنگاه بردارهای x_1, \dots, x_n را **خطی مستقل** می‌نامند.

اگر مجموعه $\{x_i\}$ مجموعه‌ای متناهی باشد و $x = \sum \alpha_i x_i$ ، آنگاه x را **ترکیب خطی** اعضای $\{x_i\}$ می‌نامند.

پایه X مجموعه‌ای از بردارهای خطی مستقل است که هر بردار X ترکیبی خطی از اعضای آن باشد. فضای برداری X **متناهی بعد** است هرگاه پایه‌ای متناهی داشته باشد.

زیرمجموعه ناتهی B از X را **زیرفضا** می‌نامند هرگاه به ازای هر $x, y \in B$ ، هر ترکیب خطی $\alpha x + \beta y$ عضوی از B باشد.

فرض می‌کنیم S ، مجموعه دلخواهی از بردارهای فضای برداری X باشد، و M اشتراک تمام زیرفضاهای شامل S ، باشد. در این صورت، روشن است که M کوچکترین زیرفضای شامل S است. M را زیرفضای پدیدآمده از S می‌نامند.

فرض می‌کنیم U و V فضاهای برداری روی مجموعه اسکالرهای واحدی باشند. مجموع مستقیم U و V که با $U \oplus V$ نمایش داده می‌شود فضایی است برداری که اعضای آن تمام زوجهای مرتب (u, v) هستند که $u \in U$ و $v \in V$ ، و اعمال آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\alpha_1(u_1, v_1) + \alpha_2(u_2, v_2) = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2).$$

اگر X فضای برداری باشد، مجموعه تمام اعضایی به شکل

$$t x_1 + (1 - t) x_2$$

که $x_1, x_2 \in X$ و $0 \leq t \leq 1$ ، **پاره خط** واصل بین نقاط x_1 و x_2 نامیده می‌شود. مجموعه $K \subseteq X$ را **محدب** می‌نامیم هرگاه به ازای هر دو عضو از اعضای K ، پاره خط واصل بین آنها در K قرار داشته باشد.

فرض می‌کنیم $H \subseteq X$. اشتراک تمام مجموعه‌های محدب شامل H ، **غلاف محدب** H نامیده می‌شود. واضح است که این اشتراک خود مجموعه‌ای محدب است. فرض می‌کنیم X یک مجموعه و σ گردابه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند

(الف) $X \in \sigma, \phi \in \sigma$ ؛

(ب) اشتراک هر دو عضو از اعضای σ ، در σ باشد؛

(ج) اجتماع هر تعداد از اعضای σ ، در σ باشد.

گردابه σ با ویژگیهای فوق را **توپولوژی** روی X (یا توپولوژی X) و مجموعه X همراه با σ را فضای توپولوژیک می‌نامند و با (X, σ) نمایش می‌دهند. وقتی درباره توپولوژی ابهامی وجود نداشته باشد، گاهی به جای (X, σ) فقط می‌نویسند X . هر عضو σ را مجموعه باز می‌نامند. اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، زیرمجموعه G از X را همسایگی نقطه $x \in X$ می‌نامند هرگاه G شامل مجموعه بازی شامل x باشد.

زیرمجموعه F از فضای توپولوژیک X را **بسته** می‌نامند اگر و فقط اگر $X - F$ باز باشد. فرض می‌کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $Y \subseteq X$ ، کوچکترین مجموعه بسته شامل Y را **بستار** Y می‌نامند و با \bar{Y} نمایش می‌دهند. بنابراین

$$\bar{Y} = \bigcap_{j \in J} F_j$$

که در آن $\{F_j : j \in J\}$ خانواده تمام مجموعه‌های بسته شامل Y است.

فرض می‌کنیم $S \subseteq X$. در این صورت **توپولوژی القایی** روی S ، توسط توپولوژی X ، خانواده مجموعه‌هایی به شکل $U \cap S$ است که U در فضای توپولوژیک X باز باشد. بنابراین اگر T خانواده مجموعه‌های باز X باشد، آنگاه خانواده

$$T_S = \{U \cap S : U \in T\}$$

خانواده مجموعه‌های باز S است، و این خانواده **یک توپولوژی روی S** است.

گاهی توپولوژی القایی را توپولوژی نسبی می‌نامند. اگر S مجهز به توپولوژی القایی باشد، S را **زیرفضای X** می‌نامند.

فرض می‌کنیم $S \subseteq X$. در این صورت **پوشش S** ، گردابه‌ای از زیرمجموعه‌هایی مانند U_j از X است که

$$S \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j.$$

اگر مجموعه اندیسگذار J متناهی باشد، پوشش فوق را پوشش متناهی می‌نامند. اگر در گردایی فوق هر U_j باز باشد، این پوشش را پوشش باز می‌نامند.

زیرمجموعه S از X را فشرده نامند هرگاه هر پوشش باز S زیرپوششی متناهی داشته باشد. هر زیرمجموعه بسته از یک فضای فشرده، فشرده است.

اگر X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند، X و Y فشرده‌اند اگر و فقط اگر $X \times Y$ فشرده باشد.

هر زیرمجموعه بسته و کراندار \mathbb{R}^n فشرده است.

فضای توپولوژیک X همبند است اگر و فقط اگر اجتماع دو زیرمجموعه باز ناتهی مجزای خود نباشد. روشن است که X همبند است هرگاه تنها زیرمجموعه‌های X که هم باز باشند و هم بسته، \emptyset و X باشند. زیرمجموعه S از X همبند است هرگاه S با توپولوژی القایی، فضایی همبند باشد.

بازه $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ همبند است.

فرض می‌کنیم $\{S_j : j \in J\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های همبند X باشد. اگر $\bigcap_{j \in J} S_j \neq \emptyset$ ، آنگاه زیرمجموعه $S = \bigcup_{j \in J} S_j$ همبند است.

اگر X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند، $X \times Y$ همبند است اگر و فقط اگر X و Y همبند باشند.

می‌گوییم فضای توپولوژیک X در نقطه $x \in X$ موضعاً همبند است هرگاه هر مجموعه باز شامل x ، شامل یک مجموعه باز همبند شامل x باشد. فضای X را موضعاً همبند نامند هرگاه در هر نقطه‌اش موضعاً همبند باشد.

هر زیرمجموعه همبند ماکسیمال X را مؤلفه X می‌نامند.

فضای توپولوژیک X موضعاً همبند است اگر و فقط اگر مؤلفه‌های هر زیرفضای باز X ، در X باز باشند.

اگر X موضعاً همبند باشد، هر مؤلفه X باز است.

فرض می‌کنیم X و Y دو مجموعه باشند. تابع یا نگاشت $f : X \rightarrow Y$ تناظری است که به هر عضو $x \in X$ ، عضوی منحصر به فرد از Y را، که با $f(x)$ نشان می‌دهند، نسبت می‌دهد. نگاشت همانی روی X تابع $I : X \rightarrow X$ است که به‌ازای هر $x \in X$ ، $I(x) = x$. گاه این نگاشت را با I_X نشان می‌دهند.

اگر $A \subseteq X$ ، نگاشت $i : A \rightarrow X$ با ضابطه $i(a) = a$ ، $a \in A$ ، را نگاشت مشمولیت از A به X می‌نامند.

نگاره نگاشت $f : X \rightarrow Y$ به صورت

$$\text{im}(f) = f(X) = \{y \in Y : y = f(x), x \in X \text{ مانند عضو ی مانند}\}$$

تعریف می شود.

اگر $A \subseteq X$ ، آنگاه **تجدید** f به A را با $f|A$ نمایش می دهند. بنابراین نگاشت

$$f|A : A \rightarrow Y$$

با ضابطه

$$(f|A)(a) = f(a) \quad a \in A \text{ هر بازای}$$

تعریف می شود.

تابع $f : X \rightarrow Y$ **یک به یک** است هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ که $x_1 \neq x_2$ ، $f(x_1) \neq f(x_2)$ را **پوشا** نامند هرگاه $f(X) = Y$ و آن را دوسویی نامند هرگاه یک به یک و پوشا باشد.

اگر f **دوسویی** باشد، آنگاه **معکوس** f ، یعنی تابع $f^{-1} : Y \rightarrow X$ وجود دارد و به صورت

$$y = f(x) \text{ اگر و فقط اگر } x = f^{-1}(y)$$

تعریف می شود.

اگر $f : X \rightarrow Y$ و $g : Y \rightarrow Z$ دو نگاشت باشند، **نگاشت مرکب** gf یا $g \circ f$ از X به

Z با ضابطه

$$g(f(x)) = gf(x) \quad x \in X \text{ به ازای هر}$$

تعریف می شود.

فرض می کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند. نگاشت $f : X \rightarrow Y$ **پیوسته** است هرگاه به ازای هر مجموعه باز U از Y ، $f^{-1}(U)$ در X باز باشد.

تابع f **پیوسته** است اگر و فقط اگر به ازای هر زیرمجموعه بسته F از Y ، $f^{-1}(F)$ بسته باشد.

اگر توابع $f : X \rightarrow Y$ و $g : Y \rightarrow Z$ پیوسته باشند، تابع $gf : X \rightarrow Z$ نیز پیوسته است.

اگر تابع $f : X \rightarrow Y$ پیوسته باشد و زیرمجموعه $A \subseteq X$ مجهز به توپولوژی زیرفضایی

(نسبی) باشد، تابع $f|A : A \rightarrow Y$ پیوسته است.

اگر تابع $f : X \rightarrow Y$ پیوسته باشد و $f(X)$ مجهز به توپولوژی زیرفضایی باشد، تابع

$$f : X \rightarrow f(X) \text{ پیوسته است.}$$

فرض می کنیم $f : X \rightarrow Y$ نگاشت باشد. در این صورت **احکام زیر** هم ارزند

(الف) f پیوسته است.

(ب) نگاره معکوس هر مجموعه بسته از فضای Y ، در X بسته است.

(ج) به ازای هر $x \in X$ و هر همسایگی $N(f(x))$ در Y ، یک همسایگی $V(x)$ در X

چنان موجود است که

$$f(V(x)) \subseteq N(f(x))$$

(د) هرگاه $A \subseteq X$ ، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(ه) هرگاه $B \subseteq Y$ ، $f^{-1}(\overline{B}) \subseteq \overline{f^{-1}(B)}$.

تابعی که نگاره هر مجموعه باز تحت آن مجموعه باز باشد، **نگاشت باز** و تابعی که نگاره هر مجموعه بسته تحت آن مجموعه بسته باشد، **نگاشت بسته** نامیده می شود.

فرض می کنیم $f: X \rightarrow Y$ نگاشتی پیوسته باشد. اگر S زیرفضایی فشرده از X باشد، $f(S)$ فشرده است.

همسانزیختی (یا نگاشت توپولوژیک یا تبدیل توپولوژیک) نگاشتی پیوسته، باز و دوسویی از یک فضای توپولوژیک به یک فضای توپولوژیک دیگر است.

دو فضای توپولوژیک X و Y را **همسانزیخت** نامند هرگاه یک همسانزیختی از X به Y موجود باشد. در این حالت گوئیم Y نگاره همسانزیخت X است.

نگاره یک فضای موضعاً همبند تحت نگاشت پیوسته و باز، موضعاً همبند است.

تبدیل خطی (یا عملگر خطی یا نگاشت خطی) A روی فضای برداری V تناظری است که به هر بردار $x \in V$ ، برداری از V را، که با Ax نشان می دهیم، چنان نسبت می دهد که به ازای اسکالرهایی دلخواه α و β داشته باشیم

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

تابع خطی f روی فضای برداری V تابعی **اسکالر مقدار** است که به ازای هر بردار تعریف می شود و این ویژگی را دارد که به ازای بردارهای دلخواه $x_1, x_2 \in V$ و اسکالرهایی دلخواه α_1 و α_2

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

فرض می کنیم V فضای برداری دلخواه و V' گردایه تمام تابعهای خطی تعریف شده روی V باشد. تابع خطی f را که به ازای هر $x \in V$ ، $f(x) = 0$ ، با 0 نشان می دهیم. اگر $f_1, f_2 \in V'$ و α_1 و α_2 اسکالر باشند، قرار می دهیم

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x).$$

روشن است که f تابعکی خطی است. با این تعاریف از \circ ، جمع دو تابعک و ضرب اسکالر در تابعک، مجموعه V' به شکل یک فضای برداری در می آید که آن را فضای دوگان V می نامند.

برای سادگی، به جای نماد معمولی تابع $y(x)$ می نویسیم $[x, y]$. فرض می کنیم V فضایی برداری و f عضو دلخواهی از V' باشد. به ازای هر نگاشت خطی A روی V ، عبارت $[Ax, f]$ را که در آن $x \in V$ ، در نظر می گیریم. به ازای هر f ثابت، تابع f' که با ضابطه $f'(x) = [Ax, f]$ تعریف شده است تابعکی خطی روی V است. می توانیم بنویسیم $[Ax, f] = [x, f']$. حال اگر f در V' تغییر کند، آنگاه به این طریق به ازای هر f یک f' به دست می آوریم و لذا می توانیم بنویسیم $f' = A'f$. بنابراین

$$[Ax, f] = [x, A'f].$$

در این صورت A' نگاشتی خطی روی V' است؛ زیرا اگر $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} [x, A'f] &= [Ax, f] = \alpha_1 [Ax, f_1] + \alpha_2 [Ax, f_2] \\ &= \alpha_1 [x, A'f_1] + \alpha_2 [x, A'f_2] \\ &= [x, \alpha_1 A'f_1 + \alpha_2 A'f_2]. \end{aligned}$$

نگاشت خطی A' را **نگاشت الحاقی** (یا دوگان) A می نامند.

فرض می کنیم X فضایی توپولوژیک باشد و Y یک مجموعه و $f: X \rightarrow Y$ نگاشتی پوشا باشد. **توپولوژی خارج قسمتی** روی Y نسبت به f ، خانواده

$$U_f = \{U : U \subseteq Y \text{ و } f^{-1}(U) \text{ در } X \text{ باز باشد}\}$$

است.

مجموعه $RP^n = \{\{x, -x\} : x \in S^n\}$ را در نظر می گیریم. نگاشت $\pi: S^n \rightarrow RP^n$ با ضابطه $x \rightarrow \{-x, x\}$ نگاشتی پوشاست. مجموعه RP^n با توپولوژی خارج قسمتی نسبت به نگاشت π را **n -فضای تصویری حقیقی** می نامند.

اگر X و Y دو فضای توپولوژیک باشند، نگاشتهای **تصویرگر** زیر را داریم

$$\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y \quad \text{و} \quad \pi_X: X \times Y \rightarrow X$$

π_Y و π_X هر دو پیوسته اند زیرا

$$\pi_Y^{-1}(V) = X \times V \quad \text{و} \quad \pi_X^{-1}(U) = U \times Y$$

عمل دوتایی روی مجموعه X تابعی است مانند $f : X \times X \rightarrow X$. $f(x, y)$ را به صورت xy (در نمادگذاری ضربی) یا $x + y$ (در نمادگذاری جمعی) می‌نویسیم.

مجموعه G را **گروه** نامند هرگاه عملی دوتایی با شرایط زیر روی G موجود باشد
(الف) عضوی مانند $e \in G$ که عضو همانی G نامیده می‌شود، چنان موجود باشد که به ازای هر $g \in G$

$$ge = eg = g.$$

(ب) به ازای هر $g \in G$ ، عضوی مانند $g^{-1} \in G$ ، که معکوس g نامیده می‌شود، چنان موجود باشد که

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e.$$

(ج) به ازای هر $g_1, g_2, g_3 \in G$

$$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3).$$

رابطه آخر را رابطه شرکت‌پذیری می‌نامند.

اگر گروه جمعی باشد، عضو همانی آن را با e و معکوس هر عضو g از آن را با g^{-1} نشان می‌دهند. گروهی که تنها عضو آن عضو همانی e یا e باشد، گروه بدیهی نامیده می‌شود.

اگر G و H گروه باشند، حاصلضرب مستقیم G و H را با $G \times H$ نشان می‌دهند، و عمل دوتایی آن را با

$$(g, h)(g', h') = (gg', hh')$$

تعریف می‌کنند. در گروه جمعی، حاصلضرب مستقیم همان مجموع مستقیم است و با $G \oplus H$ نشان داده می‌شود.

اگر G و H هر دو گروه باشند، **همریختی** $f : G \rightarrow H$ تابعی است با این ویژگی که به ازای هر $g, g' \in G$

$$f(gg') = f(g)f(g').$$

اگر f دوسویی باشد، آن را **یکریختی** می‌نامند، و در این صورت، می‌گویند گروه‌های G و H یکریخت‌اند. گاهی به صورت نمادین می‌نویسیم $G \simeq H$ یا $G \cong H$.

هسته $f : G \rightarrow H$ مجموعه

$$\ker f = \{g \in G : f(g) = e\}$$

است که در آن e عضو همانی H است. باید توجه داشت که اگر f یکرخی باشد، هسته f فقط متشکل از عضو همانی G است.

گروه G را **آبلی** یا تعویض‌پذیر نامند هرگاه به‌ازای هر $g, g' \in G$ ، $gg' = g'g$. گروه **آبلی آزاد** از مرتبه n گروهی است یکرخت با $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ (n بار) که در آن \mathbb{Z} حلقه اعداد صحیح است.

همریختی یک‌به‌یک را **تکریختی** و همریختی پوشا را **بروریختی** می‌نامند.

فرض می‌کنیم G گروه باشد و $a \in G$. در این صورت، a از مرتبه n گفته می‌شود هرگاه n کوچکترین عدد طبیعی با ویژگی $a^n = e$ باشد، که e عضو همانی G است. اگر عددی طبیعی مانند n موجود نباشد به‌طوری که $a^n = e$ ، می‌گویند a از مرتبه نامتناهی است.

گروه G را **گروه دوری** نامند هرگاه عضوی مانند $a \in G$ چنان موجود باشد که هر عضو G توانی از a باشد. در این حالت a را **مولد** G می‌نامند. تعداد اعضای گروه را **مرتبه گروه** می‌نامند. مرتبه گروه دوری برابر با مرتبه مولد آن است.

زیرمجموعه H از گروه G را **زیرگروه** G می‌نامند هرگاه H تحت عمل دوتایی G گروه باشد. اگر H زیرگروه G باشد و $g \in G$ ، آنگاه **هم‌مجموعه چپ** H نسبت به g را با gH نشان می‌دهند و به‌صورت زیر تعریف می‌کنند

$$gH = \{gh : h \in H\}.$$

هم‌مجموعه‌های **راست** H به طریق مشابه تعریف می‌شوند.

زیرگروه H از گروه G را **زیرگروه نرمال** نامند هرگاه به‌ازای هر $a \in G$ ، $aH = Ha$.

فرض می‌کنیم G گروه و H زیرگروه نرمال G باشد. در این صورت هم‌مجموعه چپ gH و هم‌مجموعه راست Hg با هم برابرند. مجموعه G/H متشکل از تمام هم‌مجموعه‌های H در G همراه با عمل دوتایی $(Ha)(Hb) = Hab$ ، به‌ازای هر $Ha, Hb \in G/H$ ، گروهی است که آن را **گروه خارج قسمت** G بر H یا **گروه خارج قسمتی** G/H می‌نامیم.

رسته و تابع‌گونه‌ها

۱. رسته

رسته را می‌توان به‌طور شهودی متشکل از رده‌ای از مجموعه‌ها و رده‌ای از توابع، احیاناً با ساختارهایی اضافی بر یک یا هر دو رده، در نظر گرفت. تعریف دقیق رسته به‌صورت زیر است.

تعریف ۱.۲ رسته متشکل است از

(الف) رده‌ای از اشیاء؛

(ب) به‌ازای هر زوج مرتب از اشیاء X و Y از رده فوق، مجموعه‌ای از ریختارها با حوزه X و برد Y که با $\text{hom}(X, Y)$ نمایش داده می‌شود؛

(ج) به‌ازای هر سه‌تایی مرتب از اشیاء X و Y و Z ، تابعی که به هر جفت از ریختارها مانند

$$g : Y \rightarrow Z \quad \text{و} \quad f : X \rightarrow Y$$

ترکیب آنها

$$gf : X \rightarrow Z$$

را نسبت می‌دهد.

$\text{hom}(X, Y) \cap \text{hom}(X_1, Y_1) = \emptyset$ مگر آنکه $X = X_1$ و $Y = Y_1$. در اینجا اصطلاح ریختار را به معنی نگاشت به‌کار می‌بریم و گاه به‌جای ریختار می‌گوییم نگاشت. ریختارها باید در اصول زیر صدق کنند

شرکت‌پذیری: اگر $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ و $h : Z \rightarrow W$, آنگاه

$$h(gf) = (hg)f : X \rightarrow W.$$

همانی: متناظر با هر شیء Y , ریختار $I_Y : Y \rightarrow Y$ چنان موجود باشد که اگر $f : X \rightarrow Y$, آنگاه $I_Y f = f$ و اگر $h : Y \rightarrow Z$, آنگاه $h I_Y = h$.

از این اصول نتیجه گرفته می‌شود I_Y , که ریختار همانی y نامیده می‌شود، منحصر به‌فرد است. اگر $f : X \rightarrow Y$ و $g : Y \rightarrow X$ ریختار باشند و $gf = I_X$, آنگاه g را معکوس چپ f و f را معکوس راست g می‌نامند. معکوس f ریختاری است که هم معکوس چپ f و هم معکوس راست آن باشد. اگر $f : X \rightarrow Y$ ریختار باشد، آن را هم‌ارزی نامند هرگاه ریختاری مانند $g : Y \rightarrow X$ موجود باشد که معکوس دوطرفه f باشد. این مطلب را با $f : X \approx Y$ نمایش می‌دهند. اگر $g_1 : Y \rightarrow X$ معکوس چپ f و $g_2 : Y \rightarrow X$ معکوس راست f باشد، آنگاه

$$g_1 = g_1 I_Y = g_1 (f g_2) = (g_1 f) g_2 = I_X g_2 = g_2.$$

لذا لم زیر برقرار است.

لم ۱.۲ اگر $f : X \rightarrow Y$ معکوس چپ و معکوس راست داشته باشد، آن دو معکوس برابرند و در نتیجه f هم‌ارزی است.

بنابراین، نتیجه می‌شود که هر هم‌ارزی مانند $f : X \approx Y$, معکوسی منحصر به‌فرد دارد که خود هم‌ارزی است، این معکوس را با $f^{-1} : Y \rightarrow X$ نشان می‌دهند. اگر یک هم‌ارزی مانند $f : X \approx Y$ موجود باشد، می‌گویند X و Y هم‌ارزند و به‌صورت نمادین می‌نویسند $X \approx Y$. روشن است که ترکیب هم‌ارزیها هم‌ارزی است، بنابراین رابطه $X \approx Y$ یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه اشياء یک رسته است.

مثال ۱.۲ رسته‌ای که در این مثال عرضه می‌کنیم رسته‌ای است که رده اشياء آن رده تمام مجموعه‌هاست و اگر X و Y دو مجموعه باشند، $\text{hom}(X, Y)$ مجموعه تمام توابعی مانند f از X به Y است.

مثال ۲.۲ رسته ما در این مثال رسته‌ای است که اشیاء آن فضاهاى توپولوژیک هستند، و $\text{hom}(X, Y)$ مجموعه توابع پیوسته از X به Y است. در این صورت، قاعده ترکیب، قاعده ترکیب توابع است.

مثال ۳.۲ رسته مورد نظر در این مثال رسته‌ای است که اشیاء آن گروه‌ها هستند، و $\text{hom}(X, Y)$ مجموعه هم‌ریختیها از گروه X به گروه Y است.

مثال ۴.۲ فرض می‌کنیم X_1 و X_2 دو شیء دلخواه باشند. رسته ما رسته‌ای است که اشیاء آن X_1 و X_2 هستند، و

$$\text{hom}(X_1, X_1) = I_{X_1}, \text{hom}(X_2, X_2) = I_{X_2}$$

$$\text{hom}(X_1, X_2) = \phi, \text{hom}(X_2, X_1) = \phi.$$

۲. تابع‌گونه‌ها

تعریف ۲.۲ فرض می‌کنیم c_1 و c_2 دو رسته باشند. تابع‌گون هموردای F از c_1 به c_2 ، متشکل است از یک تابع شیئی که به هر شیء X از c_1 ، یک شیء از c_2 مانند $F(X)$ را نسبت می‌دهد، و یک تابع ریختاری که به هر ریختار $f : X \rightarrow Y$ از c_1 ، ریختاری از c_2 مانند $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ را نسبت می‌دهد به طوری که روابط

$$F(I_X) = I_{F(X)} \text{ (الف)}$$

$$F(gf) = F(g)F(f) \text{ (ب)}$$

برقرار باشند.

تعریف ۳.۲ تابع‌گون پادوردای F از c_1 به c_2 متشکل است از یک تابع شیئی و یک تابع ریختاری همانند تعریف ۲.۲ بجز اینکه اگر $f : X \rightarrow Y$ ، آنگاه $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$ و به جای قسمت (ب) داشته باشیم

$$F(gf) = F(f)F(g).$$

در هر یک از تعاریف فوق برای بیان اینکه F تابع‌گون است می‌نویسیم

$$F : c_1 \rightarrow c_2.$$

مثال ۵.۲ فرض می‌کنیم F تابعگونی هموردا از رسته فضاهای توپولوژیک و نگاشتهای پیوسته به رسته مجموعه‌ها و توابع باشد که به هر فضای توپولوژیک مجموعه زیربنای آن را [یعنی مجموعه‌ای را که به توپولوژی مجهز شده] نسبت می‌دهد. این تابعگون F را تابعگون نادیده‌گیر می‌نامند زیرا قسمتی از ساختار فضای توپولوژیک را «نادیده» می‌گیرد.

مثال ۶.۲ فرض می‌کنیم u_K رسته فضاهای برداری روی K و نگاشتهای خطی باشد. به علاوه فرض می‌کنیم $F : u_K \rightarrow u_K$ با ضابطه $F(V) = V^*$ و $F(f) = f^*$ تعریف شده باشد که در آن V^* فضای دوگان V و f^* نگاشت الحاقی f است. در این صورت، F تابعگونی پادورداست.

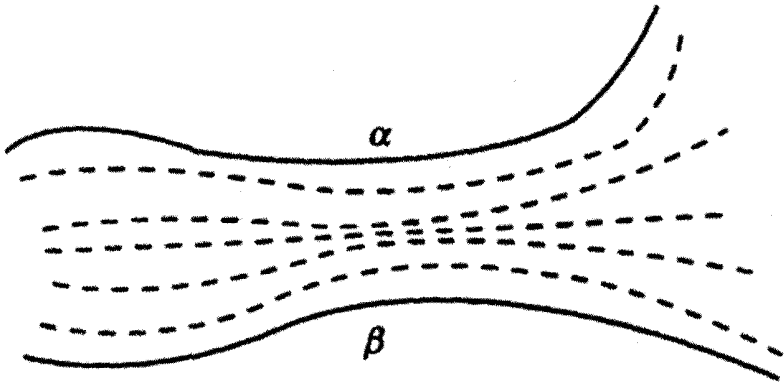
مثال ۷.۲ فرض می‌کنیم c رسته باشد. تابعگون همانی از c به c که روی اشیاء و نگاشتها همانی است، همورداست.

قضیه ۱.۲ اگر T تابعگونی از رسته c_1 به رسته c_2 باشد، آنگاه T هم‌ارزیهای c_1 را به هم‌ارزیهای c_2 می‌نگارد.

اثبات. قضیه را برای تابعگون هموردا ثابت می‌کنیم. اثبات برای تابعگون پادوردا مشابه آن است. فرض می‌کنیم T تابعگونی هموردا باشد، و $f : X \rightarrow Y$ یک هم‌ارزی از c_1 باشد. در این صورت، بنابه تعریف $f^{-1}f = I_X$. لذا

$$I_{T(X)} = T(I_X) = T(f^{-1})T(f)$$

به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم $T(f)T(f^{-1}) = I_{T(Y)}$. بنابراین $T(f^{-1})$ معکوس دوطرفه $T(f)$ است. لذا بنابه لم ۱.۲، $T(f)$ یک هم‌ارزی از c_2 است. در نتیجه قضیه به اثبات می‌رسد.



شکل ۱.۳

بازه واحد $C = [0, 1]$ متناظرند. پس نیاز داریم خانواده‌ای از کمانها مانند α_u ($0 \leq u \leq 1$) را چنان تعریف کنیم که $\alpha_0 = \alpha$ و $\alpha_1 = \beta$ و نسبت به u به‌طور پیوسته تغییر کند. مفهوم تغییر شکل پیوسته را می‌توان برحسب نگاشتی مانند F به X که وابسته به u و نیز نقاط C_1 باشد، و نگاره F به‌ازای u ای مفروض، α_u باشد، بیان کرد. فرض می‌کنیم F نگاشتی از $C_1 \times C_1$ به X باشد. در این صورت اگر F پیوسته باشد و به‌ازای هر مقدار u ، $F(t, u)$ معرف کمان α_u باشد، آنگاه F معرف تغییر شکل پیوسته‌ای از α به β از طریق کمانهای α_u است (به‌خصوص $F(t, 0)$ معرف α و $F(t, 1)$ معرف β است). توجه کنید که F منحصر به‌فرد نیست زیرا هر خانواده پیوسته از کمانهای α_u که $\alpha_0 = \alpha$ و $\alpha_1 = \beta$ ، برای این منظور کفایت خواهد کرد.

مطالب فوق را فقط برای روشن شدن مفهوم هوموتوبی عرضه کردیم، حال تعریف رسمی و دقیق هوموتوبی را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۳ دو نگاشت پیوسته $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ را **هوموتوپیک** نامند هرگاه تابعی پیوسته مانند $F : X \times C \rightarrow Y$ چنان موجود باشد که به‌ازای هر $x \in X$

$$F(x, 0) = f_0(x), \quad F(x, 1) = f_1(x).$$

نگاشت F را **هوموتوبی** بین f_0 و f_1 می‌نامند. در این حالت می‌نویسیم $f_0 \simeq f_1$ یا $F : f_0 \simeq f_1$. به‌ازای هر $u \in C = [0, 1]$ نگاشت F_u را با ضابطه $F_u(x) = F(x, u)$ که در آن $x \in X$ ، تعریف می‌کنیم. بنابراین $F_0 = f_0$ و $F_1 = f_1$.

۲۱ ویژگیهای نگاشتهای هوموتوپیک

مثال ۱.۳. فرض می‌کنیم $X = Y = \mathbb{R}^n$ و به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ $f_0(x) = x$ و $f_1(x) = 0$. نگاشت $F : \mathbb{R}^n \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ را با ضابطه

$$F(x, t) = (1 - t)x$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، F یک هوموتوپی بین f_0 و f_1 است.

مثال ۲.۳. فرض می‌کنیم $X = Y = C$ و به‌ازای هر $x \in C$ $f_0(x) = x$ و $f_1(x) = 0$. نگاشت $F : C \times C \rightarrow C$ را با ضابطه

$$F(x, u) = (1 - u)x$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، $F : f_0 \simeq f_1$.

تعریف ۲.۳ تابع پیوسته $f : X \rightarrow Y$ را **هوموتوپیک پوچ** نامند هرگاه با یک نگاشت ثابت هوموتوپیک باشد.

مثال ۳.۳. نگاشتهای هوموتوپیک پوچ ممکن است هوموتوپیک نباشند. در واقع ضرورتی ندارد نگاشتهای ثابت هوموتوپیک باشند. فرض می‌کنیم X همبند باشد و Y همبند نباشد. همچنین فرض می‌کنیم y_0 و y_1 نقاطی در مؤلفه‌های متمایز Y باشند و به‌ازای هر $x \in X$ $f_0(x) = y_0$ و $f_1(x) = y_1$. در این صورت f_0 و f_1 هوموتوپیک نیستند زیرا $X \times C$ همبند است در حالی که Y همبند نیست و نگاره یک فضای همبند تحت یک نگاشت پیوسته همبند است.

۲. ویژگیهای نگاشتهای هوموتوپیک

قضیه ۱.۳ تابعی مانند $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ با ویژگی $f \circ i = I$ موجود است اگر و فقط اگر نگاشت همانی $I : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ با یک نگاشت ثابت هوموتوپیک باشد که در اینجا $i : S^{n-1} \rightarrow B^n$ نگاشت مشمولیت و 0 نمایشگر ضرب اسکالری است.

اثبات. فرض می‌کنیم چنین تابعی مانند f موجود باشد. هوموتوپی

$$F : S^{n-1} \times C \rightarrow S^{n-1}$$

را با ضابطه

$$F(x, t) = f(tx)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت چون $x \in S^{n-1}$ داریم $F(x, 1) = f(x) = x$ و $F(x, 0) = f(0) = f(0)$ که مستقل از x است. بالعکس، فرض می‌کنیم نگاشت F ,

$$F : S^{n-1} \times C \rightarrow S^{n-1}$$

با ویژگی $F(x, 1) = x$ و $F(x, 0) = c$ موجود باشد. تابع $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ را با ضابطه

$$f(0) = c \quad \text{و} \quad f(x) = F\left(\frac{x}{\|x\|}, \|x\|\right)$$

تعریف می‌کنیم. چون S^{n-1} فشرده است، F یکنواخت پیوسته است. لذا به ازای هر $\varepsilon > 0$ δ مثبتی مستقل از x چنان موجود است که هرگاه $t < \varepsilon$ ، آنگاه $\|F(x, t) - c\| < \delta$. بنابراین f در 0 پیوسته است و لذا قضیه به اثبات می‌رسد. لمهای بعدی در آینده مفید خواهند بود.

لم ۱.۳ اگر $f : X \rightarrow Y$ و $g : Y \rightarrow Z$ نگاشتهایی پیوسته باشند، آنگاه تبدیل مرکب $h = gf : X \rightarrow Z$ پیوسته است.

اثبات. نگاره معکوس هر مجموعه باز از فضای Y ، در X باز است و نگاره معکوس هر مجموعه باز از فضای Z ، در Y باز است. فرض می‌کنیم G مجموعه باز دلخواهی در Z باشد. در این صورت، پیوستگی h از رابطه

$$h^{-1}(G) = f^{-1}\{g^{-1}(G)\}$$

حاصل می‌شود.

لم ۲.۳ اگر $p : X \times Y \rightarrow X$ و $q : X \times Y \rightarrow Y$ به صورت $p(x_1, x_2) = x_1$ و $q(x_1, x_2) = x_2$ تعریف شوند که در آن $x_2 \in Y$ و $x_1 \in X$ ، آنگاه p و q پیوسته‌اند.

اثبات. فرض می‌کنیم G در X باز باشد. در این صورت، $p^{-1}(G)$ مجموعه زوجهایی مرتب به صورت (x_1, x_2) است که $x_1 \in G$ و $x_2 \in Y$. لذا $p^{-1}(G) = G \times Y$ که $G \times Y$ در $X \times Y$ باز است. بنابراین، p پیوسته است. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم که q پیوسته است.

لم ۳.۳ اگر X اجتماع دوزیرمجموعه بسته A و B باشد و اگر $f: A \rightarrow Y$ و $g: B \rightarrow Y$ نگاشتهایی پیوسته باشند به طوری که به ازای هر $x \in A \cap B$ ، $f(x) = g(x)$ ، آنگاه تبدیل $h: X \rightarrow Y$ با ضابطه $h(x) = f(x)$ به ازای $x \in A$ و $h(x) = g(x)$ به ازای $x \in B$ ، پیوسته است.

اثبات. فرض می‌کنیم $F \subseteq X$ ، $F \setminus = F \cap A$ و $F \setminus = F \cap B$. در این صورت $F = F \setminus \cup F \setminus$ و لذا

$$h(F) = h(F \setminus) \cup h(F \setminus).$$

چون $\overline{F} = \overline{F \setminus} \cup \overline{F \setminus}$ داریم

$$h(\overline{F}) = h(\overline{F \setminus}) \cup h(\overline{F \setminus})$$

که در آن علامت $\overline{\quad}$ روی مجموعه نمایشگر بستار آن مجموعه است. اگر $x \in \overline{F \setminus} = \overline{F \setminus} \cap \overline{A}$ ، آنگاه روشن است که $x \in A$ و لذا $x \in A$ زیرا A بسته است. بنابراین $\overline{F \setminus} \subseteq A$ ، در نتیجه $h(\overline{F \setminus}) = f(\overline{F \setminus})$. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم $\overline{F \setminus} \subseteq B$ و لذا $h(\overline{F \setminus}) = g(\overline{F \setminus})$. چون f و g پیوسته‌اند، داریم

$$f(\overline{F \setminus}) \subseteq \overline{f(F \setminus)}, \quad g(\overline{F \setminus}) \subseteq \overline{g(F \setminus)}.$$

در نتیجه

$$h(\overline{F}) = h(\overline{F \setminus}) \cup h(\overline{F \setminus}) \subseteq \overline{f(F \setminus)} \cup \overline{g(F \setminus)} = \overline{h(F \setminus)} \cup \overline{h(F \setminus)}.$$

لذا $\overline{h(F \setminus)} \cup \overline{h(F \setminus)} = \overline{h(F \setminus) \cup h(F \setminus)} = \overline{h(F)}$ و بنابراین

$$h(\overline{F}) \subseteq \overline{h(F)}$$

یعنی h پیوسته است.

قضیه ۲.۳ رابطه \simeq یک رابطه هم‌ارزی است.

اثبات. با تعریف هوموتوبی $F(x, t)$ به صورت $F(x, t) = f(x)$ ، نتیجه می‌گیریم که $f \simeq f$. اگر $F: f \simeq g$ ، آنگاه $G: g \simeq f$ زیرا نگاشت $G: g \simeq f$ یک هوموتوبی بین g و f است. اگر $F: f \simeq g$ و $G: g \simeq h$ ، نگاشت H را با ضابطه

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

تعريف مي‌کنيم. در اين صورت، بنابه لم ۳.۳، H پيوسته است و نيز $H : f \simeq h$. مفهوم رده هوموتوپي نگاشتها از اين قضيه حاصل مي‌شود.

اگر f نگاشتي پيوسته باشد، آنگاه رده هوموتوپي متناظر آن متشکل از تمام نگاشتهاي پيوسته هوموتوپيک با f است که با $\{f\}$ نمايش داده مي‌شود و مجموعه تمام رده‌هاي هوموتوپي نگاشتهاي پيوسته از X به Y با $[X, Y]$ نمايش داده مي‌شود.

قضيه ۳.۳ (ترکيب و تحديد).

(۱) نگاشتهاي پيوسته $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ و $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$ مفروض‌اند. اگر $f_1 \simeq f_2$ و $g_1 \simeq g_2$ ، آنگاه $g_1 f_1 \simeq g_2 f_2$.

(۲) نگاشتهاي پيوسته $f, g : X \rightarrow Y$ مفروض‌اند و $f \simeq g$. در اين صورت به ازاي هر $A \subseteq X$

$$f|A \neq g|A.$$

اثبات. (۱) فرض مي‌کنيم $\Phi : f_1 \simeq f_2$ و $\Psi : g_1 \simeq g_2$. تعريف مي‌کنيم

$$F(x, t) = \begin{cases} g_1 \Phi(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \Psi(f_2(x), 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

در اين صورت، $F(x, t)$ نگاشتي پيوسته از $X \times C$ به Z و يک هوموتوپي بين $g_1 f_1$ و $g_2 f_2$ است.

(۲) فرض مي‌کنيم $i : A \rightarrow X$ نگاشت مشموليت باشد. در اين صورت $f|A = f_1$ و لذا **اثبات از قسمت (۱) نتيجه مي‌شود.**

قضيه ۴.۳ فرض مي‌کنيم f و g نگاشتهاي هوموتوپيک از X به Y باشند و h نگاشتي پيوسته از Y به Z باشد. در اين صورت، hf و hg نگاشتهاي هوموتوپيک از X به Z هستند.

اثبات. نگاشتي مانند $F : X \times C \rightarrow Y$ چنان موجود است که به ازاي هر $x \in X$ ، $F(x, 0) = f(x)$ و $F(x, 1) = g(x)$. تبديل $G : X \times C \rightarrow Z$ را با ضابطه

$$G(x, t) = hF(x, t)$$

تعريف مي‌کنيم. چون F و h پيوسته‌اند، بنابه لم ۱.۳، G پيوسته است.

به علاوه،

$$G(x, 0) = hF(x, 0) = h(f(x))$$

و

$$G(x, 1) = hF(x, 1) = h(g(x)).$$

لذا $hg \simeq hf$ و بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیه زیر را می‌توان به طریقی مشابه قضیه فوق ثابت کرد.

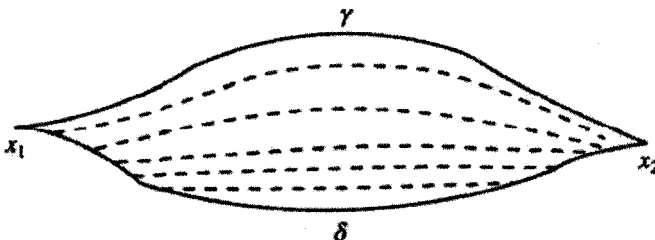
قضیه ۵.۳ اگر f نگاشتی پیوسته از X به Y و g و h نگاشتهایی هوموتوپیک از Y به Z باشند، آنگاه hf و gf نگاشتهایی هوموتوپیک از X به Z هستند.

۳. هوموتوپی نسبی

در مواردی هوموتوپی مورد نظر به نوعی دچار محدودیت است. در این محدودیت، لازم است زیرمجموعه‌ای در \mathcal{U} فرایند تغییر شکل [که آن را فرایند دگردهایی می‌نامیم] ثابت باقی بماند. شکل ۲.۳ را که در آن دو کمان ساده γ و δ با نقاط ابتدایی و انتهایی یکسان x_1 و x_2 نشان داده شده‌اند، ملاحظه کنید.

فرض می‌کنیم γ به‌طور پیوسته‌ای به صورت تشریح شده در ابتدای فصل، تغییر شکل (یا دگردهایی) یابد و به δ تبدیل شود، اما با این محدودیت که نقاط ابتدایی و انتهایی هر یک از اعضای خانواده کمانهای میانی نقاط x_1 و x_2 باشد. در این حالت گوئیم نگاشتهای معرف γ و δ نسبت به زیرمجموعه متشکل از x_1 و x_2 هوموتوپیک هستند. اکنون تعریف دقیق این مفهوم را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۳.۳ فرض می‌کنیم $A \subseteq X$ و نگاشتهای $f_0 : X \rightarrow Y$ و $f_1 : X \rightarrow Y$ نگاشتهایی پیوسته باشند. در این صورت، می‌گویند f_1 نسبت به A هوموتوپیک هستند هرگاه یک



شکل ۲.۳

هوموتوبی مانند F بین f_0 و f_1 چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in A$ مستقل از t باشد. به عبارت دیگر، به ازای هر $x \in A$ و هر $t \in C$ $F(x, t) = f_0(x)$ باشد. در این حالت واضح است که به ازای هر $x \in A$ $f_0(x) = f_1(x)$ هوموتوبی F را هوموتوبی نسبت به A می نامند و به صورت $f_0 \simeq f_1(\text{rel } A)$ و هنگامی که اشاره به F مدنظر باشد، به صورت

$$F : f_0 \simeq f_1(\text{rel } A)$$

نشان می دهند. * لذا، اگر

$$F : f_0 \simeq f_1(\text{rel } A)$$

آنگاه به ازای هر $x \in X$ $F(x, 0) = f_0(x)$ و $F(x, 1) = f_1(x)$ ، و به ازای هر $x_0 \in A$ و هر $t \in C$ $F(x_0, t) = f_0(x_0) = f_1(x_0)$ ، اگر $A = \emptyset$ ، آنگاه هوموتوبی نسبت به A همان هوموتوبی است. بنابراین هوموتوبی معمولی حالت خاصی از هوموتوبی نسبی است.

قضیه ۶.۳ رابطه هوموتوبیک بودن نسبت به A یک رابطه هم ارزی است.

اثبات. بازتابی. F را به صورت $F(x, t) = f(x)$ تعریف می کنیم، در این صورت F پیوسته است. روشن است که به ازای هر $x \in X$ $F(x, 0) = f(x) = F(x, 1)$ و $F(x, t) = f(x)$ ، لذا $f \simeq f(\text{rel } A)$ می تواند هر زیرمجموعه ای از X باشد.

تقارن. فرض می کنیم $f \simeq g(\text{rel } A)$. در این صورت نگاشت پیوسته $F : X \times C \rightarrow Y$ چنان موجود است که به ازای هر $x \in X$ $F(x, 0) = f(x)$ و $F(x, 1) = g(x)$ ، به علاوه اگر $x_0 \in A$ $F(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0)$ ، نگاشت $G : X \times C \rightarrow Y$ را با ضابطه $G(x, t) = F(x, 1 - t)$ تعریف می کنیم. در این صورت بنا به لم ۱.۳، G پیوسته است و

$$G(x, 0) = g(x), G(x, 1) = f(x)$$

همچنین به ازای هر $x_0 \in A$ $G(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0)$ ، لذا $g \simeq f(\text{rel } A)$.

ترابیی. فرض می کنیم $f \simeq g(\text{rel } A)$ و $g \simeq h(\text{rel } A)$. نگاشتهای پیوسته $F, G : X \times C \rightarrow Y$ چنان موجودند که $F(x, 0) = f(x)$ ، $F(x, 1) = g(x)$ ، و به ازای هر $x_0 \in A$ $F(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0)$ ، همچنین $G(x, 0) = g(x)$ ، $G(x, 1) = h(x)$ ، و به ازای هر $x_0 \in A$ $G(x_0, t) = g(x_0) = h(x_0)$.

تبدیل $H : X \times C \rightarrow Y$ را با ضابطه

$$H(x, t) = F(x, \sqrt{t}) \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4}$$

$$H(x, t) = G(x, \sqrt{4t - 1}) \quad \frac{1}{4} \leq t \leq 1$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت بنا به لم ۳.۳، H پیوسته است و $H(x, 0) = f(x)$ ، $H(x, 1) = h(x)$ ، و به ازای هر $x_0 \in A$ ، $H(x_0, t) = f(x_0) = h(x_0)$ ، بنابراین $f \simeq h(\text{rel } A)$.

نکته ۱.۳ از قضیه ۶.۳ نتیجه می‌شود که مجموعه تمام نگاشتهای پیوسته‌ای مانند $f : X \rightarrow Y$ که نگاره آنها در A در $x \in A$ نقطه واحدی از Y باشد، به زده‌هایی که دوه‌دو هم‌ارزند تقسیم می‌شود. دو نگاشت پیوسته f و g متعلق به یک زده هستند اگر و فقط اگر $f \simeq g(\text{rel } A)$ ، هر یک از این زده‌های نگاشتهای پیوسته را زده هموتوپی می‌نامند.

تمرین

۱. فرض کنید نگاشتهای $f, g : X \rightarrow S^n$ پیوسته باشند و به ازای هر $x \in X$ ، $f(x) \neq -g(x)$. نشان دهید $f \simeq g$.
۲. فرض کنید نگاشت $f : S^1 \rightarrow X$ پیوسته باشد. نشان دهید f هموتوپیک پوچ است اگر و فقط اگر نگاشتهای پیوسته مانند $g : B^2 \rightarrow X$ چنان موجود باشد که $f = g|S^1$.
۳. فرض کنید $f_0 \simeq f_1(\text{rel } A) : X \rightarrow Y$ و نگاشت $g : Y \rightarrow Z$ پیوسته باشد. نشان دهید $g \circ f_0 \simeq g \circ f_1(\text{rel } A) : X \rightarrow Z$.
۴. فرض کنید $f_0 \simeq f_1 : X \rightarrow Y$ و $g_0 \simeq g_1 : Y \rightarrow Z$. نشان دهید $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1 : X \rightarrow Z$.

نوع هوموتوپی و درون بریها

۱. فضای انقباض پذیر

اگر نگاشت $g : X \rightarrow Y$ نگاشتی پیوسته باشد که نگاره آن فقط شامل یک نقطه باشد، آنگاه g نگاشتی ثابت است. اگر نگاشت $f : X \rightarrow Y$ هوموتوپیک با چنین نگاشتی باشد، آنگاه می‌گوییم f هوموتوپیک با ثابت (یا هوموتوپیک بوج) است. اگر نگاشت همانی I_X هوموتوپیک با یک نگاشت ثابت (در رسته‌ای مناسب) باشد، آنگاه می‌گوییم X دگرذیسی پذیر و تبدیل پذیر به یک نقطه یا انقباض پذیر است.

اجمالاً می‌گوییم فضای انقباض پذیر چنان است که می‌تواند در خودش دگرذیسی یابد و به یک نقطه تبدیل شود.

مثال ۱.۴ دایره انقباض پذیر نیست. سطح کره انقباض پذیر نیست.

مثال ۲.۴ B^n ، کره «توپ» n بعدی بسته واحد را در نظر بگیرد. نشان می‌دهیم که B^n انقباض پذیر است. B^n از نقاطی از \mathbb{R}^n مانند (x_1, \dots, x_n) تشکیل می‌شود که در رابطه $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$

صدق کنند. تبدیل $F : B^n \times C \rightarrow B^n$ با ضابطه

$$F(x, t) = ((1-t)x_1, \dots, (1-t)x_n)$$

که در آن $x = (x_1, \dots, x_n) \in B^n$ پیوسته است و

$$F(x, 0) = x, \quad F(x, 1) = (0, 0, \dots, 0).$$

لذا نگاشت همانی $I : B^n \rightarrow B^n$ هوموتوپیک با ثابت است.

قضیه ۱.۴ اگر Y انقباض پذیر باشد، آنگاه هر نگاشت پیوسته مانند $f : X \rightarrow Y$ هوموتوپیک با ثابت است.

اثبات. چون Y انقباض پذیر است، نگاشتی پیوسته مانند $F : Y \times C \rightarrow Y$ چنان موجود است که به ازای هر $y \in Y$ ، $F(y, 0) = y$ و $F(y, 1) = y_0$ که در آن y_0 عنصری ثابت است. فرض می‌کنیم نگاشت $f : X \rightarrow Y$ نگاشتی پیوسته باشد.

نگاشت $G : X \times C \rightarrow Y$ را با ضابطه

$$G(x, t) = F(f(x), t) \quad x \in X$$

تعریف می‌کنیم.

با استفاده از لم ۱.۳ نتیجه می‌گیریم که G پیوسته است. به علاوه

$$G(x, 0) = F(f(x), 0) = f(x)$$

و

$$G(x, 1) = F(f(x), 1) = y_0.$$

بنابراین f هوموتوپیک با $g : X \rightarrow Y$ است که g نگاشت ثابت با ضابطه $g(x) = y_0$ به ازای هر $x \in X$ است. لذا قضیه به اثبات می‌رسد.

نکته ۱.۴ از این قضیه نتیجه می‌شود که در هر فضای انقباض پذیر فقط یک رده هوموتویی از نگاشتها وجود دارد.

۲. نوع هوموتوپی

گویند فضای X و فضای Y یک نوع هوموتوپی دارند هرگاه نگاشتهای پیوسته $f : X \rightarrow Y$ و $g : Y \rightarrow X$ چنان موجود باشند که $gf : X \rightarrow X$ هوموتوپیک با I_X و $fg : Y \rightarrow Y$ هوموتوپیک با I_Y باشد.

هر یک از نگاشتهای f و g را هم‌ارزی هوموتوپی می‌نامند. فضاهای X و Y را نیز هوموتوپی‌هم‌ارز می‌نامند.

مثال ۳.۴ اگر X با Y همسانریخت باشد، آنگاه X و Y یک نوع هوموتوپی دارند.

مثال ۴.۴ عکس مثال فوق (مثال ۳.۴) برقرار نیست. فضای انقباض‌پذیر و فضایی که فقط شامل یک نقطه است یک نوع هوموتوپی دارند. اما این دو فضا ممکن است همسانریخت نباشند (اگر فضای انقباض‌پذیر بیش از یک نقطه داشته باشد، با فضای تک‌نقطه‌ای همسانریخت نیست). مثال دیگری را مدنظر قرار می‌دهیم.

مثال ۵.۴ B^n همسانریخت با یک نقطهٔ تنها، مثلاً $\{y_0\} \subseteq B^n$ ، نیست اما نشان می‌دهیم که نوع هوموتوپی B^n و نقطهٔ تنها یکی است. برای مشاهدهٔ این موضوع، نگاشت مشمولیت $f : \{y\} \rightarrow B^n$ (با ضابطه $f(y) = y$) و نگاشت ثابت $g : B^n \rightarrow \{y\}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، $gf = I$ ، و نگاشت $F : B^n \times C \rightarrow B^n$ با ضابطه $F(x, t) = tx + (1-t)y$ یک هوموتوپی بین f و I_{B^n} است.

قضیهٔ ۲.۴ رابطهٔ یک نوع هوموتوپی داشتن رابطهٔ هم‌ارزی است.

اثبات. ویژگیهای بازتابی و تقارن به سادگی از تعریف نتیجه می‌شوند. فرض می‌کنیم X و Y یک نوع هوموتوپی، و Y و Z نیز یک نوع هوموتوپی داشته باشند. نگاشتهای پیوسته $f : X \rightarrow Y$ ، $g : Y \rightarrow Z$ ، $f_1 : Y \rightarrow Z$ و $g_1 : Z \rightarrow Y$ چنان موجودند که $g_1 f_1$ و $f_1 g_1$ با نگاشتهای همانی مناسب هوموتوپیک باشند. تبدیلهای

$$f_2 : X \rightarrow Z \quad \text{و} \quad g_2 : Z \rightarrow X$$

را با ضابطه‌های

$$f_2(x) = f_1(f(x)) \quad \text{و} \quad g_2(x) = g_1(g(x))$$

در نظر بگیرید.

بنابه لم ۱.۳، f_2 و g_2 پیوسته‌اند و بنابه قضایای ۴.۳ و ۵.۳، $g(g_1 f_1)$ هوموتوپیک با g است زیرا $g_1 f_1$ هوموتوپیک با همانی است. لذا نگاشت $g_2 f_2 = g((g_1 f_1) f)$ هوموتوپیک با $g f$ و در نتیجه هوموتوپیک با همانی است. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم که $f_2 g_2$ هوموتوپیک با همانی است. بنابراین X و Z یک نوع هوموتوپی دارند. در نتیجه قضیه به اثبات می‌رسد.

۳. درون بریها

تعریف ۱.۴ زیرمجموعه $A \subseteq X$ را درون برد X می‌نامند هرگاه نگاشتی پیوسته مانند $r : X \rightarrow A$ چنان موجود باشد که $r \circ i = I_A$ که در آن نگاشت $i : A \rightarrow X$ نگاشت مشمولیت است، در نتیجه به‌ازای هر $a \in A$ ، $r(a) = a$. نگاشت r را درون‌بری می‌نامند.

تعریف ۲.۴ زیرمجموعه $A \subseteq X$ را درون برد دگرذیسی X می‌نامند هرگاه یک درون‌بری مانند $r : X \rightarrow A$ چنان موجود باشد که

$$ir \simeq I_X$$

که در آن نگاشت $i : A \rightarrow X$ نگاشت مشمولیت است.

به عبارت دیگر A درون برد دگرذیسی X است هرگاه یک هوموتوپی مانند $F : X \times C \rightarrow X$ چنان موجود باشد که به‌ازای هر $x \in A$ ، $F(x, 1) \in A$ و $F(x, 0) = x$.

مثال ۶.۴ دایره درون برد دگرذیسی استوانه است.

مثال ۷.۴ اگر A درون برد دگرذیسی X باشد، آنگاه A و X هوموتوپی هم‌ارز هستند.

تعریف ۳.۴ زیرمجموعه $A \subseteq X$ را درون برد دگرذیسی قوی نامند هرگاه درون‌بری $r : X \rightarrow A$ چنان موجود باشد که

$$ir \simeq I_X(\text{rel } A).$$

این تعریف معادل تعریف زیر است.

تعریف ۴.۴ زیرمجموعه $A \subseteq X$ را درون برد دگرذیسی قوی X نامند هرگاه یک هوموتوپی مانند $F : X \times C \rightarrow X$ چنان موجود باشد که به‌ازای هر $x \in X$ ، $F(x, 0) = x$ ، و به‌ازای هر $F(a, t) = a$ ، $t \in C$ و $F(a) \in A$ و $F(x, 1) \in A$ ، $x \in X$ و به‌ازای هر $x \in X$.

مثال ۸.۴ هر درون برد دگرذیسی قوی، درون برد دگرذیسی است.

مثال ۹.۴ فرض می‌کنیم فضای دلخواه باشد. در این صورت، X درون برد X است. هر $x_0 \in X$ نیز درون برد X است.

مثال ۱۰.۴ گوی واحد B^n درون برد \mathbb{R}^n است. نگاشت زیر را بررسی کنید: $r(x) = x/\|x\|$ وقتی $\|x\| \geq 1$ و $r(x) = x$ وقتی $\|x\| < 1$.

مثال ۱۱.۴ S^n درون برد دگردیسی قوی $\mathbb{R}^{n+1} - 0$ است.

نگاشت $F: (\mathbb{R}^{n+1} - 0) \times C \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - 0$ را با ضابطه

$$F(x, t) = (1-t)x + \frac{tx}{\|x\|} \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} - 0, t \in C$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت نتیجه می‌گیریم S^n درون برد دگردیسی قوی $\mathbb{R}^{n+1} - 0$ است.

مثال ۱۲.۴ زیرمجموعه‌های C_1 و C_2 از \mathbb{R}^2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C_1 = \{x = (x_1, x_2) : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\}$$

و

$$C_2 = \{x = (x_1, x_2) : (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1\}$$

و می‌نویسیم $Y = C_1 \cup C_2$ و $X = Y - \{(2, 0), (-2, 0)\}$

نشان می‌دهیم که نقطه $x_0 = (0, 0)$ درون برد دگردیسی قوی X است. نگاشتهای

$i: \{x_0\} \rightarrow X$ و $r: X \rightarrow \{x_0\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت، $ri = I$. برای مشاهده

اینکه $ir \simeq I(\text{rel}\{x_0\})$ هومتوبی $F: X \times C \rightarrow X$ را با ضابطه

$$F(x, t) = \frac{((1-t)x}{\|((1-t)x_1 + (-1)^k, (1-t)x_2)\|}$$

که در آن $x \in C_k$, $k = 1, 2$ ، تعریف می‌کنیم. $F(x, t)$ نامتناهی نیست، زیرا به‌ازای هر

$x \in X$ ، $((1-t)x_1 + (-1)^k, (1-t)x_2) \neq (0, 0)$ می‌توان نتیجه گرفت که F پیوسته

است. علاوه بر این،

$$F(x, 1) = x_0 \quad \text{و} \quad F(x, 0) = x \quad , F(x_0, t) = x_0$$

لذا $ir \simeq I(\text{rel}\{x_0\})$ و در نتیجه $\{x_0\}$ درون برد دگردیسی قوی X است.

تمرین

۱. فرض کنید $\{I_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ خانواده‌ای از بازه‌های واحد باشد. نشان دهید که $\prod_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$ انقباض‌پذیر است.
۲. نشان دهید X انقباض‌پذیر است اگر و فقط اگر نگاشت همانی I_X هوموتوپیک با یک نگاشت ثابت باشد.
۳. فرض کنید X همبند باشد و نوع هوموتوپی آن با Y یکی باشد. نشان دهید Y همبند است.
۴. فرض کنید $A \subseteq B \subseteq X$ و B درون‌برد X و A درون‌برد B باشد. نشان دهید که A درون‌برد X است.
۵. فرض کنید X موضعاً فشرده و A درون‌برد X باشد. نشان دهید A نیز موضعاً فشرده است.
۶. نشان دهید هر درون‌برد یک فضای هاوسدورف زیرمجموعه‌ای بسته است.
۷. نشان دهید $\{1\} \cup \{0\}$ درون‌برد C نیست.
۸. نشان دهید یک درون‌بری از B^n به S^{n-1} وجود دارد اگر و فقط اگر S^{n-1} انقباض‌پذیر باشد. (راهنمایی: فرض کنید $F : S^{n-1} \times C \rightarrow S^{n-1}$ یک هوموتوپی بین یک نگاشت ثابت و نگاشت همانی باشد. سپس از نگاشت $S^{n-1} \times C \rightarrow B^n$ با ضابطه $(x, t) \rightarrow tx$ ، و این نکته که $(S^{n-1} \times \{0\})$ یک نقطهٔ تنهاست، استفاده کنید).

۵

مسیر

۱. تعاریف

فرض می‌کنیم X فضای توپولوژیک و C نمایشگر بازه واحد $[0, 1]$ باشد. مسیر در فضای X نگاشتی پیوسته مانند $f: C \rightarrow X$ است. نقاط $f(0)$ و $f(1)$ را به ترتیب نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر می‌نامند. باید توجه داشت که مسیر، نگاشت f است نه نگاره $f([0, 1])$. اگر x عضو ثابتی از X باشد، نگاشت ثابت ε_x نگاشت

$$\varepsilon_x: [0, 1] \rightarrow X$$

با ضابطه $\varepsilon_x(t) = x$ به ازای هر $t \in C$ است. مسیر ε_x را مسیر پوچ می‌نامند.

مثال ۱.۵ ε_x مسیر است.

مسیر معکوس f ، که آن را با \bar{f} نشان می‌دهیم، مسیری است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\bar{f}(t) = f(1 - t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

لذا نقطهٔ انتهایی یک مسیر منطبق بر نقطهٔ ابتدایی مسیر معکوس آن و نقطهٔ ابتدایی مسیر منطبق بر نقطهٔ انتهایی مسیر معکوس آن است. نگارهٔ f و نگارهٔ معکوس آن \bar{f} ، مجموعهٔ واحدی از نقاط X هستند، اما این دو نگاره در دو جهت مخالف هم حاصل می‌شوند.

فرض می‌کنیم f و g دو مسیر باشند و $g(\circ) = f(1)$ ، یعنی نقطهٔ انتهایی f منطبق بر نقطهٔ ابتدایی g باشد. در این صورت، مسیر حاصلضرب f و g را که با $f * g$ نمایش می‌دهند، به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$(f * g)(t) = f(2t) \quad \circ \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$$(f * g)(t) = g(2t - 1) \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

بنابه لم ۳.۳، تابع $f * g$ پیوسته است و لذا $f * g$ مسیر است. به تسامح، $f * g$ را می‌توان به صورت مسیر f که به دنبال آن مسیر g آمده است، در نظر گرفت. با خلاصه کردن این ملاحظات، می‌توانیم لمهای زیر را بیان کنیم.

لم ۱.۵ اگر f مسیری در X باشد، آنگاه \bar{f} نیز مسیر است.

لم ۲.۵ اگر f و g دو مسیر در X باشند به طوری که $f(1) = g(\circ)$ ، آنگاه تابع $f * g : [\circ, 1] \rightarrow X$ با ضابطهٔ

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \circ \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

مسیری در X است.

۲. فضای مسیری همبند

تعریف ۱.۵ فضای X را مسیری همبند نامند هرگاه به ازای هر $a, b \in X$ ، مسیری در X از a به b وجود داشته باشد.

بنابراین مؤلفهٔ مسیری همبند، زیرمجموعهٔ مسیری همبند ماکسیمال است.

مثال ۲.۵ \mathbb{R}^n را با توپولوژی معمولی در نظر بگیرد. اگر $a, b \in \mathbb{R}^n$ ، آنگاه نگاشت $f : [\circ, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ

$$f(t) = bt + a(1 - t)$$

مسیری از a به b است. لذا \mathbb{R}^n مسیری همبند است.

مثال ۳.۵ هر زیرمجموعهٔ محدب \mathbb{R}^n مسیری همبند است.

قضیهٔ ۱.۵ اگر X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند، X مسیری همبند، و $g : X \rightarrow Y$ تابعی پیوسته و پوشا باشد، آنگاه Y مسیری همبند است.

اثبات. فرض می‌کنیم $a, b \in Y$ ، در این صورت نقاط $a', b' \in X$ چنان موجودند که $g(a') = a$ و $g(b') = b$. چون X مسیری همبند است، مسیری از a' به b' مانند f وجود دارد. تابع مرکب gf را، که به‌وضوح مسیری از a به b است، در نظر بگیرید. وجود این تابع نشان می‌دهد که Y مسیری همبند است.

فرع ۱.۵ اگر X و Y همسانریخت باشند، آنگاه X مسیری همبند است اگر و فقط اگر Y مسیری همبند باشد.

در قضیهٔ بعدی مشاهده می‌کنیم که هر زیرمجموعهٔ همبند \mathbb{R}^n مسیری همبند است.

قضیهٔ ۲.۵ هر زیرمجموعهٔ باز و ناتهی و همبند \mathbb{R}^n مسیری همبند است.

اثبات. فرض می‌کنیم E چنین مجموعه‌ای باشد و $p \in E$. همچنین فرض می‌کنیم F زیرمجموعه‌ای از E متشکل از تمام نقاطی از E باشد که هر یک را بتوان با مسیری در E به p وصل کرد. با در نظر گرفتن مسیر پوچ ε_p ، مشاهده می‌کنیم که F ناتهی است. نشان می‌دهیم که F هم بسته و هم باز است.

برای اثبات باز بودن F ، فرض می‌کنیم $q \in F \subseteq E$. چون E باز است، ε مثبتی چنان موجود است که

$$q \in D = \{x : \{x : \|q - x\| < \varepsilon\} \subseteq E\}.$$

چون D با \mathbb{R}^n همسانریخت است و \mathbb{R}^n (بنابه مثال ۲.۵) مسیری همبند است، از فرع ۱.۵ نتیجه می‌گیریم که D مسیری همبند است، یعنی هر نقطهٔ D را می‌توان با مسیری در D به q وصل کرد. بنابراین هر نقطه را می‌توان با مسیری در E به p وصل کرد و لذا $q \in D \subseteq F$. در نتیجه باز F است.

برای نشان دادن اینکه F بسته است، فرض می‌کنیم $G = E - F$. لذا G متشکل از تمام

نقاطی از E است که آنها را نمی‌توان با مسیری در E به p وصل کرد. با استدلالی مشابه استدلال فوق، نتیجه می‌گیریم که G باز است و لذا F بسته است.

بنابراین ملاحظه می‌کنیم که E همبند است و F زیرمجموعه‌ای ناتهی از E است که هم باز و هم بسته است. لذا $E = F$ و در نتیجه E مسیری همبند است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیه ۳.۵ فرض می‌کنیم $\{Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های مسیری همبند X باشد،

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \neq \emptyset$$

در این صورت، زیرمجموعه $Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ مسیری همبند است.

اثبات. فرض می‌کنیم $p, q \in Y$ ، در این صورت به‌ازای k و l ای، $p \in Y_k$ و $q \in Y_l$. فرض می‌کنیم $r \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ چون Y_k مسیری همبند است و $p, r \in Y_k$ ، مسیری از p به r مانند f وجود دارد. همچنین مسیری از r به q مانند g موجود است. نگاشت $h = f * g$ را با ضابطه

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، h مسیری از p به q است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

فرع ۲.۵ اگر $n \geq 1$ ، آنگاه $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ مسیری همبند است.

فرع ۳.۵ S^n مسیری همبند است ($n \geq 1$).

قضیه ۴.۵ هر فضای مسیری همبند همبند است.

اثبات. فرض می‌کنیم X مسیری همبند باشد و $X = U \cup V$ که در آن U و V ناتهی و باز هستند. با اختیار دو نقطه یکی از U و دیگری از V ، می‌توانیم مسیری مانند $f : [0, 1] \rightarrow X$ را چنان بیابیم که $f(0) \in U$ و $f(1) \in V$. چون $[0, 1]$ همبند است، $f([0, 1])$ همبند است و در نتیجه $f([0, 1]) \cap U$ و $f([0, 1]) \cap V$ نمی‌توانند مجزا باشند. از اینجا نتیجه می‌گیریم که U و V نمی‌توانند مجزا باشند. لذا X همبند است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

مثال ۴.۵ فرض می‌کنیم X_1 زیرفضایی از \mathbb{R}^2 باشد که به صورت

$$X_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin \frac{1}{x} \right\}$$

تعریف شده است. در این صورت X_1 مسیری همبند است.

مثال ۵.۵ فرض می‌کنیم X_2 زیرفضایی از \mathbb{R}^2 باشد که به صورت

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$$

تعریف شده است. در این صورت X_2 مسیری همبند است.

[شایان توجه است که چون $X_1 \cup X_2 = \overline{X_1}$ ، X_1 و X_2 همبند است، پس فضای $X_1 \cup X_2$ همبند است، اما این فضا مسیری همبند نیست].*

مثال ۶.۵ فرض می‌کنیم \mathbb{C} نمایشگر صفحه مختلط باشد و

$$A = \{i\}$$

و

$$B = [0, 1] \cup \left\{ \left(\frac{1}{n} \right) + iy : n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

فرض می‌کنیم $X = A \cup B$. نشان می‌دهیم X همبند است اما مسیری همبند نیست. به‌ازای $n \in \mathbb{N}$ فرض می‌کنیم

$$B_n = [0, 1] \cup \left\{ \left(\frac{1}{n} \right) + iy : 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

بنابه قضیه ۳.۵، B_n مسیری همبند است و باز هم بنابه همان قضیه، زیرمجموعه B_n همبند است. بنابراین، بنابه قضیه ۴.۵، B همبند است.

فرض می‌کنیم U زیرمجموعه‌ای باز و بسته از X باشد. می‌توانیم فرض کنیم $A \subseteq U$. اگر چنین نباشد، متمم U را که باز و بسته و شامل A است، در نظر می‌گیریم. چون $i \in U$ و U باز است، عدد $r > 0$ چنان موجود است که

$$\{x : |i - x| < r\} \cap X \subseteq U.$$

واضح است که عدد $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که $1/n + i \in U$ ، و لذا $U \cap B \neq \emptyset$. حال

* مثالهای ۴.۵ و ۵.۵ تصحیح شده‌اند و جمله داخل کروشه از مترجم است. م.

توجه کنید که B همبند و $U \cap B$ زیرمجموعه‌ای ناتهی و باز بسته از B است، لذا $U \cap B = B$ و در نتیجه $B \subseteq U$. همچنین $A \subseteq U$ و $X = A \cup B$ ، لذا $X = U$ و در نتیجه X همبند است (در حقیقت، به دست می‌آوریم $B \subseteq X \subseteq \overline{B}$).

حال نشان می‌دهیم X مسیری همبند نیست. بدین منظور، ثابت می‌کنیم تنها مسیری در X که نقطه ابتدایی آن i است، مسیر ثابت (مسیر پوچ) است.

فرض می‌کنیم f مسیری در X با نقطه ابتدایی i باشد. توجه کنید که $f^{-1}(i)$ بسته، و نیز ناتهی است زیرا $i \in f^{-1}(i)$. فرض می‌کنیم G زیرمجموعه‌ای باز از X باشد که به صورت

$$G = X \cap \left\{ Z \in \mathbb{C} : |Z - i| < \frac{1}{4} \right\}.$$

تعریف شده است. اگر $t_0 \in f^{-1}(i)$ ، آنگاه بنابه پیوستگی f ، ε مثبتی چنان وجود دارد که به ازای هر t با ویژگی $|t - t_0| < \varepsilon$ ، $f(t) \in G$ ، می‌خواهیم نشان دهیم

$$f((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1]) = i.$$

بدین منظور، فرض می‌کنیم $|t_1 - t_0| < \varepsilon$ و $f(t_1) \in B \cap G$ اجتماع بازه‌هایی مجزاست، و بازه‌ای که شامل $f(t_1)$ باشد، در G هم باز و هم بسته است. این بازه باز است زیرا G باز است، و بسته است زیرا به ازای یک $n \in \mathbb{N}$ ، این بازه به صورت

$$\left\{ \left(\frac{1}{n} \right) + iy : 0 \leq y \leq 1 \right\} \cap G.$$

است. بنابراین از آنجا که $f((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1])$ همبند است، به تناقض رسیده‌ایم. لذا

$$(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1] \subseteq f^{-1}(i)$$

و این نتیجه نشان می‌دهد که $f^{-1}(i)$ باز است. بنابراین همبندی $[0, 1]$ نتیجه می‌دهد که $f^{-1}(i) = [0, 1]$ ، یعنی $f([0, 1]) = i$. لذا مسیری بین $i \in X$ و نقطه‌ای از $B \subseteq X$ وجود ندارد. بنابراین X مسیری همبند نیست.

۳. مسیره‌های هم‌ارز

تعریف ۲.۵ مسیر f را بسته نامند هرگاه نقاط ابتدایی و انتهایی آن برهم منطبق باشند، یعنی $f(0) = f(1)$.

مثال ۷.۵ مسیر $\bar{f} * f$ بسته است.

مثال ۸.۵ مسیر $\bar{f} * f$ بسته است.

تعریف ۳.۵ مسیرهای f و g در X را هم‌ارز (یا هوموتوپیک) نامند هرگاه f و g نسبت به مجموعه متشکل از \circ و λ ، یعنی نسبت به مجموعه $A = \{\circ, \lambda\}$ هوموتوپیک باشند. هم‌ارزی f و g را به‌طور نمادین با $f \sim g$ نشان می‌دهیم.

در این حالت باید داشته باشیم $f(\circ) = g(\circ)$ ، $f(\lambda) = g(\lambda)$ و نگاشتی پیوسته مانند $F : C \times C \rightarrow X$ چنان موجود باشد که به‌ازای هر $u, v \in C$

$$F(u, \circ) = f(u)$$

$$F(u, \lambda) = g(u)$$

$$F(\circ, v) = f(\circ) = g(\circ)$$

$$F(\lambda, v) = f(\lambda) = g(\lambda).$$

بنابراین می‌بینیم که هرگاه مسیرها هوموتوپیک باشند، نسبت به مجموعه $\{\circ, \lambda\}$ هوموتوپیک هستند. متذکر می‌شویم که با توجه به قضیه ۶.۳ رابطه \sim یک رابطه هم‌ارزی است. رده هم‌ارزی مسیر f را با $[f]$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵.۵ فرض می‌کنیم، f_1, f_2, g_1 و g_2 چنان مسیرهایی باشند که $f_1 \sim g_1$ و $f_2 \sim g_2$. اگر $f_1 * f_2$ موجود باشد، آنگاه $g_1 * g_2$ موجود است و

$$f_1 * f_2 \sim g_1 * g_2.$$

اثبات. چون $f_1 * f_2$ موجود است، $f_1(\lambda) = f_2(\circ)$. همچنین چون $f_1 \sim g_1$ و $f_2 \sim g_2$ داریم $f_1(\lambda) = g_1(\lambda)$ و $f_2(\circ) = g_2(\circ)$. لذا $g_1(\lambda) = g_2(\circ)$ یعنی $g_1 * g_2$ موجود است. چون $f_1 \sim g_1$ ، نگاشتی پیوسته مانند $F : C \times C \rightarrow X$ چنان موجود است که

$$F(u, \circ) = f_1(u), F(u, \lambda) = g_1(u)$$

$$F(\circ, v) = f_2(\circ) = g_2(\circ), F(\lambda, v) = f_1(\lambda) = g_1(\lambda).$$

همچنین چون $f_2 \sim g_2$ ، نگاشتی پیوسته مانند $G: C \times C \rightarrow X$ چنان موجود است که

$$G(u, \circ) = f_2(u), G(u, 1) = g_2(u) \\ G(\circ, v) = f_2(\circ) = g_2(\circ), G(1, v) = f_2(1) = g_2(1).$$

نگاشت $H: C \times C \rightarrow X$ را با ضابطه

$$H(u, v) = F(2u, v) \quad \circ \leq u \leq \frac{1}{2}$$

و

$$H(u, v) = G(2u - 1, v) \quad \frac{1}{2} \leq u \leq 1.$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت بنابه لم ۳.۳، H پیوسته است و

$$H(u, \circ) = f_1(2u) \quad \circ \leq u \leq \frac{1}{2}$$

$$H(u, \circ) = f_2(2u - 1) \quad \frac{1}{2} \leq u \leq 1$$

$$H(u, 1) = g_1(2u) \quad \circ \leq u \leq \frac{1}{2}$$

$$H(u, 1) = g_2(2u - 1) \quad \frac{1}{2} \leq u \leq 1$$

$$H(\circ, v) = F(\circ, v) = f_1(\circ) = g_1(\circ)$$

$$H(1, v) = G(1, v) = f_2(1) = g_2(1).$$

این روابط نشان می‌دهد که $f_1 * f_2 \sim g_1 * g_2$ و بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیه ۶.۵ اگر f و g مسیر باشند و $f \sim g$ ، آنگاه $\bar{f} \sim \bar{g}$.

اثبات. چون $f \sim g$ ، نگاشتی پیوسته مانند $F: C \times C \rightarrow X$ چنان موجود است که

$$F(u, \circ) = f(u), F(u, 1) = g(u)$$

$$F(\circ, v) = f(\circ) = g(\circ)$$

$$F(1, v) = f(1) = g(1).$$

نگاشت $G : C \times C \rightarrow X$ را با ضابطه $G(u, v) = F(1 - u, v)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت G پیوسته است و در روابط زیر صدق می‌کند

$$G(u, \circ) = f(1 - u), G(u, 1) = g(1 - u)$$

$$G(\circ, v) = F(1, v) = f(1) = g(1)$$

$$G(1, v) = F(\circ, v) = f(\circ) = g(\circ)$$

در نتیجه $\bar{g} \sim \bar{f}$ و بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیه ۷.۵ اگر f و g مسیر باشند و $\bar{f} \sim \bar{g}$ آنگاه $f \sim g$.

اثبات را نمی‌آوریم.

قضیه ۸.۵ اگر f مسیری دلخواه و g چنان مسیر پوچی باشد که $f * g$ موجود باشد، آنگاه

$$f * g \sim f$$

اثبات. چون g مسیری پوچ است و $f * g$ موجود است، به‌ازای هر $u \in C$ داریم $g(u) = f(1)$ اگر $F : C \times C \rightarrow X$ را با ضابطه

$$F(u, v) = f\left(\frac{2u}{1+v}\right) \quad \circ \leq u \leq \frac{1+v}{2}$$

و

$$F(u, v) = f(1) \quad \frac{1+v}{2} \leq u \leq 1$$

تعریف کنیم، آنگاه مشاهده می‌کنیم که

$$F(u, \circ) = f(2u) \quad \circ \leq u \leq \frac{1}{2}$$

$$F(u, \circ) = f(1) \quad \frac{1}{2} \leq u \leq 1$$

$$F(\circ, v) = f(\circ), F(1, v) = f(1)$$

و F پیوسته است. لذا $f * g \sim f$.

قضیه ۹.۵ اگر f مسیری پوچ و g چنان مسیر دلخواهی باشد که $f * g$ موجود باشد، آنگاه $f * g \sim g$.

اثبات مشابه با اثبات قضیه قبلی است.

برای یک مسیر مشخص، قضیه زیر برقرار است.

قضیه ۱۰.۵ اگر f مسیری باشد که نقطه ابتدایی آن x و نقطه انتهایی آن y باشد، آنگاه $\varepsilon_x * f \sim f$ و $f * \varepsilon_y \sim f$.

اثبات. نگاشت $F : C \times C \rightarrow X$ را با ضابطه

$$F(u, v) = \begin{cases} x & 0 \leq u \leq (1-v)/2 \\ f(2u - 1 + v)/(1+v) & (1-v)/2 \leq u \leq 1 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، $F(u, 1) = f(u)$ و $F(u, 0) = \varepsilon_x * f$. اکنون به آسانی می‌توان نشان داد که F هموتوپی نسبت به مجموعه $\{0, 1\}$ است. به این طریق، قضیه به اثبات می‌رسد.

بنابر قضایای ۶.۵ و ۷.۵، اگر f و g دو مسیر باشند، آنگاه $f \sim g$ اگر و فقط اگر $\bar{f} \sim \bar{g}$. قضیه بعدی ویژگی حاصلضربهای f و \bar{f} را نشان می‌دهد.

قضیه ۱۱.۵ اگر f مسیری دلخواه باشد، آنگاه $f * \bar{f}$ و $\bar{f} * f$ با مسیرهایی پوچ هموتوپیک هستند.

اثبات. نگاشت $F : C \times C \rightarrow X$ را با ضابطه

$$F(u, v) = \begin{cases} f(2u(1-v)) & 0 \leq u \leq \frac{1}{4} \\ f(2(1-u)(1-v)) & \frac{1}{4} \leq u \leq 1 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که F پیوسته است. به علاوه،

$$F(u, 0) = f(2u) \quad 0 \leq u \leq \frac{1}{4}$$

$$F(u, 0) = f(2 - 2u) \quad \frac{1}{4} \leq u \leq 1$$

$$F(u, 1) = f(0)$$

$$F(0, v) = f(0) = F(1, v).$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $f * \bar{f}$ با مسیر پوچی که نگاره‌اش $f(\circ)$ است، هم‌توییک است. هم‌توییک بودن $f * \bar{f}$ با مسیری پوچ به طریق مشابه نتیجه گرفته می‌شود. با مشخص کردن نقاط ابتدایی و انتهایی، قضیه بعدی را به دست می‌آوریم.

قضیه ۱۲.۵ فرض می‌کنیم f مسیری باشد که نقطه ابتدایی آن x و نقطه انتهایی آن y باشد. در این صورت، $f * \bar{f} \sim \varepsilon_x$ و $\bar{f} * f \sim \varepsilon_y$.

اثبات. در اثبات قضیه فوق قرار دهید $x = f(\circ)$ و $y = f(۱)$.

قضیه ۱۳.۵ اگر f و g و h سه مسیر باشند و $f * g$ و $g * h$ موجود باشند، آنگاه $(f * g) * h$ و $f * (g * h)$ موجودند و

$$(f * g) * h \sim f * (g * h).$$

اثبات. نگاشت $F : C \times C \rightarrow X$ را به صورت

$$F(u, v) = f\left(\frac{4u}{1+v}\right) \quad 0 \leq u \leq \frac{1+v}{4}$$

$$F(u, v) = g(4u - 1 - v) \quad \frac{1+v}{4} \leq u \leq \frac{2+v}{4}$$

$$F(u, v) = h\left(\frac{1 - 4(1-u)}{2-v}\right) \quad \frac{2+v}{4} \leq u \leq 1$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت F پیوسته است و

$$F(u, 0) = f(4u) \quad 0 \leq u \leq 1/4$$

$$F(u, 0) = g(4u - 1) \quad 1/4 \leq u \leq 1/2$$

$$F(u, 0) = h(2u - 1) \quad 1/2 \leq u \leq 1$$

$$F(u, 1) = f(2u) \quad 0 \leq u \leq 1/2$$

$$F(u, 1) = g(4u - 2) \quad 1/2 \leq u \leq 3/4$$

$$F(u, 1) = h(4u - 3) \quad 3/4 \leq u \leq 1$$

فرض می‌کنیم $\alpha = (f * g) * h$ و $\beta = f * (g * h)$. در این صورت

$$F(u, 1) = \beta(u) \quad \text{و} \quad F(u, 0) = \alpha(u)$$

$$F(\circ, v) = f(\circ) = \alpha(\circ)$$

و

$$F(1, v) = h(1) = \beta(1).$$

این روابط نشان می‌دهند که $(f * g) * h \sim f * (g * h)$.

قضیه ۱۴.۵ فرض می‌کنیم f و g چنان مسیرهایی باشند که $f * \bar{g}$ موجود و مسیری بسته باشد. در این صورت، $f * \bar{g}$ هوموتوپیک با مسیری پوچ است اگر و فقط اگر $f \sim g$.

اثبات. وجود $f * \bar{g}$ نتیجه می‌دهد که $f(1) = g(1)$. چون $f * \bar{g}$ بسته است، همچنین داریم $f(\circ) = g(\circ)$.

اگر $f * \bar{g}$ هوموتوپیک با مسیری پوچ باشد، آنگاه بنابه قضایای ۵.۵، ۸.۵ و ۹.۵، $(f * \bar{g}) * g$ هوموتوپیک با g است. همچنین بنابه قضیه ۱۳.۵، $(f * \bar{g}) * g$ هوموتوپیک با مسیر $f * (\bar{g} * g)$ است که این مسیر بنابه قضایای ۸.۵، ۹.۵ و ۱۱.۵ هوموتوپیک با f است. لذا $f \sim g$.

اگر $f \sim g$ ، آنگاه بنابه قضیه ۵.۵، $f * \bar{g} \sim g * \bar{g}$ ، و بنابه قضیه ۱۱.۵، $g * \bar{g}$ هوموتوپیک با مسیری پوچ است. بنابراین $f * \bar{g}$ هوموتوپیک با مسیری پوچ است.

تمرین

۱. فرض کنید در \mathbb{R}^2 ، $A = \{(x, y) : x = \circ, -1 \leq y \leq 1\}$ و $B = \{(x, y) : \circ < x \leq 1, y = \cos \pi/x\}$ نشان دهید مجموعه $F = A \cup B$ همبند است ولی مسیری همبند نیست.

۲. فرض کنید در \mathbb{R}^2 ، $A = \{(x, y) : \circ \leq x \leq 1, y = x/n, n \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{(x, y) : 1/2 \leq x \leq 1, y = \circ\}$ نشان دهید مجموعه $F = A \cup B$ همبند است ولی مسیری همبند نیست.

۳. فرض کنید زیرمجموعه $A \subset X$ زیرمجموعه‌ای مسیری همبند باشد و $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ گردابه‌ای از زیرمجموعه‌های مسیری همبند X باشد که اشتراک هیچ‌یک از آنها با A تهی نیست. نشان دهید مجموعه

$$A \cup \left\{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right\}$$

مسیری همبند است.

۴. فرض کنید \sim رابطه‌ای روی مجموعه نقاط X باشد به طوری که به ازای نقاط $x, y \in X$ ، $x \sim y$ هرگاه مسیری در X چنان موجود باشد که x و y به ترتیب نقاط ابتدایی و انتهایی آن باشند. ثابت کنید \sim رابطه هم‌ارزی است.

۵. فرض کنید f مسیری در X باشد و $g : C \rightarrow C$ نگاشتی پیوسته باشد و $g(0) = 0$ و $g(1) = 1$. نشان دهید $f \sim fg$.

اگر $g(0) = 1$ و $g(1) = 0$ ، نشان دهید $f \sim \bar{f}g$.

۶. اگر f مسیر باشد، ثابت کنید $f * \varepsilon_{f(1)} \sim f * \varepsilon_{f(0)}$.

۷. فرض کنید f و g مسیرهایی از x به y باشند. ثابت کنید $f \sim g$ اگر و فقط اگر $\varepsilon_x * \bar{g} \sim f$.

۸. فرض کنید $1 = u_2 \leq u_1 \leq u_0 = 0$ و f مسیر باشد. مسیره‌های f_1 و f_2 را به صورت

$$f_2(u) = f((1-u)u_1 + uu_2) \quad \text{و} \quad f_1(u) = f((1-u)u_0 + uu_1)$$

تعریف کنید. نشان دهید $f_1 * f_2 \sim f$ (از تمرین ۵ استفاده کنید).

گروه بنیادی

۱. تشکیل یک گروه

فرض می‌کنیم X فضایی توپولوژیک باشد و $x_0 \in X$. مجموعه تمام مسیرهای بسته‌ای را که هر یک با x_0 شروع و به x_0 ختم می‌شوند، در نظر می‌گیریم. x_0 را نقطه پایه (یا نقطه پایه‌ای) تمام این مسیرها می‌نامند و چنین مسیری را گاه «مسیر با پایه x_0 » یا «طوقه با پایه x_0 » می‌نامند [به جای «با پایه x_0 » گاه « x_0 پایه» می‌گوییم]. اگر f مسیری با پایه x_0 باشد، آنگاه رده تمام مسیرهای x_0 پایه را که با f هوموتوپیک باشند، با $[f]$ نمایش می‌دهند و آن را رده هوموتوپی مسیرهای x_0 پایه می‌نامند. گردایه تمام این رده‌های هوموتوپی مسیرهای x_0 پایه را با $\pi_1(X, x_0)$ نمایش می‌دهند.

قضیه ۱.۶. $\pi_1(X, x_0)$ گروه است.

اثبات. حاصلضرب دو رده $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ و $[g] \in \pi_1(X, x_0)$ را به صورت

$$[f][g] = [f * g]$$

تعریف می‌کنیم. تعریف ضرب مستقل از نماینده‌های انتخابی رده‌های $[f]$ و $[g]$ است. زیرا اگر $f \sim f_1, g \sim g_1$ ، آنگاه بنابه قضیه ۵.۵، $f * g \sim f_1 * g_1$ و لذا $[f * g] = [f_1 * g_1] = [f_1][g_1]$. در نتیجه، حاصلضرب $[f][g]$ به‌طور منحصر به‌فردی به‌وسیله $[f]$ و $[g]$ تعیین می‌شود. حال نشان می‌دهیم که تمام اصول گروه برقرارند.

(الف) بنابه تعریف واضح است که $[f][g]$ یک رده هوموتوبی از مسیرهای x_0 پایه است.
(ب) داریم

$$([f][g])[h] = [f * g][h] = [(f * g) * h]$$

و

$$[f]([g][h]) = [f][g * h] = [f * (g * h)].$$

بنابه قضیه ۱۳.۵، $(f * g) * h \sim f * (g * h)$. لذا عمل ضرب شرکت‌پذیر است.
(ج) فرض می‌کنیم $[I]$ نمایشگر رده هوموتوبی مسیر بوج x_0 پایه، یعنی ε_{x_0} باشد. در این صورت، بنابه قضایای ۸.۵ و ۹.۵،

$$[f][I] = [f] = [I][f].$$

لذا $[I]$ عضو یکه (یا همانی) است.

(د) بنابه قضیه ۱۱.۵،

$$[f][\bar{f}] = [f * \bar{f}] = [I].$$

در نتیجه هر عضو یک معکوس دارد.

بنابراین $\pi_1(X, x_0)$ گروه است. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

تعریف ۱.۶ $\pi_1(X, x_0)$ را گروه بنیادی X نسبت به x_0 می‌نامند.

با استفاده از ساختار $\pi_1(X, x_0)$ می‌توانیم سرشت موضعی فضا را در x_0 به‌دست آوریم. به‌عنوان مثال، اگر $\pi_1(X, x_0)$ گروه بدنی باشد، یعنی گروهی که فقط عضو همانی $[I]$ را دارد (که $I = \varepsilon_{x_0}$)، آنگاه هر مسیر x_0 پایه هوموتوبیک با I است و این به‌طور شهودی، به‌عنوان مثال، بدین معناست که «حفره»هایی که مانع از انقباض و تبدیل شدن یک مسیر x_0 پایه به x_0 شوند، وجود ندارند.

در مطالب بالا اگر به‌جای یک مسیر بسته، مسیر دلخواه به‌کار گرفته شود، وجود همانی با مشکل مواجه خواهد شد و همچنین ممکن است ضرب مذکور همواره قابل تعریف نباشد.

۲. یکرختی گروههای بنیادی

قضیه ۲.۶ فرض می‌کنیم $x_0, x_1 \in X$. اگر مسیری از x_0 به x_1 در X وجود داشته باشد، آنگاه گروههای $\pi_1(X, x_0)$ و $\pi_1(X, x_1)$ یکرخت هستند.

اثبات. فرض می‌کنیم f مسیری با پایه x_0 و h مسیری از x_0 به x_1 باشد. در این صورت، نگاشت $g = (\bar{h} * f) * h$ مسیری با پایه x_1 است. فرض می‌کنیم Φ تبدیلی بین رده‌های هموتوپی مسیره‌های x_0 پایه و رده‌های هموتوپی مسیره‌های x_1 پایه باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Phi[f] = [g].$$

واضح است که $\Phi[f]$ به طور منحصر به فردی به وسیله $[f]$ تعیین می‌شود. بالعکس، $[f]$ نیز به طور منحصر به فردی به وسیله $\Phi[f]$ تعیین می‌شود، زیرا اگر

$$(\bar{h} * f_1) * h \sim (\bar{h} * f_2) * h$$

آنگاه بنابه قضایای ۱۱.۵ و ۱۳.۵، $f_1 \sim f_2$. به علاوه، هر مسیر x_1 پایه مانند g هموتوپیک با $\bar{h} * ((h * g) * \bar{h}) * h$ است و لذا هر رده هموتوپی از مسیره‌های x_1 پایه به ازای رده‌ای مانند $[f]$ ، به شکل $\Phi[f]$ است.

بنابراین Φ تبدیلی دوسویی از اعضای $\pi_1(X, x_0)$ به اعضای $\pi_1(X, x_1)$ است. فرض می‌کنیم $[f_1]$ و $[f_2]$ دو عضو از $\pi_1(X, x_0)$ باشند. در این صورت، بنابه قضایای ۱۱.۵ و ۱۳.۵

$$\begin{aligned} \Phi[f_1]\Phi[f_2] &= [(\bar{h} * f_1) * h][(\bar{h} * f_2) * h] \\ &= [(\bar{h} * f_1 * h * \bar{h} * f_2 * h)] \\ &= [(\bar{h} * f_1 * f_2 * h)] \\ &= \Phi[f_1 * f_2] \\ &= \Phi([f_1][f_2]). \end{aligned}$$

بنابراین Φ یکرختی است.

فرض ۱.۶ اگر X فضایی مسیری همبند باشد، آنگاه به ازای هر $x, y \in X$ و $\pi_1(X, y)$ و $\pi_1(X, x)$ یکرخت هستند.

اگر شرط مسیری همبند بودن حذف شود، این حکم برقرار نیست. حتی اگر X همبند باشد، ممکن است حکم برقرار نباشد.

نکته ۱.۶ بنا به فرع فوق، ممکن است این فکر پیش بیاید که x را از $\pi_1(X, x)$ کنار بگذاریم و فقط بنویسیم $\pi_1(X)$ ، اما این کار خطاآفرین است زیرا هیچ «یکریختی کلی متعارفی» بین $\pi_1(X, x)$ و $\pi_1(X, y)$ وجود ندارد زیرا یکریختی Φ کاملاً به مسیر x تا y وابسته است و در نتیجه مسیرهای مختلف از x به y ممکن است یکریختیهای متفاوتی را تولید کنند. به این دلیل، یکریختی Φ مذکور در بالا را می‌توانیم یکریختی حاصل از مسیر h ، از $\pi_1(X, x_0)$ به $\pi_1(X, x_1)$ بنامیم. گاهی بهتر است که این یکریختی را به صورت Φ_h نشان دهیم.

۳. همریختی گروههای بنیادی

اگر X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند، می‌خواهیم ببینیم که تأثیر تبدیلی پیوسته از X به Y بر گروههای بنیادی X و Y چیست. اگر $f: X \rightarrow Y$ پیوسته باشد، آنگاه گروه بنیادی X نسبت به x_0 ممکن است با گروه بنیادی Y نسبت به $f(x_0)$ یکریخت نباشد. لیکن همان‌گونه که قضیه بعدی نشان می‌دهد، یک همریختی بین این گروهها وجود دارد.

قضیه ۳.۶ اگر تبدیل $f: X \rightarrow Y$ پیوسته باشد، آنگاه یک همریختی مانند

$$f^*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

که در آن x_0 نقطه دلخواهی از X است، وجود دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم g و h مسیرهایی با پایه x_0 باشند. نگاشتهای $g, h: C \rightarrow Y$ را به صورت $g_1(u) = f(g(u))$ ، $h_1(u) = f(h(u))$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، به‌ازای هر $u \in C$ هر $g_1(u) = f(g(u))$ و $h_1(u) = f(h(u))$ ، لذا، g_1 و h_1 مسیرهایی بسته در Y با پایه $f(x_0)$ هستند. اگر $g \sim h$ ، نگاشتی پیوسته مانند $F: C \times C \rightarrow X$ چنان موجود است که

$$F(u, \circ) = g(u)$$

$$F(u, \sphericalangle) = h(u)$$

$$F(\circ, v) = g(\circ) = h(\circ) = x_0$$

$$F(\sphericalangle, v) = g(\sphericalangle) = h(\sphericalangle) = x_0$$

حال تابع $G : C \times C \rightarrow Y$ را با ضابطه $G(u, v) = f(F(u, v))$ تعریف می‌کنیم. در این صورت بنابه لم ۱.۳، G پیوسته است و به علاوه

$$G(u, \circ) = f(g(u)) = g_1(u)$$

$$G(u, 1) = f(h(u)) = h_1(u)$$

$$G(\circ, v) = f(x_\circ)$$

$$G(1, v) = f(x_\circ).$$

از اینجا نتیجه گرفته می‌شود که $g_1 \sim h_1$.

حال اگر تعریف کنیم

$$f^*[g] = [fg] \quad (\text{الف})$$

آنگاه f^* تبدیلی از رده‌های هموتوبی مسیرهای x_\circ پایه X به رده‌های هموتوبی مسیرهای (x_\circ) پایه Y است. علاوه بر این، $f^*[g]$ به طور منحصر به فردی به وسیله $[g]$ تعریف می‌شود. لذا f^* به هر عضو از $\pi_1(X, x_\circ)$ عضوی منحصر به فرد از $\pi_1(Y, f(x_\circ))$ را نسبت می‌دهد.

حال می‌توان نتیجه گرفت که $g * h$ مسیری مانند $\rho : C \rightarrow X$ با ضابطه

$$\rho(u) = g(2u) \quad \circ \leq u \leq \frac{1}{2}$$

$$\rho(u) = h(2u - 1) \quad \frac{1}{2} \leq u \leq 1$$

است. از اینجا نتیجه گرفته می‌شود که $f * \rho$ مسیری مانند $\sigma : C \rightarrow Y$ با ضابطه

$$\sigma(u) = f(g(2u)) \quad \circ \leq u \leq \frac{1}{2}$$

$$\sigma(u) = f(h(2u - 1)) \quad \frac{1}{2} \leq u \leq 1$$

است. در حقیقت σ مسیر $g_1 * h_1$ است. بنابراین به دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned} f^*[g]f^*[h] &= [fg][fh] \\ &= [fg * fh] \\ &= [f(g * h)] \\ &= f^*[g * h] \end{aligned}$$

ولذا f^* یک همریختی از $\pi_1(X, x_\circ)$ به $\pi_1(Y, f(x_\circ))$ است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

۴. همریختی القایی

رابطه (الف) بخش قبل نام بخصوصی دارد.

تعریف ۲.۶ همریختی

$$f^* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

با ضابطه $[fg] = f^*[g]$ که در آن f نگاشتی پیوسته از X به Y است، همریختی القایی نامیده می‌شود.

برای همریختی القایی، قضیه زیر را که اثبات آن را نمی‌آوریم، بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۶ (الف) فرض می‌کنیم نگاشتهای $f : X \rightarrow Y$ و $g : Y \rightarrow Z$ پیوسته باشند، در این صورت $(gf)^* = g^*f^*$.

(ب) اگر I نگاشت همانی روی X باشد، آنگاه I^* همریختی همانی روی $\pi_1(X, x)$ است. اینک نشان می‌دهیم تحت شرط خاصی همریختی قضیه ۳.۶ یکریختی است. در واقع، نشان می‌دهیم که اگر f همسانریختی باشد، آنگاه f^* یکریختی است. این موضوع را به صورت نتیجه‌ای از یک حکم کلی به دست می‌آوریم.

قضیه ۵.۶ فرض می‌کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند و نگاشتهای پیوسته‌ای مانند $f : X \rightarrow Y$ و $g : Y \rightarrow X$ موجود باشند به طوری که $g(y_0) = x_0$ ، که x_0 نقطه‌ای از X است و $y_0 = f(x_0)$ ؛ علاوه بر این، gf با نگاشت همانی I_X هوموتوپیک $(\text{rel } x_0)$ و f با نگاشت همانی I_Y هوموتوپیک $(\text{rel } y_0)$ باشد. در این صورت، $\pi_1(X, x_0)$ با $\pi_1(Y, y_0)$ یکریخت است.

اثبات. مطابق تعریف ۲.۶، از نگاشتهای f, g, gf به ترتیب همریختیهای القایی

$$f^* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

$$g^* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$(gf)^* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$(fg)^* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

به دست می‌آید.

فرض می‌کنیم α مسیری با پایه x_0 در X باشد. در این صورت چون $(gf)\alpha = g(y_0) = x_0$ نیز مسیری با پایه x_0 است. اما gf با I_X هوموتوپیک $\pi_1(X, x_0)$ است، لذا $(gf)\alpha$ با α هوموتوپیک است. بنابراین $(gf)^*$ تبدیل همانی از $\pi_1(X, x_0)$ به روی خودش است. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم که $(fg)^*$ تبدیل همانی از $\pi_1(Y, y_0)$ به روی خودش است.

اما بنابه قضیه ۴.۶،

$$(fg)^* = f^*g^* \quad \text{و} \quad (gf)^* = g^*f^*$$

لذا f^*g^* و g^*f^* به ترتیب تبدیلهای همانی $\pi_1(Y, y_0)$ و $\pi_1(X, x_0)$ هستند.

مسیر $(gf)\alpha : C \rightarrow X$ را در نظر می‌گیریم. این مسیر همان مسیر $g(f\alpha) : C \rightarrow X$ است. لذا اگر $f^*[\alpha] = [\beta]$ ، آنگاه

$$g * [\beta] = g^* f^* [\alpha]$$

و چون $g^* f^*$ تبدیل همانی است، به دست می‌آوریم $[\alpha] = g^*[\beta]$. بنابراین اگر $f^*[\alpha_1] = f^*[\alpha_2]$ ، آنگاه $[\beta_1] = [\beta_2]$ و این ایجاب می‌کند $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ ، یعنی f^* تبدیلی یک‌به‌یک است. به طریق مشابهی نتیجه می‌گیریم که g^* نیز تبدیلی یک‌به‌یک است.

به علاوه هر عضو $\pi_1(Y, y_0)$ به صورت $f^*[\gamma]$ است که در آن $[\gamma]$ عضوی از $\pi_1(X, x_0)$ است. بنابراین f^* همریختی پوشاست. در نتیجه f^* یکرختی بین $\pi_1(Y, y_0)$ و $\pi_1(X, x_0)$ است. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم که g^* یکرختی از $\pi_1(Y, y_0)$ به روی $\pi_1(X, x_0)$ است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

فرع ۲.۶ اگر نگاشت $f : X \rightarrow Y$ همسانریختی باشد، آنگاه $\pi_1(X, x_0)$ با $\pi_1(Y, f(x_0))$ یکرخت است.

اثبات. در قضیه قبل فرض کنید f همسانریختی باشد و $g = f^{-1}$.

نکته ۲.۶ کمی بعد قضیه کلی‌تری را ثابت خواهیم کرد.

نکته ۳.۶ فرع ۲.۶ راهی برای رفتن از توپولوژی به جبر به دست می‌دهد. اگر قضیه قبل را تحلیل کنیم، مشاهده می‌کنیم که

(الف) هرگاه یک فضای توپولوژیک (با نقطه‌ای پایه‌ای) در دست باشد، می‌توان یک گروه تشکیل داد (گروه بنیادی)،

(ب) از دو فضای توپولوژیک و یک نگاشت پیوسته بین آنها، یک همریختی بین گروههای بنیادی به دست می‌آید،

(ج) از یک همسانریختی بین فضاها، یک یکرختی القایی به دست می‌آید،

(د) از نگاشت همانی، همریختی القایی همانی به دست می‌آید،

(ه) از ترکیب نگاشتهای پیوسته، یک همریختی القایی مرکب از همریختیهای القایی به دست می‌آید.

عکس نتیجه فوق برقرار نیست، یعنی گروههای بنیادی دو فضا ممکن است یکرخت باشند بدون اینکه آن دو فضا همسانریخت باشند. اما اگر گروههای بنیادی یکرخت نباشند، ممکن نیست فضاها همسانریخت باشند.

متذکر می‌شویم که ویژگیهای (الف) تا (ه) مثالی از یک تابعگون از رسته فضاهای توپولوژیک با نقاط پایه‌ای و نگاشتهای پیوسته‌ای که این نقاط را حفظ می‌کنند به رسته گروهها و همریختیهای گروهها به دست می‌دهند.

قضیه ۶.۶ فرض می‌کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک و نگاشتهای $\phi, \psi : X \rightarrow Y$ پیوسته باشند. همچنین فرض می‌کنیم $f : C \rightarrow Y$ مسیری در Y از $\phi(x_0)$ به $\psi(x_0)$ با ضابطه $f(t) = F(x_0, t)$ باشد. در این صورت، همریختیهای القایی

$$\phi^* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \phi(x_0))$$

و

$$\psi^* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \psi(x_0))$$

به صورت $\psi^* = \Phi_f \phi^*$ با هم ارتباط دارند که در آن Φ_f یکرختی حاصل از مسیر f ، از $\pi_1(Y, \phi(x_0))$ به $\pi_1(Y, \psi(x_0))$ است.

اثبات. با توجه به تعریف نگاشتهای ϕ و ψ در اثبات قضیه ۲.۶ آمده است و نکته پس از آن قضیه، باید نشان دهیم اگر $[g] \in \pi_1(X, x_0)$ ، آنگاه

$$[\psi g] = [\bar{f} * \phi g * f]$$

یعنی باید نشان دهیم که مسیرهای ψg و $\bar{f} * \phi g * f$ هم‌ارزند.

داریم

$$((\bar{f} * \phi g) * f)(t) = \begin{cases} f(1 - 4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \phi g(4t - 1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

که آن را به صورت زیر می نویسیم

$$((\bar{f} * \phi g) * f)(t) = \begin{cases} F(x_0, 1 - 4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(g(4t - 1), 0) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x_0, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

می خواهیم یک هموتوبی بین ψg و $f * \phi g$ بیابیم. بدین منظور ابتدا متذکر می شویم که ψg با $\varepsilon_x * \psi g$ ، که در آن $x = \psi(x_0)$ ، هم ارز است. توجه کنید که مسیر $\varepsilon_x * \psi g$ به صورت زیر است

$$((\varepsilon_x * \psi g) * \varepsilon_x)(t) = \begin{cases} F(x_0, 1) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(g(4t - 1), 1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x_0, 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

لذا نگاشت $H : C \times C \rightarrow Y$ را با ضابطه

$$H(t, s) = \begin{cases} F(x_0, 1 - 4t(1 - s)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(g(4t - 1), s) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x_0, 1 + 2(t - 1)(1 - s)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، H پیوسته است و

$$H(t, \circ) = ((\bar{f} * \phi g) * f)(t)$$

$$H(t, \lambda) = ((\varepsilon_x * \psi g) * \varepsilon_x)(t)$$

$$H(\circ, s) = F(x_\circ, \lambda) = \psi(x_\circ)$$

$$H(\lambda, s) = F(x_\circ, \lambda) = \psi(x_\circ).$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$(\bar{f} * \phi g) * f \sim (\varepsilon_x * \psi g) * \varepsilon_x \sim \psi g$$

و لذا $\Phi_f \phi^* = \psi^*$. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

بنابه مثالهای ۳.۴ و ۴.۴ می‌دانیم که اگر X با Y همسانریخت باشد، آنگاه X و Y یک نوع هوموتوپی دارند، اما عکس این موضوع برقرار نیست. بنابراین، قضیهٔ بعدی تعمیم فرع ۲.۶ است.

قضیهٔ ۷.۶ فرض می‌کنیم X و Y یک نوع هوموتوپی داشته باشند و $\phi : X \rightarrow Y$ هم‌ارزی هوموتوپی باشد. در این صورت به‌ازای هر $x \in X$ ، نگاشت $\phi^* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \phi(x))$ یکرختی است.

اثبات. چون ϕ هم‌ارزی هوموتوپی است، طبق تعریف، نگاشتی پیوسته مانند $\psi : Y \rightarrow X$ چنان وجود دارد که $\psi : Y \rightarrow Y$ هوموتوپیک با I_Y و $\psi\phi : X \rightarrow X$ هوموتوپیک با I_X باشد. بنابه قضیهٔ ۶.۶ نتیجه می‌گیریم که

$$\Phi_f(\psi\phi)^* = I^*.$$

چون Φ_f و I^* یکرختی هستند، نگاشت $(\psi\phi)^* = \psi^*\phi^*$ یکرختی است. لذا ψ^* برورختی و ϕ^* تکرختی است. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم که $\phi^*\psi^*$ یکرختی است و از اینجا نتیجه می‌گیریم که ϕ^* برورختی و ψ^* تکرختی است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

فرع ۳.۶ فضای انقباض‌پذیر گروه بنیادی بدیهی دارد.

برای فضای مسیری همبندی که گروه بنیادی آن بدیهی باشد، اصطلاحی وضع شده است.

تعریف ۳.۶ فضا را ساده‌همبند نامند هرگاه مسیری همبند باشد و گروه بنیادی آن نسبت به هر نقطه‌اش بدیهی باشد.

فرع ۴.۶ فضای انقباض‌پذیر ساده‌همبند است. عکس این مطلب برقرار نیست.

۵. گروههای هوموتوپیی

عضوهای گروههای بنیادی (که رده‌های هوموتوپیی مسیرها هستند) یک‌بعدی در نظر گرفته می‌شوند زیرا مسیرها نگاشتهایی از قسمتی از فضای اقلیدسی یک‌بعدی (یعنی C) هستند. این مفاهیم را به بعد n ، به‌ازای هر $n > 1$ ، تعمیم می‌دهیم. به‌منظور سادگی، این کار را فقط برای گروههای هوموتوپیی مطلق انجام می‌دهیم نه گروههای هوموتوپیی نسبی.

نماد I_n را برای مکعب n بعدی مجهز به توپولوژی طبیعی \mathbb{R}^n به‌کار می‌بریم. مکعب n بعدی متشکل از نقاطی از فضای اقلیدسی n بعدی \mathbb{R}^n مانند (u_1, u_2, \dots, u_n) است که در شرط $0 \leq u_i \leq 1$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، صدق می‌کنند. مرز I_n ، که آن را با J_n نمایش می‌دهیم، اجتماع تمام زیرمجموعه‌هایی از I_n است که یکی از مختصات نقاط متعلق به آنها، یعنی یکی از u_i ها، 0 یا 1 باشد. به‌عنوان مثال، اگر $n = 2$ ، I_2 مربع واحد و J_2 محیط مربع است.

فرض می‌کنیم X فضایی توپولوژیک باشد و نگاشتهای $\phi, \psi: I_n \rightarrow X$ پیوسته باشند و $\psi(J_n) = x_0 = \phi(J_n)$ که در آن x_0 نقطه‌ای ثابت از X است. پس اگر $n = 1$ ، ϕ و ψ مسیرهایی با پایه x_0 هستند. حال نگاشت $\chi: I_n \rightarrow X$ را با ضابطه

$$\chi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \phi(2u_1, u_2, \dots, u_n) \quad 0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2}$$

و

$$\chi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \psi(2u_1 - 1, u_2, \dots, u_n) \quad \frac{1}{2} \leq u_1 \leq 1$$

تعریف می‌کنیم.

در این صورت بنابه لم ۳.۳، χ پیوسته است. علاوه بر این $\chi(J_n) = x_0$. به‌عنوان مثال اگر $n = 1$ ، آنگاه χ حاصلضرب مسیرهایی ϕ و ψ است. اگر $n > 1$ ، می‌نویسیم

$$\chi(u_1, u_2, \dots, u_n) = (\phi + \psi)(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{یعنی } \chi = \phi + \psi$$

(که فقط وقتی $n > 1$ مناسب است).

حال فرض کنیم $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ و نگاشتهایی پیوسته باشند که هر یک I_n ($n > 1$) را به X بنگارد و

$$\alpha(J_n) = \beta(J_n) = \gamma(J_n) = \delta(J_n) = x_0.$$

فرض می‌کنیم $\alpha \sim \gamma$ ($\text{rel } J_n$) در این صورت، نگاشتی پیوسته مانند $F : I_n \times C \rightarrow X$ چنان موجود است که

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, 1) = \gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, y) = x_0$$

که در آن $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in J_n$.

همچنین اگر $\beta \sim \delta$ ($\text{rel } J_n$)، آنگاه نگاشتی پیوسته مانند $G : I_n \times C \rightarrow X$ موجود است که وقتی $y = 0$ برابر با β و وقتی $y = 1$ برابر با δ باشد و $G(J_n \times C) = x_0$. نگاشت $H : I_n \times C \rightarrow X$ را با ضابطه

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = F(x_1, \dots, x_n, y) \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{4}$$

و

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = G(x_1 - \frac{1}{4}, \dots, x_n, y) \quad \frac{1}{4} \leq x_1 \leq 1$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، H پیوسته است و

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = (\alpha + \beta)(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n, 1) = (\gamma + \delta)(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, y) = x_0.$$

بنابراین $\alpha + \beta \sim (\gamma + \delta)$ ($\text{rel } J_n$).

فرض می‌کنیم عدد $n > 1$ عدد طبیعی ثابتی باشد. حال مجموعه تمام رده‌های هوموتوبی ($\text{rel } J_n$) از نگاشتهایی پیوسته مانند $\alpha : I_n \rightarrow X$ را که $\alpha(J_n) = x_0$ در نظر می‌گیریم. مجموع دو رده $[\alpha]$ و $[\beta]$ را به صورت

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]$$

تعریف می‌کنیم.

حاصل این جمع به طور منحصر به فرد معین می‌شود زیرا بنا به تحلیل قبلی اگر $\alpha \sim \gamma$ ($\text{rel } J_n$)

و $\beta \sim \delta(\text{rel } J_n)$ ، آنگاه $\alpha + \beta \sim \gamma + \delta(\text{rel } J_n)$. با این تعریف از عمل جمع دو رده، مجموعه رده‌های هوموتوپي تشکیل گروه می‌دهد، این گروه را با $\pi_n(X, x_0)$ نمایش می‌دهند و گروه هوموتوپي n بعدی X نسبت به x_0 می‌نامند. به قیاس با گروه $\pi_n(X, x_0)$ ، گروه بنیادی $\pi_1(X, x_0)$ را گروه هوموتوپي یک بعدی می‌نامند.

شایان توجه است که اگرچه امکان دارد $\pi_1(X, x_0)$ تعویض پذیر نباشد، اما به ازای هر $n > 1$ ، $\pi_n(X, x_0)$ تعویض پذیر است. برای اثبات تعویض پذیری، خواننده را به منابع سطح بالاتری ارجاع می‌دهیم.

تمرین

۱. فرض کنید $\pi_1(X, x)$ گروه بدیهی باشد. اگر f و g دو مسیر در X باشند با این ویژگی که $f \sim g$ ، نشان دهید $f(1) = g(1)$ و $f(0) = g(0) = x$.
۲. فرض کنید نگاشتهای $\phi, \psi : X \rightarrow Y$ پیوسته و نسبت به $x_0 \in X$ هوموتوپیک باشند. اگر $\phi(x_0) = \psi(x_0)$ ، نشان دهید که هر دو نگاشت ϕ و ψ یک همریختی القایی از $\pi_1(X, x_0)$ به $\pi_1(Y, \phi(x_0))$ تولید می‌کنند.
۳. فرض کنید f مسیری از x به y باشد و نگاشت $\Phi_f : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$ یکرختی حاصل از f باشد. ثابت کنید Φ_f مستقل از f است اگر و فقط اگر $\pi_1(X, x)$ آبلی باشد.
۴. فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک مسیری همبند باشند و $x \in X$ ، $y \in Y$. نشان دهید $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ با حاصلضرب مستقیم گروههای $\pi_1(X, x)$ و $\pi_1(Y, y)$ یکرخت است.
۵. اگر نگاشت $\phi : X \rightarrow Y$ پیوسته و f مسیری از x به y باشد، آنگاه نشان دهید

$$\phi^* \Phi_f = \Phi_{\phi(f)} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \phi(y))$$

- که در آن Φ_f و $\Phi_{\phi(f)}$ یکرختیهای گروههای بنیادی، حاصل از f و $\phi(f)$ هستند.
۶. ثابت کنید گروه بنیادی صفحه تصویری حقیقی گروهی دوری از مرتبه دو است.
 ۷. اگر A یک درون برد دگرذیسی قوی X باشد، نشان دهید نگاشت مشمولیت $i : A \rightarrow X$ ، به ازای هر $a \in A$ ، یکرختی القایی

$$i^* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$$

را تولید می‌کند.

۸. ثابت کنید $\pi_n(X, x_0)$ گروه است.

۹. اگر مسیری از x_0 به x_1 در X موجود باشد، نشان دهید $\pi_n(X, x_0)$ با $\pi_n(X, x_1)$ یکرخت است.

۱۰. اگر نگاشت $\phi: X \rightarrow Y$ پیوسته باشد، نگاشت $\phi^*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, \phi(x_0))$ را تعریف کنید و سپس نشان دهید ϕ^* همریختی است.



گروه بنیادی دایره‌ها

۱. مقدمه

در این فصل می‌خواهیم $\pi_1(X, \cdot)$ را در برخی حالت‌های ساده مشخص کنیم. ابتدا دایره S^1 را بررسی می‌کنیم. در اینجا توپولوژی نسبی را به‌کار می‌بریم. به‌عنوان مثال، برای S^1 توپولوژی القایی حاصل از توپولوژی معمولی روی \mathbb{R}^2 را در نظر می‌گیریم. مجموعه‌های باز S^1 ، اجتماع کمان‌های باز، یعنی کمان‌هایی بدون نقاط انتهایی، هستند. به‌طور کلی، اگر S^n نمایشگر کره n بعدی

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

باشد، آنگاه به S^n توپولوژی القایی حاصل از توپولوژی معمولی \mathbb{R}^{n+1} را نسبت می‌دهیم. حال به دایره S^1 می‌پردازیم. S^1 را به‌صورت گروه اعداد مختلط با قدرمطلق یک در نظر می‌گیریم، یعنی

$$S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

چون S^1 مسیری همبند است (فرع ۳.۵)، تمام گروه‌های بنیادی آن یکریخت هستند (فرع ۱.۶). بنابراین برای مشخص کردن $\pi_1(S^1, \cdot)$ ، هر نقطه‌ای روی S^1 را می‌توانیم به‌کار ببریم. نقطه $e^{i\theta} = 1$

را به عنوان نقطه پایه برای تعیین $\pi_1(S^1)$ انتخاب می‌کنیم. بنابراین، قصد داریم نوع هوموتوپی تمام نگاشتهای پیوسته‌ای مانند $\alpha: C \rightarrow S^1$ را که $\alpha(0) = \alpha(1) = 1 \in S^1$ رده‌بندی کنیم. می‌توانیم وضعیتی را که در اینجا رخ می‌دهد، به‌طور شهودی به‌صورت زیر توصیف کنیم.

اگر مسیر زیر را با پایه ۱ در نظر بگیریم

$$x(t) = \begin{cases} e^{\pi i t} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ e^{\pi i (1-t)} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

مشاهده می‌کنیم که مسیر x از ۱ شروع می‌شود و با پیمودن قسمتی از محیط دایره به S^1 $e^{i\pi/2} = (0, 1) \in S^1$ می‌رسد و سپس جهت حرکت آن معکوس می‌شود و به ۱ باز می‌گردد. این مسیر نمونه شاخص مسیرهایی است که هر یک از ۱ شروع می‌شود، قسمتی از محیط دایره را، بدون اینکه گردش کاملی انجام دهد، طی می‌کند، به نقطه‌ای مانند $e^{i\theta}$ می‌رسد و سپس در جهت عکس به ۱ باز می‌گردد. واضح است که مسیره‌های مختلف ممکن است «سرعت‌های» متفاوتی داشته باشند، ممکن است کمانهای زیادی را بپیمایند و بازگردند و غیره، اما واضح است که این مسیرها با مسیر پوچ ۱ پایه یعنی ε_1 ، هوموتوپیک هستند.

از طرف دیگر، مسیر ۱ پایه زیر

$$y(t) = e^{2\pi i t} \quad t \in C$$

دقیقاً یک دور S^1 را می‌پیماید. این نگاشت با مسیر ε_1 هوموتوپیک نیست و لذا متعلق به یک رده هوموتوپی غیربدیهی است. ممکن است انواع دیگری از مسیره‌های ۱ پایه موجود باشند، مثلاً مسیرهایی که محیط دایره را یک دور کامل می‌پیمایند و بدون اینکه در ۱ توقف کنند به نقطه‌ای مانند $e^{i\theta}$ می‌روند (بدون اینکه برای دومین بار محیط دایره را طی کنند) و سپس به نقطه ۱ باز می‌گردند. پیمودن این کمانهای آخری و باز پیمودن آنها در جهت عکس اصلاً تأثیری در پیمودن محیط دایره ندارد (زیرا این قسمت از مسیر هوموتوپیک با ε_1 است)، در نتیجه چنین مسیرهایی بدین صورت در نظر گرفته می‌شوند که دقیقاً یک دور S^1 را می‌پیمایند.

همچنین می‌توانیم مسیرهایی را (مشابه با مسیر قبل) در نظر بگیریم که به‌جای یک‌بار دقیقاً n بار S^1 را می‌پیمایند. عدد صحیح n را مثبت یا منفی در نظر می‌گیریم بسته به اینکه مسیرها در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت یا در جهت آن حرکت، S^1 را بپیمایند. بنابراین می‌توانیم حدس بزنیم که به‌ازای هر عدد صحیح n ، یک رده هوموتوپی به‌دست می‌آید و لذا می‌توانیم حدس بزنیم که $\pi_1(S^1)$ با گروه اعداد صحیح یکرخت است.

توابع ϕ و ψ بعدی در دنباله بحث مورد نیاز خواهند بود. فرض می‌کنیم ϕ نگاشتی از گروه جمعی اعداد حقیقی \mathbb{R} به S^1 با ضابطه

$$\phi(x) = e^{2\pi i x} \quad x \in \mathbb{R} \text{ هر بازای}$$

باشد. در این صورت، واضح است که ϕ هم‌ریختی است. مشاهده می‌شود که ϕ ، عنصر $1 \in S^1$ را به عنصر $e^{2\pi i \cdot 0} = 1$ می‌نگارد و \mathbb{R} را دور S^1 می‌پیچاند. واضح است که بازه باز $(-1/2, 1/2)$ تحت ϕ با $S^1 - \{-1\}$ همسانریخت است، لذا می‌توانیم فرض کنیم که

$$\psi : S^1 - \{-1\} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

معکوس $\phi|_{(-1/2, 1/2)}$ باشد.

۲. لها

برای به دست آوردن قضیه اصلی این فصل به لهاهای زیر نیاز داریم. اثبات هر دو لم را یکجا ارائه می‌کنیم.

لم ۱.۷ (لم ترفیع). فرض می‌کنیم σ مسیری پایه در S^1 باشد. در این صورت، مسیری منحصر به فرد مانند σ' در \mathbb{R} چنان موجود است که نقطه ابتدایی آن 0 باشد و $\phi\sigma' = \sigma$.
در این حالت می‌گوییم که مسیر σ از طریق ϕ به مسیر σ' در \mathbb{R} ترفیع می‌یابد (و σ' را ترفیع σ به \mathbb{R} می‌نامیم).

فرض می‌کنیم $A = \{0, 1\}$. هرگاه σ و τ مسیرهایی پایه در S^1 باشند، فرض می‌کنیم σ' و τ' مسیرهایی حاصل از σ و τ بر طبق ۱.۷ باشند.

لم ۲.۷ (لم هوموتوپی پوششی). فرض می‌کنیم σ و τ مسیرهایی پایه در S^1 باشند و $F : \sigma \simeq \tau \text{ (rel } A)$. در این صورت نگاشت پیوسته منحصر به فردی مانند $F' : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ چنان موجود است که $\phi F' = F$ و $F' : \sigma' \simeq \tau' \text{ (rel } A)$.

اثبات. فرض می‌کنیم Y نمایشگر C یا $C \times C$ ، $f : Y \rightarrow S^1$ نمایشگر σ یا F باشد و نماد $0 \in Y$ به معنای $0 \in C$ یا $(0, 0) \in C \times C$ باشد. چون Y فشرده است، f روی Y یکنواخت پیوسته است. لذا عدد $\delta > 0$ چنان موجود است که نابرابری $\|y - y'\| < \delta$

نابرابری $\|f(y) = f(y')\| < 1$ را ایجاب کند. چون به‌ازای هر $y \in Y$ ، $\|f(y)\| = 1$ ، اگر $\|y - y'\| < \delta$ ، آنگاه

$$f(y)/f(y') \neq -1 \quad \text{یعنی} \quad f(y) \neq -f(y')$$

بنابراین وقتی $\|y - y'\| < \delta$ ، $\psi(f(y)/f(y'))$ تعریف شده است. فرض می‌کنیم عدد $N > 0$ عددی طبیعی باشد که به‌ازای هر $y \in Y$ ، $\|y\| < N\delta$. در این حالت هر یک از کمیت‌های

$$\left\| y - \frac{N-1}{N}y \right\|, \left\| \frac{N-1}{N}y - \frac{N-2}{N}y \right\|, \dots, \left\| \frac{1}{N}y - 0 \right\|$$

کمتر از δ هستند و لذا کمیت‌های

$$\psi \left[\frac{f(y)}{f\left(\frac{N-1}{N}y\right)} \right], \psi \left[\frac{f\left(\frac{N-1}{N}y\right)}{f\left(\frac{N-2}{N}y\right)} \right], \dots, \psi \left[\frac{f\left(\frac{1}{N}y\right)}{f(0)} \right]$$

تعریف شده هستند.

حال نگاشت $f' : Y \rightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت

$$f'(y) = \psi \left[\frac{f(y)}{f\left(\frac{N-1}{N}y\right)} \right] + \dots + \psi \left[\frac{f\left(\frac{1}{N}y\right)}{f(0)} \right]$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $f'(0) = \psi(1) + \dots + \psi(1) = 0$ و f' پیوسته است. چون ϕ هم‌ریختی است و $\phi\psi = I_{S \setminus \{-1\}}$ ، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \phi f'(y) &= \phi(f'(y)) \\ &= \frac{f(y)}{f\left(\frac{N-1}{N}y\right)} \cdot \frac{f\left(\frac{N-1}{N}y\right)}{f\left(\frac{N-2}{N}y\right)} \cdot \dots \cdot \frac{f\left(\frac{1}{N}y\right)}{f(0)} \\ &= \frac{f(y)}{f(0)} = f(y) \end{aligned}$$

یعنی $\phi f' = f$ که نتیجه مطلوب است.

حال ثابت می‌کنیم که f' منحصر به فرد است. فرض می‌کنیم نگاشت $f'' : Y \rightarrow \mathbb{R}$ نیز در $f''(\circ) = f$ و $f''(\circ) = \circ$ صدق کند. در این صورت، $f' - f''$ پیوسته است و با استفاده از تعریف ϕ نتیجه می‌گیریم که اگر $y_0 \in Y$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \phi(f'(y_0) - f''(y_0)) &= \frac{\phi(f'(y_0))}{\phi(f''(y_0))} \\ &= \frac{f(y_0)}{f(y_0)} = 1 \end{aligned}$$

لذا $f' - f''$ را به هسته ϕ ، یعنی به اعداد صحیح می‌نگارد. چون Y همبند و $f' - f''$ پیوسته است، پس $f' - f''$ نگاشتی ثابت است. چون $f'(\circ) = f''(\circ) = \circ$ پس $f' - f''$ متحد با صفر است، و لذا منحصر به فرد بودن f' ثابت می‌شود.

به این ترتیب، لم ۱.۷ به اثبات می‌رسد. برای تکمیل اثبات لم ۲.۷، فرض می‌کنیم

$$Y = C \times C, f = F, f' = F'$$

باید نشان دهیم

$$F' : \sigma' \simeq \tau'(\text{rel } A).$$

مشاهده می‌کنیم که $F'(x, \circ)$ نگاشتی از C به \mathbb{R} است. چون $\phi F' = F$ ، با استفاده از

لم ۱.۷ داریم

$$\phi(F'(x, \circ)) = F(x, \circ) = \sigma(x) = \phi(\sigma'(x))$$

$$\text{و به علاوه } F'(\circ, \circ) = \sigma'(\circ) = \circ.$$

با استفاده از حکم منحصر به فرد بودن مسیر مذکور در لم ۱.۷ برای $F'(x, \circ) = \sigma'(x)$ را به‌ازای هر $x \in C$ ، به‌دست می‌آوریم. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $x \in C$ ، $F'(x, 1) = \tau'(x)$. اثبات نسبی بودن هوموتوپی از اینجا حاصل می‌شود که

$$F'|\{\circ\} \times C \quad \text{و} \quad F'|\{1\} \times C$$

هر دو ثابت هستند. لذا هر دو لم ثابت می‌شوند.

۳. قضیه اصلی

حال قضیه اصلی این فصل را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱.۷ گروه بنیادی دایره S^1 ، یعنی $\pi_1(S^1)$ با گروه جمعی اعداد صحیح \mathbb{Z} یکرخت است. نکته ۱.۷ همان‌گونه که در مقدمه دیدیم، می‌توانیم $\pi_1(S^1)$ را نسبت به هر نقطه از S^1 مشخص کنیم. این کار را برای $e^{i\theta} = 1$ انجام می‌دهیم.

اثبات. فرض می‌کنیم σ مسیری پایه در S^1 باشد. بنابه لم ترفیع (لم ۱.۷)، σ را به مسیر σ' در \mathbb{R} با نقطه ابتدایی 0 چنان ترفیع می‌دهیم که $\phi\sigma' = \sigma$. ممکن است مسیر σ' مسیر 0 پایه نباشد، یعنی ممکن است $\sigma'(1) = 0$ نباشد. اما چون $\phi\sigma' = \sigma$ ، $\sigma'(1)$ باید متعلق به هسته ϕ باشد، یعنی $\sigma'(1) \in \mathbb{Z}$. عدد صحیح $\sigma'(1)$ تعداد دفعاتی است که محیط S^1 به‌طور کامل توسط هر عضو $[\sigma]$ پیموده می‌شود (این پیمایش در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است اگر $\sigma'(1)$ مثبت، و در جهت آن حرکت است اگر $\sigma'(1)$ منفی باشد).

اگر τ مسیر پایه دیگری در S^1 باشد که $\tau \simeq \sigma \pmod{\text{rel } A}$ ، آنگاه بنابه لم ۲.۷، $\tau' \simeq \sigma' \pmod{\text{rel } A}$ و لذا $\tau'(1) = \sigma'(1)$ ، یعنی عدد صحیح $\sigma'(1)$ مستقل از عضو σ رده $[\sigma]$ است و در نتیجه نگاشت

$$f : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$$

را با ضابطه $f([\sigma]) = \sigma'(1)$ به‌ازای هر $[\sigma] \in \pi_1(S^1, 1)$ می‌توانیم تعریف کنیم. واضح است که نگاشت f خوش‌تعریف است. می‌خواهیم نشان دهیم که f یکرختی است. برای استنتاج اینکه f هم‌ریختی است، فرض می‌کنیم رده‌های $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(S^1, 1)$ چنان باشند که $\sigma'(1) = m$ و $\tau'(1) = n$. در این صورت

$$f([\sigma]) + f([\tau]) = m + n$$

و با در نظر گرفتن \mathbb{R} به‌صورت گروه جمعی، باید نشان دهیم

$$f([\sigma][\tau]) = m + n.$$

حال متذکر می‌شویم که

$$f([\sigma][\tau]) = f(\sigma * \tau) = (\sigma * \tau)'(1)$$

که در آن $(\sigma * \tau)'$ مسیری در \mathbb{R} با نقطه ابتدایی 0 است که ترفیع $\sigma * \tau$ است. نگاشت τ'' را به‌صورت

$$\tau''(t) = \tau'(t) + m$$

تعریف می‌کنیم، در این صورت τ'' مسیری در \mathbb{R} از m تا $m+n$ است. لذا $\sigma' * \tau''$ مسیری در \mathbb{R} از 0 تا $m+n$ است. حال داریم

$$\phi(\sigma' * \tau'') = (\phi\sigma') * (\phi\tau'') = \sigma * \tau$$

و از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\sigma' * \tau''$ ترفیع $\sigma * \tau$ به \mathbb{R} است، یعنی

$$(\sigma * \tau)' = \sigma' * \tau''.$$

بنابراین $(\sigma * \tau)'(1) = (\sigma' * \tau'')(1) = m + n$ و لذا

$$f([\sigma][\tau]) = m + n$$

و از این برای نتیجه می‌گیریم که f هم‌ریختی است.

با استفاده از اینکه \mathbb{R} انقباض‌پذیر است (به تمرین ۲ فصل ۴ رجوع کنید)، می‌توانیم نشان دهیم که $\ker f = [I]$ ، که در آن $[I]$ ردهٔ هموتوپی مسیر ε_1 است و از اینجا نتیجه می‌گیریم که f دوسویی است. بنابراین f یک‌ریختی است و لذا قضیه به اثبات می‌رسد.

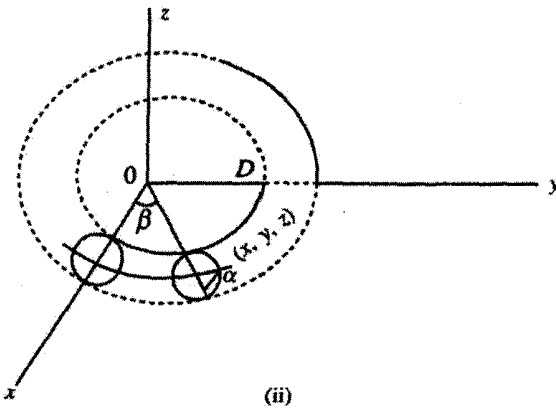
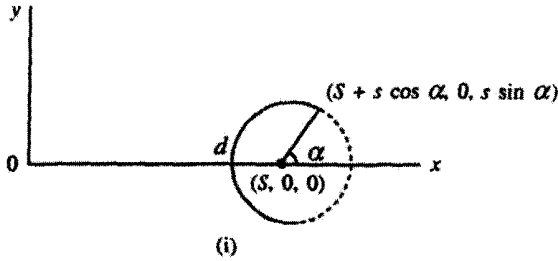
۴. چنبره

دایره‌ای در صفحهٔ xz از \mathbb{R}^3 به شعاع $s > 0$ و به مرکز $(S, 0, 0)$ ، که $S > s$ ، در نظر می‌گیریم. مختصات هر نقطه از محیط دایره، به‌ازای α مناسبی از بازهٔ $[0, 2\pi]$ ، به‌صورت $(S + s \cos \alpha, 0, s \sin \alpha)$ است. اگر این دایره را حول محور z ‌ها دوران دهیم، رویه‌ای به‌دست می‌آید که چنبره نامیده می‌شود.

متذکر می‌شویم که به‌ازای هر نقطه از محیط دایره، مقادیر $x^2 + y^2$ و z در هنگام دوران ثابت باقی می‌مانند. فرض می‌کنیم (x, y, z) نقطهٔ دلخواهی روی چنبره و β زاویه‌ای باشد که دایره به اندازهٔ آن دوران داده شده است تا به این نقطه برسد. در این صورت، $x = (S + s \cos \alpha) \cos \beta$ ، $y = (S + s \cos \alpha) \sin \beta$ و $z = s \sin \alpha$ ، که در آن $(S + s \cos \alpha, 0, s \sin \alpha)$ نقطه‌ای روی دایرهٔ اولیه است که پس از دورانی به اندازهٔ زاویهٔ β ، به (x, y, z) می‌رسد.

حال نگاشت $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را با ضابطهٔ

$$f(\alpha, \beta) = ((S + s \cos \alpha) \cos \beta, (S + s \cos \alpha) \sin \beta, s \sin \alpha)$$



شکل ۱.۷

تعریف می‌کنیم و خاطر نشان می‌کنیم که چنبره نگاره مربع

$$[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] = \{(\alpha, \beta) : 0 \leq \alpha \leq 2\pi, 0 \leq \beta \leq 2\pi\}$$

تحت f است. واضح است که f پیوسته است و لذا چنبره فشرده است.

قضیه ۲.۷ گروه بنیادی چنبره با $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ یکریخت است.

اثبات از قضیه ۱.۷ و تمرین ۴ (فصل ششم) حاصل می‌شود.

۵. دو کاربرد

برای اینکه کاربردی بلاواسطه را ارائه کرده باشیم، قضیه بعدی را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۳.۷ دایره S^1 درون برد قرص B^2 نیست.

اثبات. بالعکس، فرض می‌کنیم یک درون‌بری مانند

$$r : B^2 \rightarrow S^1$$

موجود باشد. لذا $ri = I_{S^1}$. بنا به قضیه ۴.۶،

$$r^*i^* = I^* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$$

و لذا I^* یک‌به‌یک است. بنابراین $\pi_1(S^1, 1)$ با زیرگروهی از $\pi_1(B^2, 1)$ یکرخت است. اما B^2 انقباض‌پذیر است (بنا به تمرین ۲ فصل ۴) و لذا $\pi_1(B^2, 1)$ بدیهی است (یعنی تنها عضو آن همانی است) (فرع ۳.۶ را ببینید) و $\pi_1(S^1, 1)$ با \mathbb{Z} یکرخت است. از اینجا به تناقض می‌رسیم و لذا قضیه ثابت می‌شود.

نکته ۲.۷ این اثبات را نمی‌توان برای S^n و B^{n+1} ($n > 1$) به‌کار برد.

برای عرضه کاربرد دوم، نیاز داریم تا درجه مسیر را تعریف کنیم. فرض می‌کنیم σ مسیری در S^1 با پایه ۱ باشد و $\sigma' : C \rightarrow \mathbb{R}$ ترفیع منحصر به فرد آن باشد (لم ۱.۷). در اثبات قضیه ۱.۷ مشاهده کردیم که $\sigma'(1)$ عددی صحیح است. این عدد $\sigma'(1)$ را درجه σ می‌نامند. چون مسیرهای هم‌ارز ترفیعی هم‌ارز دارند، درجه مسیرهای هم‌ارز یکی است.

قضیه ۴.۷ هر چند جمله‌ای مختلط غیر ثابت حداقل یک ریشه دارد.

اثبات. بدون اینکه خللی به کلیت مسأله وارد شود، می‌توانیم فرض کنیم چند جمله‌ای مورد نظر چند جمله‌ای

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{k-1}z^{k-1} + z^k$$

باشد، که در آن $k \geq 1$. فرض می‌کنیم $P(z)$ ریشه نداشته باشد. تابع

$$G : C \times [0, \infty) \rightarrow S^1 \subseteq C \times C$$

را با ضابطه

$$G(t, r) = \frac{P(r \exp(\imath \pi i t))}{|P(r \exp(\imath \pi i t))|} \times \frac{|P(r)|}{P(r)}$$

و تابع $F : C \times C \rightarrow S^1$ را با ضابطه

$$F(t, s) = \begin{cases} G\left(t, \frac{s}{1-s}\right) & 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s < 1 \\ \exp(\imath \pi i k t) & 0 \leq t \leq 1, s = 1 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. چون G پیوسته است، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 1} F(t, s) &= \lim_{s \rightarrow 1} G(t, s/1 - s) = \lim_{r \rightarrow \infty} G(t, r) \\ &= (\exp(\imath \pi i t))^k\end{aligned}$$

و لذا F نیز پیوسته است. همچنین نتیجه می‌گیریم که F یک هموتوبی $(\text{rel } A)$ بین $f_0(t) = F(t, 0)$ و $f_1(t) = F(t, 1)$ است. بنابراین، $f_0 \sim f_1$ و لذا بنابه استنتاج قبل از قضیه، $\deg(f_0) = \deg(f_1)$. اما $\deg(f_0) = 0$ و $\deg(f_1) = k$. بنابراین به تناقض می‌رسیم (مگر اینکه $k = 0$) و لذا قضیه ثابت می‌شود.

تمرین

۱. نشان دهید $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$ گروهی تک‌عضوی است.

۲. نشان دهید $\pi_1(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, 0)$ یک نوع هموتوبی دارند و نتیجه بگیرید که $\pi_1(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, 0)$ گروهی تک‌عضوی است.

۳. فرض کنید X صفحهٔ سفتهٔ $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ باشد. نشان دهید $\pi_1(X)$ با \mathbb{Z} یکرخت است.

۴. نشان دهید گروه بنیادی کره از یک عضو، یعنی همانی، تشکیل می‌شود. (زیرا تمام مسیرهای بسته با یک مسیر پوچ هموتوپیک هستند.)

۵. فرض کنید $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$ و γ مسیر S^1 $\{f(t) : t \in C\} \subseteq S^1$ باشد. فرض کنید

$$\omega(f) = \frac{1}{\imath \pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

نشان دهید که

(الف) $\omega(f)$ عددی صحیح است؛

(ب) $\omega(f) = \deg(f)$ ؛

(ج) $\omega(f)$ مستقل از انتخاب $[f] \in \pi_1(S^1)$ است.

۶. نگاشت $\mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1)$ را با ضابطهٔ (درجهٔ α) $\rightarrow [\alpha]$ در نظر بگیرید. با استفاده از تعریف ثابت کنید که این نگاشت یک هم‌ریختی از $\pi_1(S^1)$ به گروه جمعی اعداد صحیح است.

۷. نشان دهید گروه بنیادی $\pi_1(S^1, 1)$ یک گروه دوری نامتناهی است که توسط ردهٔ $[f]$ تولید می‌شود، که در آن

$$f(t) = (\cos \imath \pi t, \sin \imath \pi t) \quad 0 \leq t \leq 1.$$

۸. نشان دهید $\pi_1(S^1 \times \mathbb{R})$ با \mathbb{Z} یکرخت است.



فضاهای پوششی

۱. تعاریف

مفهوم فضاهای پوششی مفهوم بسیار مهمی در مبحث فضاهای توپولوژیک است که کاربردهایی در مباحث وابسته مانند هندسهٔ دیفرانسیل، نظریهٔ گروه‌های لی و نظریهٔ سطوح ریمان یافته است. این مفهوم ارتباط نزدیکی نیز با مطالعهٔ گروه بنیادی دارد. مسائل توپولوژیک مختلفی دربارهٔ فضاهای پوششی را می‌توان به مسائل جبری در گروه‌های بنیادی فضاهای مربوط تبدیل کرد. ابتدا تعریف فضای پوششی را عرضه می‌کنیم.

تعریف ۱.۸ فرض می‌کنیم \tilde{X} و X دو فضای توپولوژیک باشند و $p: \tilde{X} \rightarrow X$ نگاشتی پیوسته باشد. می‌گوییم زیرمجموعهٔ باز $U \subseteq X$ توسط p به‌طور هموار پوشانده می‌شود هرگاه $p^{-1}(U)$ اجتماع زیرمجموعه‌های باز مجزایی از \tilde{X} باشد و هر یک از این زیرمجموعه‌های باز \tilde{X} به‌طور همسانریخت توسط p به روی U نگاشته شوند. نگاشت $p: \tilde{X} \rightarrow X$ را نگاشت پوششی یا تصویرگر پوششی می‌نامند هرگاه هر $x \in X$ همسایگی بازی داشته باشد که به‌طور هموار توسط p پوشانده شود. \tilde{X} را فضای پوششی و X را فضای پایهٔ نگاشت پوششی $p: \tilde{X} \rightarrow X$ می‌نامند. این تعریف در واقع معادل تعریف زیر است.

تعریف ۲.۸ نگاشت $p: \tilde{X} \rightarrow X$ را نگاشت پوششی نامند هرگاه
(الف) p پوشا باشد، و

(ب) اگر $x \in X$ ، همسایگی باز U از x چنان موجود باشد که

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$$

که در آن U_j ها زیرمجموعه‌های بازی از \tilde{X} هستند و به‌ازای هر $j, k \neq j$ ، $U_j \cap U_k = \emptyset$ و به‌ازای هر $j \in J$ ، نگاشت $p|_{U_j}: U_j \rightarrow U$ همسانریختی است.

مثال ۱.۸ نگاشت $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ را با ضابطه $p(t) = e^{2\pi i t}$ تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم $x + iy$ نقطه‌ای روی S^1 باشد. در این صورت، نقطه متقارن آن $-x + i(-y)$ است. فرض می‌کنیم $U = S^1 - \{-x + i(-y)\}$. در این صورت، $p^{-1}(U)$ متشکل از اجتماع تمام بازه‌های باز به طول یک و مراکز $\text{arc sin } x$ ($1/2\pi$) است و هر یک از این بازه‌ها تحت p به‌طور همسانریخت به روی U نگاشته می‌شوند. لذا p تصویرگر پوششی و \mathbb{R} فضای پوششی S^1 است.

مثال ۲.۸ هر همسانریختی تصویرگر پوششی است.

مثال ۳.۸ فرض می‌کنیم نگاشت $p: \tilde{X} \rightarrow X$ تصویرگر متعارف باشد و $\tilde{X} = X \times Y$ که Y فضایی گسسته است. در این صورت، p تصویرگر پوششی است.

مثال ۴.۸ فرض می‌کنیم n عدد صحیح مثبت باشد و نگاشت $p: S^1 \rightarrow S^1$ را با ضابطه $p(z) = z^n$ در نظر می‌گیریم. به‌ازای هر $z \in S^1$ ، مجموعه $\{z\} - S^1$ به‌طور هموار توسط p پوشانده می‌شود. بنابراین، p تصویرگر پوششی است.

مثال ۵.۸ فرض می‌کنیم n عدد صحیح مثبت باشد، و

$$\tilde{X} = \{z: z \in \mathbb{C}: 0 < |z| < r\}, \quad X = \{z: z \in \mathbb{C}: 0 < |z| < r^n\}$$

$$\text{و } p(z) = z^n$$

در این صورت، p تصویرگر پوششی است.

مثال ۶.۸ فرض می‌کنیم $X = \mathbb{R}^2$ ، $M = S^1 \times S^1$ (چنبره)، و به‌ازای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ،

$$p(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}).$$

در این صورت، p تصویرگر پوششی است.

۲. همسانریختی موضعی

تعریف ۳.۸ فرض می‌کنیم $f: Y \rightarrow X$ تابع باشد. در این صورت، f را همسانریختی موضعی می‌نامند هرگاه هر نقطه $y \in Y$ یک همسایگی باز داشته باشد که به‌طور همسانریخت توسط f به روی زیرمجموعه‌ی بازی از X نگاشته شود.

نکته ۱.۸ اگر f همسانریختی موضعی باشد، هر یک از نقاط Y یک همسایگی با ویژگی فوق دارد. بنابراین، لم زیر برقرار است.

لم ۱.۸ هر همسانریختی موضعی نگاشتی باز است.

لم ۲.۸ هر نگاشت پوششی یک همسانریختی موضعی است.

اثبات. فرض می‌کنیم $p: \tilde{X} \rightarrow X$ نگاشت پوششی باشد و $\tilde{x} \in \tilde{X}$. همچنین فرض می‌کنیم U همسایگی بازی از $p(\tilde{x})$ باشد که به‌طور هموار توسط p پوشانده شود. طبق تعریف

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$$

که در آن به‌ازای هر j و k متفاوت $U_j \cap U_k = \emptyset$ و هر U_j به‌طور همسانریخت توسط p به روی U نگاشته می‌شود. فرض می‌کنیم \tilde{U} آن مجموعه‌ی بازی از $\{U_j\}_{j \in J}$ باشد که شامل \tilde{x} است. در این صورت، \tilde{U} همسایگی بازی از \tilde{x} با این ویژگی است که $p|_{\tilde{U}}$ یک همسانریختی از \tilde{U} به روی U است. بنابراین p همسانریختی موضعی است.

لیکن، همان‌گونه که مثال بعدی نشان می‌دهد، همسانریختی موضعی ممکن است نگاشت پوششی نباشد.

مثال ۷.۸ فرض می‌کنیم نگاشت $p_1: (\circ, 3) \rightarrow S^1$ تحدید نگاشت $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ با ضابطه $p(t) = e^{2\pi i t}$ به بازه‌ی باز $(\circ, 3)$ باشد. چون p نگاشتی پوششی است (مثال ۱.۸ را ببینید)، بنابه لم ۲.۸، p همسانریختی موضعی است و لذا تحدید آن به مجموعه‌ی باز $(\circ, 3)$ ، یعنی p_1 همسانریختی موضعی است. p_1 پوشا نیز هست. اما چون عدد مختلط $1 \in S^1$ هیچ همسایگی که به‌طور هموار توسط p_1 پوشانده شود ندارد، p_1 نگاشت پوششی نیست.

واضح است که هر نگاشت پوششی پوشاست و لذا با استفاده از لمهای فوق فرع زیر را به‌دست می‌آوریم.

فرع ۱.۸ فرض مى‌کنیم $p : \tilde{X} \rightarrow X$ نگاشت پوششى باشد. در اين صورت، X يك فضاى خارج قسمتى \tilde{X} است.

۳. G -فضا

نشان خواهيم داد که G -فضا با شرط خاصى فضاى پوششى است. براى اين منظور، به چند تعريف و لم احتياج داريم.

تعريف ۴.۸ فرض مى‌کنيم X مجموعه و G گروه باشد. در اين صورت، گویند G روى X عمل مى‌کند يا X ، G -مجموعه است هرگاه نگاشتى از $G \times X$ به X ، که با $(g, x) \rightarrow g \cdot x$ (نمایشگر يك عمل است) نمايش داده مى‌شود، چنان موجود باشد که

$$(الف) \text{ به‌ازاى هر } x \in X, e \cdot x = x;$$

$$(ب) \text{ به‌ازاى هر } x \in X \text{ و هر } g, h \in G, g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x;$$

که در آن e عضو همانى G است.

مثال ۸.۸ فرض مى‌کنيم X فضايى توپولوژيك باشد و $G(X)$ مجموعه تمام همسانريختهاى $f : X \rightarrow X$ باشد. در اين صورت، واضح است که $G(X)$ گروه است. به‌ازاى هر $g \in G$ و $x \in X$ فرض مى‌کنيم $g \cdot x = g(x)$ در اين صورت،

$$e \cdot x = e(x) = x$$

و

$$g \cdot (h \cdot x) = g \cdot h(x) = g(h(x))$$

$$= (gh)x = (gh) \cdot x.$$

بنابراين، G روى X عمل مى‌کند.

لم ۳.۸ فرض مى‌کنيم X ، G -مجموعه باشد. در اين صورت اگر $g \in G$ ، تابع $\theta_g : X \rightarrow X$ با ضابطه $x \rightarrow g \cdot x$ دوسويى است.

اثبات. از تعريف نتيجه مى‌شود

$$\theta_e = I_X \quad \text{و} \quad \theta_g \theta_h = \theta_{gh}$$

بنابراين، $\theta_g \theta_{g^{-1}} = I_X = \theta_{g^{-1}} \theta_g$ و لذا θ_g دوسويى است.

تعریف ۵.۸ فرض می‌کنیم G روی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت مدار x ، زیرمجموعه

$$G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$$

از X است.

لم ۴.۸ دو مدار $G \cdot x$ و $G \cdot y$ یا مجزا هستند یا برابرند.

اثبات به خواننده واگذار می‌شود.

فرض می‌کنیم G روی X عمل کند. یک رابطه هم‌ارزی \sim روی X به صورت

$$x \sim y \text{ اگر و فقط اگر عنصر } g \in G \text{ چنان موجود باشد که } g \cdot x = y$$

تعریف می‌کنیم. چون مدارهای $G \cdot x$ و $G \cdot y$ یا مجزا هستند یا برابر (لم ۴.۸)، رابطه فوق را می‌توان به صورت

$$x \sim y \text{ اگر و فقط اگر } y \in G \cdot x$$

نوشت. مجموعه رده‌های هم‌ارزی را مجموعه خارج قسمتی X به G می‌نامیم و با X/G نمایش می‌دهیم. واضح است که نگاشتی پوشا از X به X/G وجود دارد. لذا اگر X فضایی توپولوژیک باشد که G روی آن عمل کند، آنگاه می‌توانیم یک توپولوژی خارج قسمتی روی X/G در نظر بگیریم. در این صورت، X/G را فضای خارج قسمتی X به G (نسبت به نگاشت پوشای فوق) می‌نامیم.

مثال ۹.۸ اگر \mathbb{Z} روی \mathbb{R} به صورت $n \cdot x = n + x$ عمل کند، آنگاه \mathbb{R}/\mathbb{Z} ، S^1 است.

تعریف ۶.۸ فرض می‌کنیم X فضای توپولوژیک و G گروه باشد. در این صورت، X را G -فضا نامند هرگاه G روی X عمل کند و به ازای هر $g \in G$ ، تابع θ_g با ضابطه $x \rightarrow g \cdot x$ پیوسته باشد.

لم ۵.۸ فرض می‌کنیم X ، G -فضا باشد. در این صورت، تصویرگر متعارف

$$\pi : X \rightarrow X/G$$

نگاشتی باز است.

اثبات. فرض می‌کنیم زیرمجموعه $V \subseteq X$ باز باشد. در این صورت،

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(\pi(V)) &= \{x \in X : \pi(x) \in \pi(V)\} \\
&= \{x \in X : G \cdot x = G \cdot y, \text{ به‌ازای عضو } y \text{ ای از } V\} \\
&= \{x \in X : x = g \cdot y, \text{ به‌ازای عضو } y \text{ ای از } V \text{ و عضو } g \text{ ای از } G\} \\
&= \{x \in X : x \in g \cdot V, \text{ به‌ازای عضو } g \text{ ای از } G\} \\
&= \bigcup_{g \in G} g \cdot V.
\end{aligned}$$

بنابه تعریف G -فضا و لم ۳.۸، عمل هر g از G یک همسانریختی است. لذا چون V باز است، $\pi^{-1}(\pi(V))$ باز است و از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\pi(V)$ در X/G باز است.

تعریف ۷.۸ فرض می‌کنیم X, G -فضا باشد. عمل G روی X را ناپیوسته سره نامند هرگاه به‌ازای هر $x \in X$ ، یک همسایگی باز از x مانند V چنان موجود باشد که به‌ازای هر $g, g_1 \in G$ که $g \cdot V \cap g_1 \cdot V = \emptyset, g \neq g_1$

واضح است که اگر عملی ناپیوسته سره باشد، آنگاه به‌ازای هر $g \in G$ ، که $g \neq e$ ، و هر $x \in X$ ، $g \cdot x \neq x$.

حال می‌توانیم قضیه‌ای درباره‌ی G -فضاها عرضه کنیم.

قضیه ۱.۸ فرض می‌کنیم X, G -فضا باشد. اگر عمل G روی X ناپیوسته سره باشد، آنگاه تصویرگر متعارف

$$\pi : X \rightarrow X/G$$

پوششی است.

اثبات. از تعاریف و مطلبی که قبل از مثال ۹.۸ آورده شد، نتیجه می‌شود که π نگاشتی پوشا و پیوسته است و بنابه لم ۵.۸، π نگاشتی باز است. فرض می‌کنیم $x \in X$ و V یک همسایگی باز x باشد که در شرط ناپیوستگی سره صدق می‌کند. لذا $\pi(V)$ باز است و یک همسایگی از $G \cdot x = \pi(x)$ است. به‌علاوه

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot V$$

که در آن اعضای مجموعه $\{g \cdot V : g \in G\}$ زیرمجموعه‌های باز مجزایی از X هستند. علاوه بر این نگاشت

$$\pi|_{g \cdot V} : g \cdot V \rightarrow \pi(V)$$

نگاشت باز دوسویی پیوسته است و لذا همسانریختی است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

مثال ۱۰.۸ نگاشت $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ نگاشتی پوششی است.

در این مثال که به جای G گروه جمعی \mathbb{Z} را قرار داده‌ایم، مشاهده می‌کنیم که عمل \mathbb{Z} روی \mathbb{R} با ضابطه $x \rightarrow x + n$ ناپیوسته سره است زیرا اگر $x \in \mathbb{R}$ و $0 < \varepsilon < 1/2$ ، آنگاه همسایگی باز $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ از x ، در شرط بیان شده صدق می‌کند و با این عمل \mathbb{Z} روی \mathbb{R} ، \mathbb{R} به \mathbb{Z} -فضا تبدیل می‌شود، و بنابراین نگاشت

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

نگاشتی پوششی خواهد بود.

۴. ویژگیهای نگاشت پوششی

قضیه ۲.۸ هر نگاشت پوششی مانند $p : \tilde{X} \rightarrow X$ باز است.

اثبات. فرض می‌کنیم زیرمجموعه $V \subseteq \tilde{X}$ باز باشد. نشان می‌دهیم $p(V)$ در X باز است. فرض می‌کنیم $x \in p(V)$ ، بنابه تعریف، یک همسایگی باز U مانند x موجود است که به‌طور هموار پوشانده می‌شود. فرض می‌کنیم $\tilde{x} \in p^{-1}(x) \cap V$ از آنجا که

$$\tilde{x} \in p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$$

U_j ای در \tilde{X} هست که $\tilde{x} \in U_j$. همچنین چون $U_j \cap V$ در U_j باز، و $p|_{U_j}$ یک همسانریختی از U_j به روی U است (بنابه تعریف)، نتیجه می‌گیریم که $p(U_j \cap V)$ زیرمجموعه باز U است. U در X باز است و لذا $p(U_j \cap V)$ در X باز است. چون

$$x \in p(U_j \cap V) \subseteq p(V)$$

پس $p(V)$ در X باز است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیه ۳.۸ اگر $p : \tilde{X} \rightarrow X$ یک نگاشتی پوششی باشد، آنگاه X توپولوژی خارج‌قسمتی نسبت به p دارد.

اثبات. چون p نگاشت باز پیوسته است، زیرمجموعه U از X باز است اگر و فقط اگر $p^{-1}(U)$ باز باشد.

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که نگاشت پوششی برای فضایی موضعاً همبند را می‌توان به نگاشت‌هایی پوششی برای مؤلفه‌های فضا تقلیل داد.

قضیهٔ ۴.۸ اگر X موضعاً همبند باشد، آنگاه نگاشت پیوستهٔ $p: \tilde{X} \rightarrow X$ نگاشتی پوششی است اگر و فقط اگر برای هر مؤلفهٔ H از X ، نگاشت

$$p|_{p^{-1}(H)}: p^{-1}(H) \rightarrow H$$

نگاشتی پوششی باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم p نگاشتی پوششی و H مؤلفه‌ای از X باشد. همچنین فرض می‌کنیم $x \in H$ و U یک همسایگی باز x باشد که به‌طور هموار توسط p پوشانده می‌شود. اگر V مؤلفه‌ای از U شامل x باشد، آنگاه چون X موضعاً همبند است، V در X و در نتیجه در H باز است. همچنین واضح است که V به‌طور هموار توسط $p|_{p^{-1}(H)}$ پوشانده می‌شود. بنابراین $p|_{p^{-1}(H)}$ نگاشتی پوششی است.

بالعکس، فرض می‌کنیم برای هر مؤلفهٔ H از X ، نگاشت $p|_{p^{-1}(H)}: p^{-1}(H) \rightarrow H$ نگاشتی پوششی باشد. اگر $x \in H$ ، فرض می‌کنیم U همسایگی بازی از x در H باشد که به‌طور هموار توسط $p|_{p^{-1}(H)}$ پوشانده می‌شود. همچنین از آنجا که X موضعاً همبند است، H در X باز است. لذا U در X باز است و روشن است که به‌طور هموار توسط p پوشانده می‌شود. بنابراین، p نگاشتی پوششی است. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

حال مفهوم ترفیع (مذکور در لم ۱.۷) را که در آن از نگاشت پوششی $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ استفاده شد (مثال ۱ فصل ۸ را ببینید)، به نوع دیگری از نگاشت‌های پوششی تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۸.۸ فرض می‌کنیم نگاشت $p: \tilde{X} \rightarrow X$ پوششی و نگاشت $f: Y \rightarrow X$ پیوسته باشد. در این صورت، ترفیع f نگاشت پیوسته‌ای مانند $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ است که $p\tilde{f} = f$ در لم بعدی می‌بینیم که اگر ترفیعی موجود باشد، منحصر به فرد است.

لم ۶.۸ فرض می‌کنیم نگاشت $p: \tilde{X} \rightarrow X$ پوششی و نگاشت‌های $f_1, f_2: Y \rightarrow \tilde{X}$ دو ترفیع $f: Y \rightarrow X$ باشند. به‌علاوه فرض می‌کنیم Y همبند و عضو $y_0 \in Y$ چنان موجود باشد که $f_1(y_0) = f_2(y_0)$. در این صورت، $f_1 = f_2$.

اثبات. مجموعهٔ Y_1 را به‌صورت

$$Y_1 = \{y \in Y : f_1(y) = f_2(y)\}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، Y_1 ناتهی است زیرا $y_0 \in Y_1$. ثابت می‌کنیم Y_1 هم باز و هم بسته است. اگر $y \in Y$ ، آنگاه همسایگی بازی مانند V از $f(y)$ موجود است که به طور هموار توسط p پوشانده می‌شود، و لذا بنابه تعریف،

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{j \in J} V_j$$

که به ازای $i \neq j$ ، $V_j \cap V_i = \emptyset$ و به ازای هر j ، نگاشت $p|_{V_j} : V_j \rightarrow V$ همسانریختی است. اگر $y \in Y_1$ ، آنگاه به ازای k ای، $f_1(y) = f_2(y) \in V_k$. نشان می‌دهیم که مجموعه

$$F = f_1^{-1}(V_k) \cap f_2^{-1}(V_k)$$

همسایگی بازی از y و زیرمجموعه‌ای از Y_1 است.

بدین منظور، فرض می‌کنیم $x \in F$. در این صورت، $f_1(x), f_2(x) \in V_k$ و همچنین $pf_1(x) = pf_2(x)$. چون نگاشت $p|_{V_k}$ همسانریختی است، پس $f_1(x) = f_2(x)$. به این ترتیب نتیجه می‌گیریم که هر نقطه Y_1 یک نقطه Y_1 درونی است و لذا Y_1 باز است. اگر $y \notin Y_1$ ، آنگاه به ازای k و l که $f_1(y) \in V_k$ ، $f_2(y) \in V_l$ و $k \neq l$ ، به طریقی مشابه می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموعه

$$f_1^{-1}(V_k) \cap f_2^{-1}(V_l)$$

یک همسایگی باز y است که در متمم Y_1 قرار دارد. لذا Y_1 بسته نیز هست. چون Y همبند است، نتیجه می‌گیریم که $Y_1 = Y$ و بنابراین $f_1 = f_2$. به این ترتیب لم به اثبات می‌رسد.

۵. گروه بنیادی فضای پوششی

این فصل را با قضیه‌ای درباره گروه بنیادی فضای پوششی به پایان می‌رسانیم.

قضیه ۵.۸. فرض می‌کنیم نگاشت $p : \tilde{X} \rightarrow X$ پوششی و فضای \tilde{X} مسیری همبند باشد و $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$. در این صورت، مسیری مانند f در X از $p(\tilde{x}_0)$ به $p(\tilde{x}_1)$ چنان موجود است که

$$\Phi_f p^* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p^* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1).$$

نکته. در اینجا Φ_f یکرختی حاصل از f (نکته ۱.۶ را ببینید) و p^* همریختی القایی است (تعریف ۲.۶ را ببینید).

اثبات. فرض می‌کنیم g مسیری در \tilde{X} از \tilde{x}_0 به \tilde{x}_1 باشد. در این صورت، با استفاده از نتیجه ۱.۶ یک یکرختی مانند Φ_g از $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ به $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ به دست می‌آید. لذا

$$\Phi_g \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1).$$

حال اثر همریختی القایی p^* را بر طرفین رابطه فوق در نظر می‌گیریم

$$p^* \Phi_g \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p^* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1).$$

با استفاده از تمرین ۵ (فصل ۶) به سادگی درمی‌یابیم که

$$p^* \Phi_g = \Phi_{pg} p^*.$$

لذا اگر بنویسیم $f = pg$ ، آنگاه f مسیری در X از $p(\tilde{x}_0)$ به $p(\tilde{x}_1)$ است و رابطه مورد نیاز را از بالا به دست می‌آوریم. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

تمرین

۱. فرض کنید H زیرگروهی از گروه G با عمل $*$ باشد. اگر $h \in H$ و $g \in G$ ، فرض کنید $h \cdot g$ همان $h * g$ باشد. نشان دهید که به این ترتیب عملی برای H روی G تعریف می‌شود (یعنی با این تعریف، H روی G عمل می‌کند).

۲. فرض کنید G گروه و $S(G)$ نمایشگر رده تمام زیرمجموعه‌های G باشد. ثابت کنید با تعریف

$$g \cdot U = gU = \{gh : h \in U, g \in G, U \subseteq S(G)\}$$

G روی $S(G)$ عمل می‌کند.

۳. فرض کنید X ، G -فضا باشد. ثابت کنید به ازای هر $g \in G$ ، تابع θ_g با ضابطه $x \rightarrow g \cdot x$ یک همسانریختی از X به خودش است.

۴. فرض کنید G گروهی متناهی و X یک G -فضا باشد. نشان دهید تصویرگر متعارف

$$\pi : X \rightarrow X/G$$

نگاشتی بسته است.

۵. فرض کنید نگاشت $p : \tilde{X} \rightarrow X$ نگاشتی پوششی باشد و $X_0 \subseteq X$. فرض کنید

$$\tilde{X}_0 = p^{-1}(X_0).$$

نشان دهید نگاشت $p_0 : \tilde{X}_0 \rightarrow X_0$ که در آن $p_0(x) = p(x)$

نگاشتی پوششی است.

۶. فرض کنید نگاشتهای $q: \tilde{Y} \rightarrow Y$ و $p: \tilde{X} \rightarrow X$ نگاشتهایی پوششی باشند. نشان دهید نگاشت

$$p \times q: \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y$$

نگاشتی پوششی است.

۷. فرض کنید نگاشت $p: \tilde{X} \rightarrow X$ پوششی و فضای \tilde{X} مسیری همبند باشد، و $p(\tilde{x}_0) = x_0$. نشان دهید p همسانریختی است اگر و فقط اگر

$$p^* \pi_1(X, x_0) = \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

تاربندی

۱. تعاریف

این فصل را با مسألهٔ مهمی دربارهٔ ویژگی ترفیع شروع می‌کنیم. در ذیل تعریفی کلی عرضه می‌کنیم. فضاهای توپولوژیک را با حروف بزرگی مانند X, B, E نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۹ فرض می‌کنیم $p : E \rightarrow B$ و $f : X \rightarrow B$ نگاشت باشند. اگر نگاشتی پیوسته مانند $f' : X \rightarrow E$ چنان موجود باشد که $pf' = f$ ، آنگاه می‌گوییم f را می‌توان به E ترفیع داد، و f' را ترفیع f (به E) می‌نامیم.

تعریف بعدی برای عرضهٔ مفهوم تاربندی مورد نیاز است.

تعریف ۲.۹ فرض می‌کنیم $p : E \rightarrow B$ نگاشت باشد. در این صورت، می‌گویند p ویژگی ترفیع هوموتوپی نسبت به فضای X دارد هرگاه به‌ازای هر

$$F : X \times C \rightarrow B \quad \text{و} \quad f' : X \rightarrow E$$

با ویژگی $x \in X, F(x, \circ) = p(f'(x))$ نگاشتی مانند

$$F' : X \times C \rightarrow E$$

با این ویژگی موجود باشد که به ازای هر $x \in X$ و $F'(x, \circ) = f'(x)$ و $pF' = F$.

نکته ۱.۹ فرض می‌کنیم نگاشت $p: E \rightarrow B$ دارای ویژگی ترفیع هوموتوپی نسبت به X باشد و نگاشتهای $f_1, f_2: X \rightarrow B$ هوموتوپیک باشند، در این صورت f_1 قابل ترفیع به E است اگر و فقط اگر f_2 قابل ترفیع به E باشد. حال می‌توانیم تعریف تاربندی را ارائه دهیم.

تعریف ۳.۹ نگاشت $p: E \rightarrow B$ را تاربندی می‌نامند هرگاه p نسبت به هر فضای X دارای ویژگی ترفیع هوموتوپی باشد. تاربندی را برخی اوقات فضای تار هوروچ^1 می‌نامند. فضای E را فضای کلی و B را فضای پایه تاربندی p می‌نامند.

تعریف ۴.۹ اگر نگاشت $p: E \rightarrow B$ تاربندی باشد، آنگاه به ازای هر $b \in B$ و $p^{-1}(b)$ را تار روی b می‌نامند.

مثال ۱.۹ فرض می‌کنیم $p: B \times F \rightarrow B$ نگاشت تصویرگر باشد. در این صورت، p تاربندی است. به علاوه به ازای هر $b \in B$ ، تار روی b با F همسانریخت است. همان‌گونه که قضیه بعدی نشان می‌دهد، از تاربندی می‌توان برای ترفیع مسیری در B به مسیری در E استفاده کرد.

قضیه ۱.۹ اگر $p: E \rightarrow B$ تاربندی باشد، آنگاه هر مسیر f در B با ویژگی $f(\circ) \in p(E)$ را می‌توان به مسیری در E ترفیع داد.

اثبات. فرض می‌کنیم P فضایی تک‌نقطه‌ای باشد. f را به صورت یک هوموتوپی مانند $f: P \times C \rightarrow B$ در نظر می‌گیریم که در آن نقطه $e_0 \in E$ با ویژگی $p(e_0) = f(\circ)$ متناظر با نگاشتی مانند $P \rightarrow E$ است به طوری که به ازای $\alpha \in P$ و $p(f(\alpha)) = f(\alpha, \circ)$ ، چون p تاربندی است، ویژگی ترفیع هوموتوپی دارد و لذا مسیری مانند g در E چنان موجود است که $g(\circ) = e_0$ و $pg = f$. بنابراین، g ترفیع f است. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

۲. ترفیع مسیری منحصر به فرد

خاصیتی از نگاشت پوششی را که در لم ۶.۸ حاصل شد، گاهی ویژگی ترفیع منحصر به فرد نگاشت پوششی می‌نامند.

تعریف ۵.۹ گویند نگاشت $p: E \rightarrow B$ ترفیع مسیری منحصر به فرد دارد هرگاه برای مسیره‌های f و g در E که $pf = pg$ و $f(\circ) = g(\circ)$ داشته باشیم $f = g$.

لم ۱.۹ هر نگاشت پوششی ترفیع مسیری منحصر به فرد دارد.

اثبات از لم ۶.۸ حاصل می‌شود.

لم ۲.۹ فرض می‌کنیم نگاشت $p: E \rightarrow B$ ترفیع مسیری منحصر به فرد داشته باشد. در این صورت، p برای فضاهای مسیری همبند ویژگی ترفیع مسیری منحصر به فرد دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم Y مسیری همبند باشد و نگاشتهای $f, g: Y \rightarrow E$ چنان نگاشتهایی باشند که $pf = pg$ ، و عضو $y_0 \in Y$ چنان باشد که $f(y_0) = g(y_0)$. باید نشان دهیم که $f = g$. فرض می‌کنیم y عضو دلخواهی از Y و h مسیری در Y باشد که نقاط ابتدایی و انتهایی آن به ترتیب y_0 و y باشند. دو مسیر fh و gh را در E در نظر می‌گیریم. هر دو مسیر ترفیع یک مسیر در B هستند و نقطه شروع هر دو یکی است. چون p ترفیع مسیری منحصر به فرد دارد، نتیجه می‌گیریم که $fh = gh$. بنابراین

$$f(y) = (fh)(\backslash) = (gh)(\backslash) = g(y).$$

چون عضو $y \in Y$ دلخواه است، $f = g$ و بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیه بعدی ارتباطی را بین تاریندی و ترفیع مسیری منحصر به فرد نشان می‌دهد.

قضیه ۲.۹ یک تاریندی مفروض ترفیع مسیری منحصر به فرد دارد اگر و فقط اگر هیچ‌یک از تارهای آن مسیر غیر پوچ نداشته باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم نگاشت $p: E \rightarrow B$ یک تاریندی با ترفیع مسیری منحصر به فرد، b عضوی از B ، و f مسیری در تار $p^{-1}(b)$ باشد. فرض می‌کنیم g مسیر پوچی در $p^{-1}(b)$ باشد به طوری که $f(\circ) = g(\circ)$. در این صورت، $pf = pg$ و از اینجا نتیجه می‌گیریم $f = g$ و لذا f مسیری پوچ است.

بالعکس، فرض می‌کنیم $p: E \rightarrow B$ چنان تاریندی باشد که هیچ‌یک از تارهای آن مسیر غیر پوچ نداشته باشد، و f و g مسیرهایی در E باشند به طوری که $pf = pg$ و $f(\circ) = g(\circ)$.

فرض می‌کنیم $t \in C$ و h_t مسیری در E با ضابطه

$$h_t(x) = \begin{cases} f((1 - 2x)t) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ g((2x - 1)t) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

باشد.

بدین ترتیب مسیر h_t در E از $f(t)$ به $g(t)$ را چنان به دست آورده‌ایم که ph_t مسیری بسته در B باشد که با مسیر پوچ با پایه $p(f(t))$ نسبت به C هموتوپیک باشد. بنابه ویژگی ترفیع هموتوپیی p ، نگاشت $F' : C \times C \rightarrow E$ چنان موجود است که داشته باشیم

$$F'(t', \circ) = h_t(t')$$

و F' مجموعه $(1 \times C) \cup (C \times 1) \cup (\circ \times C)$ را به تار $p^{-1}(p(f(t)))$ بنگارد. بنابه فرض، $p^{-1}(p(f(t)))$ مسیر غیر پوچ ندارد. بنابراین F' مجموعه‌های $\circ \times C$ و $C \times 1$ و $1 \times C$ را به یک نقطه تنها می‌نگارد و این ایجاب می‌کند که $F'(1, \circ) = F'(\circ, \circ)$. بنابراین

$$f(t) = g(t) \quad \text{و} \quad h_t(\circ) = h_t(1)$$

به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

اثبات قضایای بعدی را، که برای تاربندها برقرارند ولی هیچ‌یک برای نگاشتهای پوششی برقرار نیستند، نمی‌آوریم.

قضیه ۳.۹ ترکیب تاربندهایی که ترفیع مسیری منحصر به فرد دارند، یک تاربندهی با ترفیع مسیری منحصر به فرد است.

قضیه ۴.۹ حاصلضرب تاربندهایی که ترفیع مسیری منحصر به فرد دارند، یک تاربندهی با ترفیع مسیری منحصر به فرد است.

۳. تاربندها و مسیرهای هم‌ارز

اکنون قضیه اساسی تاربندهایی را که ترفیع مسیری منحصر به فرد دارند به صورت زیر ارائه می‌کنیم.

قضیه ۵.۹ فرض می‌کنیم نگاشت $p : \tilde{X} \rightarrow X$ یک تاربندهی با ترفیع مسیری منحصر به فرد باشد، f و g مسیرهایی در \tilde{X} باشند به طوری که $f(\circ) = g(\circ)$ و $pf \sim pg$ در این صورت، $f \sim g$.

اثبات. فرض می‌کنیم $A = \{ \circ, \backslash \}$ و نگاشت $F : C \times C \rightarrow X$ یک هوموتوبی نسبت به A بین pf و pg باشد. بنابراین، بنا به تعریف هوموتوبی نسبی

$$\begin{aligned} F(t, \circ) &= p(f(t)), & F(t, \backslash) &= p(g(t)) \\ F(\circ, t) &= p(f(\circ)), & F(\backslash, t) &= p(f(t)). \end{aligned}$$

چون p تار بندی است، ویژگی ترفیع هوموتوبی دارد و لذا نگاشت $\tilde{X} : C \times C \rightarrow \tilde{X}$ چنان موجود است که

$$F'(t, \circ) = f(t), \quad pF' = F.$$

لذا $F'(\circ \times C)$ و $F'(\backslash \times C)$ به ترتیب در $p^{-1}(p(f(\circ)))$ و $p^{-1}(p(f(\backslash)))$ قرار دارند. بنابراین، بنا به قضیه ۲.۹، $F'(\circ \times C)$ و $F'(\backslash \times C)$ تک نقطه‌ای هستند.

در نتیجه F' یک هوموتوبی نسبت به A بین f و مسیر h ای است که $h(\circ) = f(\circ)$ و $ph = pg$. حال $f(\circ) = g(\circ)$ و لذا بنا به ویژگی ترفیع مسیری منحصر به فرد p نتیجه می‌گیریم که $g = h$ و $F' : f \sim g$ و $g = h$ به اثبات می‌رسد.

۴. نگاشت پوششی و تار بندیها

قضیه بعدی نشان می‌دهد که هر نگاشت پوششی ویژگی ترفیع هوموتوبی دارد.

قضیه ۶.۹ فرض می‌کنیم $p : \tilde{X} \rightarrow X$ نگاشتی پوششی باشد. در این صورت، p تار بندی است.

اثبات. فرض می‌کنیم نگاشتهای $f' : Y \rightarrow X$ و $F' : Y \times C \rightarrow X$ چنان نگاشتهایی باشند که به ازای هر $y \in Y$ ، $F'(y, \circ) = p(f'(y))$ ، باید نشان دهیم به ازای هر $y \in Y$ ، همسایگی بازی از y مانند N_y در Y و نگاشتی مانند $\tilde{X} : N_y \times C \rightarrow \tilde{X}$ چنان موجودند که

$$pF'_y = F'|_{N_y \times C} \quad \text{و} \quad F'_y(y', \circ) = f'(y'), \quad y' \in N_y$$

موقتاً فرض می‌کنیم وجود چنین همسایگیها و نگاشتهایی محرز باشد.

اگر $y'' \in N_y \cap N_{y'}$ ، آنگاه $F'_y|_{y'' \times C}$ و $F'_{y'}|_{y'' \times C}$ نگاشتهایی از فضای $y'' \times C$ که همبند است، به \tilde{X} هستند به طوری که به ازای هر $t \in C$

$$p(F'_y|_{y'' \times C})(y'', t) = F(y'', t) = p(F'_{y'}|_{y'' \times C})(y'', t).$$

حال داریم

$$(F'_y|y'' \times C)(y'', \circ) = f'(y'') = (F'_{y'}|y'' \times C)(y'', \circ).$$

بنابراین، از لم ۶.۸ نتیجه می‌شود

$$F'_y|y'' \times C = F'_{y'}|y'' \times C.$$

واضح است که این برابری به‌ازای هر $y'' \in N_y \cap N_{y'}$ برقرار است. لذا

$$F'_y|(N_y \cap N_{y'}) \times C = F'_{y'}|(N_y \cap N_{y'}) \times C.$$

این برابری نشان می‌دهد که نگاشتی پیوسته مانند $\tilde{X} : Y \times C \rightarrow \tilde{X}$ چنان موجود است که $F'(y, \circ) = f'(y)$ ، $y \in Y$ است و به‌ازای هر F' ترفیعی از F و $F'|N_y \times C = F'_{y'}$ بنابراین، اثبات قضیه به ساختن نگاشتهای $F'_{y'}$ و همسایگیهای باز N_y باز می‌گردد.

چون p نگاشتی پوششی و C فشرده است، پس اگر $y \in Y$ همسایگی بازی از y مانند N_y و دنباله‌ای متناهی از نقاط C مانند $1 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ آنگاه $i = 1, 2, \dots, m$ در مجموعه بازی از X که به‌طور هموار توسط p پوشانده می‌شود، قرار گیرد. ثابت می‌کنیم نگاشتی مانند $\tilde{X} : N_y \times C \rightarrow \tilde{X}$ با ویژگیهای مورد نیاز موجود است.

بدین منظور می‌خواهیم نگاشتهایی مانند $\tilde{X} : N_y \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \tilde{X}$ را، به‌ازای $i = 1, 2, \dots, m$ تعریف کنیم به‌طوری که

$$pG_i = F|N_y \times [t_{i-1}, t_i]$$

$$G_1(y', \circ) = f'(y') \quad y' \in N_y$$

$$G_{i-1}(y', t_{i-1}) = G_i(y', t_{i-1}) \quad y' \in N_y$$

متذکر می‌شویم که اگر چنین نگاشتهایی پیدا شوند، نگاشتی مانند

$$F'_y : N_y \times C \rightarrow \tilde{X}$$

وجود دارد به‌طوری که $G_i = F'_y|N_y \times [t_{i-1}, t_i]$ ، $i = 1, 2, \dots, m$ و در این صورت واضح است که F'_y ویژگیهای مورد نیاز را دارد. لذا بالاخره باید نگاشتهای G_i را بسازیم و در این صورت، اثبات به اتمام خواهد رسید.

نگاشتهای G_i را به استقرا روی i می‌سازیم. ابتدا نگاشت G_1 را می‌سازیم. بدین‌منظور، فرض می‌کنیم U زیرمجموعه‌ی بازی از X باشد که به‌طور هموار توسط p پوشانده شود، و $F(N_y \times [t_0, t_1]) \subseteq U$ همچنین فرض می‌کنیم

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \tilde{U}_j$$

که در آن \tilde{U}_j ها زیرمجموعه‌های مجزا و بازی از \tilde{X} هستند به‌طوری که به‌ازای هر j ، نگاشت p مجموعه‌ی \tilde{U}_j را به‌طور همسانریخت به روی U می‌نگارد. اگر

$$V_j = f'^{-1}(\tilde{U}_j)$$

آنگاه V_j ها مجموعه‌های باز مجزایی هستند که N_y را می‌پوشانند. حال نگاشت G_1 را نگاشت منحصر به‌فردی تعریف می‌کنیم که به‌ازای هر j ، مجموعه‌ی $V_j \times [t_0, t_1]$ را به \tilde{U}_j می‌نگارد و ترفیع $F|_{V_j \times [t_0, t_1]}$ است. به این ترتیب G_1 تعریف می‌شود.

حال فرض می‌کنیم به‌ازای $1 < i \leq m$ ، G_{i-1} تعریف شود. فرض می‌کنیم U' زیرمجموعه‌ی بازی از X باشد که به‌طور هموار توسط p پوشانده شود و

$$F(N_y \times [t_{i-1}, t_i]) \subseteq U'.$$

فرض می‌کنیم $U' = \bigcup_k \tilde{U}'_k$ که در آن \tilde{U}'_k ها زیرمجموعه‌های مجزای بازی از \tilde{X} هستند به‌طوری که به‌ازای هر k ، نگاشت p مجموعه‌ی \tilde{U}'_k را به‌طور همسانریخت به روی U' می‌نگارد. فرض می‌کنیم

$$V'_k = \{y' \in N_y : G_{i-1}(y', t_{i-1}) \in \tilde{U}'_k\}.$$

در این‌صورت، $\{V'_k\}$ گردآبه‌ای از مجموعه‌های باز مجزاست که N_y را می‌پوشانند. حال G_i را نگاشت منحصر به‌فردی تعریف می‌کنیم که به‌ازای هر k ، مجموعه‌ی $V'_k \times [t_{i-1}, t_i]$ را به \tilde{U}'_k می‌نگارد و ترفیع $F|_{V'_k \times [t_{i-1}, t_i]}$ است. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

تمرین

۱. نشان دهید قضیه ۳.۹ برای نگاشتهای پوششی برقرار نیست.
۲. نشان دهید قضیه ۴.۹ برای نگاشتهای پوششی برقرار نیست.

۳. فرض کنید نگاشت $p : E \rightarrow B$ تاریندی باشد. ثابت کنید $p(E)$ اجتماع مؤلفه‌هایی مسیری همبند از B است.

۴. فرض کنید که یک تاریندی پایه مسیری همبند داشته باشد و یکی از تارها مسیری همبند باشد. ثابت کنید فضای کلی آن نیز مسیری همبند است.

۵. فرض کنید نگاشت $p : E \rightarrow B$ تاریندی باشد، $e_0 \in E$ ، $b_0 = p(e_0)$ ، و $F = p^{-1}(b_0)$. فرض کنید B ساده همبند باشد. نشان دهید نگاشت $\pi_1(F, e_0) \rightarrow \pi_1(E, e_0)$ بر رویختی است.

۶. فرض کنید نگاشت $p : E \rightarrow B$ تاریندی باشد، $b_0 \in p(E)$ ، و E ساده همبند باشد. ثابت کنید نگاشتی دوسویی بین $\pi_1(B, b_0)$ و مجموعه مؤلفه‌های مسیری همبند $p^{-1}(b_0)$ موجود است.

سادک هندسی و مجتمع

در این فصل ویژگیهای اساسی سادک هندسی و مجتمع سادکی را بررسی می‌کنیم. این ویژگیها در صورت‌بندی نظریهٔ مانستگی سادکی مفیدند.

۱. مجموعهٔ هندسی مستقل

تعریف ۱.۱۰ زیرمجموعهٔ H^p از \mathbb{R}^n ($p \leq n$) را ابرصفحهٔ p بعدی \mathbb{R}^n می‌نامند هرگاه مجموعهٔ خطی مستقل $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ ، $a_i \in \mathbb{R}^n$ ، و نقطهٔ $a_0 \in \mathbb{R}^n$ چنان موجود باشند که

$$H^p = \left\{ x : x \in \mathbb{R}^n, x = a_0 + \sum_{i=1}^p t_i a_i, t_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

مجموعهٔ $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ زیرفضایی خطی از \mathbb{R}^n ، مثلاً V را تولید می‌کند و لذا می‌توانیم بنویسیم

$$H^p = a_0 + V$$

و در نتیجه H^p متشکل از تمام بردارهایی به شکل $a_0 + v$ است که در آن $v \in V$.

تعریف ۲.۱۰ مجموعه $s = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ متشکل از $p + 1$ نقطه از \mathbb{R}^n را از لحاظ هندسی مستقل یا هندسی مستقل نامند هرگاه p بردار $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_p - a_0$ خطی مستقل باشند.

بعداً خواهیم دید که یک ابرصفحه p بعدی منحصر به فرد که شامل s باشد، در \mathbb{R}^n موجود است. در لم بعدی، مجموعه هندسی مستقل را به صورت مفید دیگری عرضه می‌کنیم.

لم ۱.۱۰ مجموعه $s = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ از لحاظ هندسی مستقل است اگر و فقط اگر روابط

$$\sum_{i=0}^p \lambda_i = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{i=0}^p \lambda_i a_i = 0$$

ایجاب کنند که به ازای هر $i = 0, 1, \dots, p$ ، $\lambda_i = 0$.

اثبات. فرض می‌کنیم روابط $\sum_{i=0}^p \lambda_i a_i = 0$ و $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 0$ ایجاب کنند که به ازای هر $i = 0, 1, \dots, p$ ، $\lambda_i = 0$. نشان می‌دهیم که بردارهای $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_p - a_0$ خطی مستقل اند. فرض می‌کنیم $\sum_{i=1}^p u_i (a_i - a_0) = 0$. در این صورت

$$0 = \sum_{i=1}^p u_i (a_i - a_0) = \sum_{i=1}^p u_i a_i - \left(\sum_{i=1}^p u_i \right) a_0 = \sum_{i=0}^p \lambda_i a_i$$

که در آن $\lambda_0 = - \sum_{i=1}^p u_i$ و به ازای $i = 1, 2, \dots, p$ ، $\lambda_i = u_i$. بنابراین $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 0$ و لذا بنا به فرض نتیجه می‌گیریم که به ازای $i = 0, 1, \dots, p$ ، $\lambda_i = 0$. بنابراین به ازای $i = 1, 2, \dots, p$ ، $u_i = 0$. اثبات قسمت عکس را به خواننده واگذار می‌کنیم.

تعریف ۳.۱۰ فرض می‌کنیم مجموعه $\{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ از لحاظ هندسی مستقل باشد. در این صورت، ابرصفحه p بعدی متشکل از تمام x هایی از \mathbb{R}^n به شکل

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^p t_i (a_i - a_0)$$

که در آن به ازای $i = 1, 2, \dots, p$ ، $t_i \in \mathbb{R}$ ، با $\pi(s)$ نمایش داده می‌شود. واضح است که $\pi(s)$ شامل هر a_i است.

لم ۲.۱۰ فرض می‌کنیم مجموعه $s = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ از لحاظ هندسی مستقل باشد. در این صورت، $\pi(s)$ شامل s و منحصر به فرد است و دقیقاً مجموعه تمام نقاطی مانند $x \in \mathbb{R}^n$ است که به صورت

$$\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1 \quad \text{که} \quad x = \sum_{i=0}^p \lambda_i a_i$$

قابل نمایش باشند.

علاوه بر این به ازای هر $x \in \pi(s)$ ، مقادیر ثابت $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$ منحصر به فردند.

اثبات. به ازای $x \in \pi(s)$ داریم $x = a_0 + \sum_{i=1}^p t_i(a_i - a_0)$ و بنابراین به ازای هر چنین x ای می‌توانیم بنویسیم

$$x = \sum_{i=1}^p t_i a_i + \left(1 - \sum_{i=1}^p t_i\right) a_0 = \sum_{i=0}^p \lambda_i a_i$$

که در آن $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^p t_i$ و به ازای $i = 1, 2, \dots, p$ ، $\lambda_i = t_i$ ، و لذا $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$. بنابراین x را به شکل مورد نظر نمایش داده‌ایم.

چون بردارهای $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_p - a_0$ خطی مستقل اند، t_i ها در $x = a_0 + \sum_{i=1}^p t_i(a_i - a_0)$ و لذا λ_i ها منحصر به فردند.

بالعکس، اگر $x = \sum_{i=0}^p \lambda_i a_i$ و $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$ ، آنگاه $\lambda_i = t_i$ ، و در نتیجه

$$x = a_0 - \sum_{i=1}^p \lambda_i a_0 + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^p \lambda_i (a_i - a_0)$$

و لذا x متعلق به $\pi(s)$ است. منحصر به فرد بودن $\pi(s)$ به سادگی حاصل می‌شود.

تعریف ۴.۱۰ به ازای هر $x \in \pi(s)$ ، مقادیر ثابت $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$ مذکور در لم ۲.۱۰ را مختصات گرانیگاهی x نسبت به (a_0, a_1, \dots, a_p) می‌نامند.

از اثبات لم ۲.۱۰ نتیجه می‌شود که مختصات گرانیگاهی منحصر به فردند. اگر مجموعه $s = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ در \mathbb{R}^n از لحاظ هندسی مستقل باشد، آنگاه از مطالب فوق درمی‌یابیم که هر $x \in \pi(s)$ مختصات گرانیگاهی منحصر به فردی مانند $\lambda_i(x)$ ، $i = 0, 1, \dots, p$ ، با

ویژگی زیر دارد

$$\sum_{i=0}^p \lambda_i(x) = 1 \quad \text{و} \quad x = \sum_{i=0}^p \lambda_i(x) a_i$$

بنابراین، $\lambda_i(x)$ تابعی حقیقی مقدار روی $\pi(s)$ است. حال نشان می‌دهیم که هر $\lambda_i(x)$ روی $\pi(s)$ پیوسته است.

قضیه ۱.۱۰ فرض می‌کنیم مجموعه $s = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ از لحاظ هندسی مستقل باشد. به ازای هر $x \in \pi(s)$ ، فرض می‌کنیم $u_i(x)$ ها، $i = 0, 1, \dots, p$ ، مختصات گرانیگاهی x نسبت به s باشند. در این صورت، هر $u_i(x)$ روی $\pi(s)$ پیوسته است.

اثبات. ابتدا قضیه را برای حالت $n = p$ ثابت می‌کنیم. متذکر می‌شویم که اگر مجموعه $s = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ از لحاظ هندسی در \mathbb{R}^n مستقل باشد، آنگاه $\pi(s) = \mathbb{R}^p$. برای ادامه اثبات به دو لم زیر احتیاج داریم. لم بعدی به سادگی از لم ۱.۱۰ نتیجه می‌شود.

لم ۳.۱۰ فرض می‌کنیم مجموعه $s = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R}^p باشد و به ازای $a_i = (a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^p)$ ، $i = 0, 1, \dots, p$ ، در این صورت، s از لحاظ هندسی مستقل است اگر و فقط اگر

$$\det(s) = \begin{vmatrix} a_0^1 & a_0^2 & \cdots & a_0^p & 1 \\ a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^p & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_p^1 & a_p^2 & \cdots & a_p^p & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

حال با استفاده از قاعده کرامر، لم زیر به سادگی حاصل می‌شود.

لم ۴.۱۰ فرض می‌کنیم مجموعه $s = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ در \mathbb{R}^p از لحاظ هندسی مستقل باشد و به ازای هر $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \pi(s)$ ، $\lambda_i(x)$ ها، $i = 0, 1, \dots, p$ ، نمایشگر مختصات گرانیگاهی x نسبت به s باشند. در این صورت،

$$\lambda_i(x) = \frac{\det_i(x)}{\det(s)}$$

که در آن $\det_i(x)$ دترمینان حاصل از $\det(s)$ با تعویض سطر i ام $\det(s)$ با بردار $(x_1, x_2, \dots, x_p, 1)$ است.

به‌وضوح از لم ۴.۱۰ نتیجه می‌شود که $\lambda_i(x)$ روی \mathbb{R}^p $\pi(s) = \mathbb{R}^p$ پیوسته است. حال حالت کلی $n > p$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم مجموعه $s = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ در \mathbb{R}^n از لحاظ هندسی مستقل باشد. بنابه تعریف، بردارهای $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_p - a_0$ در \mathbb{R}^n خطی مستقل‌اند و نقاط $b_{p+1}, b_{p+2}, \dots, b_n$ چنان موجودند که مجموعه $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_p - a_0, b_{p+1}, \dots, b_n\}$ پایه‌ای برای \mathbb{R}^n باشد. اگر به‌ازای $i = p+1, p+2, \dots, n$ بنویسیم $a_i = b_i + a_0$ ، آنگاه مجموعه $s' = \{a_0, a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_n\}$

در \mathbb{R}^n از لحاظ هندسی مستقل است.

فرض می‌کنیم به‌ازای هر $x \in \pi(s)$ ، $u_i(x)$ ، $i = 0, 1, \dots, p$ ، مختصات گرانیگاهی x نسبت به s باشند. همچنین فرض می‌کنیم به‌ازای هر x از $\pi(s')$ ، $\lambda_i(x)$ ، $i = 0, 1, \dots, n$ ، مختصات گرانیگاهی x نسبت به s' باشند. از لم ۴.۱۰ نتیجه می‌گیریم که هر $u_i = \lambda_i | \pi(s)$ روی \mathbb{R}^n پیوسته است. چون مختصات گرانیگاهی منحصر به‌فردند، داریم $u_i = \lambda_i | \pi(s)$ در نتیجه $u_i(x)$ روی $\pi(s)$ پیوسته است و بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

۲. سادک

اگر مجموعه $s = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ در \mathbb{R}^n از لحاظ هندسی مستقل باشد، آنگاه به اجمال می‌توان گفت p -سادک هندسی زیرمجموعه‌ای از $\pi(s)$ با مختصات گرانیگاهی مثبت است. تعریف دقیق آن به‌صورت زیر است.

تعریف ۵.۱۰ فرض می‌کنیم مجموعه $s = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ در \mathbb{R}^n از لحاظ هندسی مستقل باشد. در این صورت، p -سادک هندسی (یا به اختصار، p -سادک) پدیدآمده توسط s که با s_p یا (a_0, a_1, \dots, a_p) نمایش داده می‌شود، برابر است با

$$s_p = \left\{ \sum_{i=0}^p \lambda_i a_i : \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1, 0 < \lambda_i < 1, i = 0, 1, \dots, p \right\}.$$

p -سادک هندسی را بسیاری اوقات p -سادک هندسی باز می‌نامند. p -سادک هندسی بسته را به همین روش تعریف می‌کنند غیر از اینکه به جای شرط $0 < \lambda_i < 1$ شرط $0 \leq \lambda_i \leq 1$ را قرار می‌دهند، و آن را با

$$\bar{s}_p = [a_0, a_1, \dots, a_p]$$

نمایش می‌دهند.

وقتی \mathbb{R}^n توپولوژی معمولی دارد، \bar{s}_p بستار s_p است. درستی لم بعدی واضح است.

لم ۵.۱۰ s_p و \bar{s}_p زیرمجموعه‌های محدب \mathbb{R}^n هستند. به علاوه، \bar{s}_p غلاف محدب بسته s است.

مثال ۱.۱۰ هر s -سادک هندسی فقط از یک نقطه تشکیل می‌شود، زیرا

$$s_0 = (a_0) = [a_0] = \bar{s}_0 = \{a_0\}.$$

مجموعه‌ای که فقط از دو عضو متمایز تشکیل شده باشد، مانند $s = \{a_0, a_1\}$ ، به وضوح از لحاظ هندسی مستقل است. بازه باز واصل بین a_0 و a_1 سادگی یک بعدی است.

مجموعه $s = \{a_0, a_1, a_2\}$ متشکل از سه نقطه \mathbb{R}^n ، $n \geq 2$ ، از لحاظ هندسی مستقل است اگر و فقط اگر این نقاط رئوس یک مثلث باشند. ناحیه درونی این مثلث سادگی دوبعدی است.

مجموعه $s = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ متشکل از چهار نقطه \mathbb{R}^n ، $n \geq 3$ ، از لحاظ هندسی مستقل است اگر و فقط اگر این نقاط رئوس یک چهاروجهی باشند. ناحیه درونی این چهاروجهی سادگی ۳ بعدی است. در باقی موارد نیز وضع به همین صورت است. هر s -سادک باز یا بسته یک نقطه است.

اگر مجموعه $s = \{a_0, a_1\}$ از لحاظ هندسی مستقل باشد، آنگاه \bar{s}_1 بازه بسته واصل بین a_0 و a_1 است.

اگر مجموعه $s = \{a_0, a_1, a_2\}$ از لحاظ هندسی مستقل باشد، آنگاه \bar{s}_2 مثلثی بسته با رئوس a_0, a_1, a_2 است.

اگر مجموعه $s = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ از لحاظ هندسی مستقل باشد، آنگاه \bar{s}_3 چهاروجهی توپر بسته‌ای با رئوس a_0, a_1, a_2, a_3 است. در باقی موارد نیز وضع به همین صورت است.

تعریف ۶.۱۰ اگر s_p ، p -سادک (a_0, a_1, \dots, a_p) باشد، آنگاه a_0, a_1, \dots, a_p را رأس s_p و p را بعد (جبری) s_p می‌نامند.

تعریف ۷.۱۰ اگر s_p ، p -سادک باشد، آنگاه $\bar{s}_p - s_p$ را مرز s_p می‌نامند و با \dot{s}_p نمایش می‌دهند، در نتیجه

$$\dot{s}_p = \bar{s}_p - s_p.$$

تعریف ۱.۱۰ اگر s_p سادک باشد و $\{i_0, i_1, \dots, i_k\}$ زیرمجموعه‌ای از $\{0, 1, \dots, p\}$ باشد، آنگاه می‌گویند سادک

$$s_k = (a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$$

k -وجه s_p است و می‌نویسند $s_k \leq s_p$. اگر $s_k \leq s_p$ و $s_k \neq s_p$ ، آنگاه می‌گویند s_k وجه سره s_p است و می‌نویسند $s_k < s_p$.

وجه روبه‌روی رأس a_i ، $(p-1)$ -وجه $(a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p)$ است و آن را با

$$(a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, \hat{a}_i, a_{i+1}, \dots, a_p)$$

نمایش می‌دهند.

مثال ۲.۱۰. ۲-وجههای s_p عبارت‌اند از a_p, \dots, a_1, a_0 . ۱-وجهها را یال می‌نامند. ۲-وجههای s_p وجوه مسطح آن هستند؛ و غیره. (شکل ۱.۱۰ را ببینید، $p=3$).

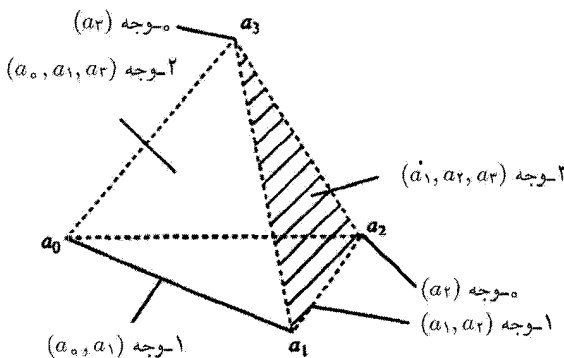
در قضیه بعدی روابط بین s_p ، \bar{s}_p و \hat{s}_p را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۲.۱۰ در هر p -سادک $s_p = (a_0, a_1, \dots, a_p)$ ، \bar{s}_p اجتماع تمام وجوه s_p و \hat{s}_p اجتماع تمام وجوه سره s_p است. به‌علاوه، هر نقطه \bar{s}_p در یک وجه منحصر به‌فرد s_p قرار دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم $x \in \bar{s}_p$. در این صورت، می‌توانیم بنویسیم $x = \sum_{i=0}^p \lambda_i a_i$ که در آن

$\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$ و به‌ازای هر $i = 0, 1, \dots, p$ ، $0 \leq \lambda_i \leq 1$. فرض می‌کنیم i_0, i_1, \dots, i_k

مقادیری از i هایی باشند که به‌ازای آنها $\lambda_i > 0$. در این صورت، $s_k = (a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$



شکل ۱.۱۰

قرار دارد و $s_k \leq s_p$. چون مختصات گرانیگاهی منحصر به فردند، در نتیجه s_k تنها وجه s_p است که شامل x است. همچنین، s_k وجه سره s_p است اگر و فقط اگر $\{i_0, i_1, \dots, i_k\}$ زیرمجموعه‌ای سره از $\{0, 1, \dots, p\}$ باشد، یعنی اگر و فقط اگر حداقل یکی از مختصات گرانیگاهی x صفر باشد و در این حالت $x \in \dot{s}_p$.

بالعکس، اگر وجه $s_k = (a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ وجه s_p باشد و $x \in s_k$ ، آنگاه $x = \sum_{j=0}^k \lambda_{i_j} a_{i_j}$ ، که در آن $\sum_{j=0}^k \lambda_{i_j} = 1$ و به ازای $j = 0, 1, \dots, k$ ، $\lambda_{i_j} > 0$.

اگر $\{i_0, i_1, \dots, i_k\} = \{0, 1, \dots, p\}$ ، آنگاه $s_k = s_p \subseteq \bar{s}_p$ ، لیکن اگر s_p از $\{i_0, i_1, \dots, i_k\}$ زیرمجموعه‌ای سره از $\{0, 1, \dots, p\}$ باشد، آنگاه s_k وجه سره‌ای از s_p است و لذا می‌توانیم بنویسیم

$$x = \sum_{j=0}^k \lambda_{i_j} a_{i_j} + \sum_{i \neq i_j} \lambda_i a_i$$

که در آن به ازای $i_j \neq i$ ، $\lambda_i = 0$. بنابراین $x \in \dot{s}_p \subseteq \bar{s}_p$ و لذا قضیه به اثبات می‌رسد. حال «اندازه» یک سادک را محاسبه می‌کنیم.

لم ۶.۱۰ قطر p -سادک $s_p = (a_0, a_1, \dots, a_p)$ طول بزرگترین یال آن است.

اثبات. ثابت خواهیم کرد رئوسی مانند a_i و a_j از s_p وجود دارد که به ازای آنها، $\text{diam}^* s_p = d(a_i, a_j)$ که در آن d فاصله اقلیدسی در \mathbb{R}^n است. برای اثبات این موضوع، فرض می‌کنیم D طول بزرگترین یال s_p باشد. نشان می‌دهیم که به ازای هر x و y متعلق به s_p ، $d(x, y) \leq D$. فرض می‌کنیم a_{i_0} دورترین رأس s_p از x باشد. گوی بسته به مرکز x به شعاع $d(x, a_{i_0})$ را در نظر می‌گیریم. این گوی شامل تمام رئوس s_p است و به وضوح محدب است. لذا بنابه لم ۵.۱۰، این گوی شامل تمام s_p است.

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $d(x, y) \leq d(x, a_{i_0})$. اگر a_{i_1} دورترین رأس s_p از a_{i_0} باشد، آنگاه با استدلالی مشابه استدلال فوق نتیجه می‌گیریم که $d(x, a_{i_0}) \leq d(a_{i_0}, a_{i_1})$. بنابراین، به دست می‌آوریم

$$d(x, y) \leq d(x, a_{i_0}) \leq d(a_{i_0}, a_{i_1}) \leq D.$$

به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

* diam نشانه اختصاری diameter به معنی قطر است.

نکته ۱.۱۰ به سادگی مشاهده می‌شود که $\text{diam}(s_p) = \text{diam}(\bar{s}_p)$.

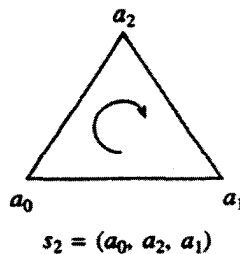
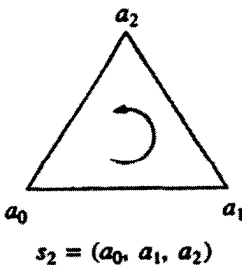
۳. جهت‌دهی سادک

p -سادک $s_p = (a_0, a_1, \dots, a_p)$ به‌طور منحصر به‌فردی توسط رئوسش a_0, a_1, \dots, a_p معین می‌شود و ترتیب این رئوس در تعریف p -سادک بی‌اهمیت است. لیکن برای اهدافی خاص، ترتیب این رئوس نقش مهمی ایفا می‌کند.

در این صورت، منظور ما از جایگشت s_p ، جایگشتی از رئوس آن است. تعداد جایگشت‌های s_p ، $(p+1)!$ است. دو جایگشت را هم‌ارز نامند هرگاه هر دو زوج یا فرد باشند، یعنی دو ترتیب $(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_p})$ و $(a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_p})$ از (a_0, a_1, \dots, a_p) را هم‌ارز نامند هرگاه (j_0, j_1, \dots, j_p) جایگشتی زوج (یا فرد) از (i_0, i_1, \dots, i_p) باشد. اگر دو جایگشت هم‌ارز نباشند، آنها را متضاد می‌نامند. بدین ترتیب، یک رابطه هم‌ارزی روی جایگشت‌ها حاصل می‌شود که مجموعه جایگشت‌های s_p را به دو رده مجزا تقسیم می‌کند. این رده‌ها را جهت‌های s_p می‌نامند. سادک جهت‌دار، سادکی مانند s_p همراه با یکی از دو جهت ممکن آن است. بنابراین هر p -سادک معین‌کننده دو p -سادک جهت‌دار است.

مثال ۳.۱۰ اگر s_2 ، ۲-سادک (a_0, a_1, a_2) باشد، آنگاه دو ۲-سادک جهت‌داری که توسط سه نقطه a_0 ، a_1 و a_2 معین می‌شوند، با نمودارهای شکل ۲.۱۰ نشان داده می‌شوند که در آنها پیکانها نمایشگر ترتیب رئوس هستند.

فرض می‌کنیم $(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_p})$ ، p -سادکی جهت‌دار باشد، یعنی جهت آن توسط i_0, i_1, \dots, i_p معین شود. دیده‌ایم که فقط دو امکان متفاوت وجود دارد و روشن است که $0, 1, 2, \dots, p$ جایگشتی فرد از $0, 1, 2, \dots, p$ است. بنابراین، هر p -سادک جهت‌داری را که



شکل ۲.۱۰

توسط $p + 1$ رأس a_0, a_1, \dots, a_p معین می‌شود، می‌توان به صورت $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$ یا $(a_1, a_0, a_2, \dots, a_p)$ نوشت. بنابراین، اگر $s_p = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$ می‌نویسیم

$$-s_p = (a_1, a_0, a_2, \dots, a_p).$$

بنابراین، متناظر با $p + 1$ رأس a_0, a_1, \dots, a_p فقط دو p -سادک جهت‌دار داریم، که s_p و $-s_p$ هستند.

۴. مجتمع

مجتمع سادگی هندسی K در \mathbb{R}^n (که آن را به اختصار مجتمع می‌نامیم) گردابه‌ای متناهی از سادکهای هندسی باز \mathbb{R}^n است که در شرایط زیر صدق می‌کند

K_1 : اگر s_p سادگی در K باشد و $s_k < s_p$ ، آنگاه s_k در K باشد.

K_2 : اگر s_p و s_q اعضای K باشند و $s_p \neq s_q$ ، آنگاه $s_p \cap s_q = \emptyset$.

توجه کنید که بنابه شرط K_1 اگر s_p در K باشد، آنگاه تمام وجوه s_p در K هستند و لذا هر یک از رؤس هر سادک، رأس K نیز هست. ماکسیمم بعد سادکهای K را بعد (جبری) مجتمع K می‌نامند. اجتماع نقاط تمام سادکهای K ، یعنی مجموعه تمام نقاطی از \mathbb{R}^n را که هر یک متعلق به یکی از سادکهای K باشد چندوجهی می‌نامند و با $|K|$ نمایش می‌دهند. مجتمع را نباید با چندوجهی متناظرش خلط کرد. مجتمع گردابه‌ای از سادکهاست در حالی که چندوجهی مجموعه‌ای از نقاط است.

بنابه تعریف، هر مجتمعی مانند K مجموعه‌ای متناهی از سادکهاست و چون وجوه هر سادک در K هستند (بنابه شرط K_1)، چندوجهی $|K|$ را می‌توان اجتماع تعدادی متناهی سادک بسته در نظر گرفت. بنابراین، $|K|$ زیرمجموعه‌ای بسته و کراندار از \mathbb{R}^n است و لذا با توپولوژی معمولی $|\mathbb{R}^n|$ ، مجموعه‌ای فشرده است.

اگر $x \in |K|$ ، آنگاه سادک منحصر به فردی از K را که شامل x باشد محمل x می‌نامند (چنین سادگی بنابه شرط K_2 منحصر به فرد است). زیرگردابه‌ای از K را که در شرط K_1 صدق کند زیرمجتمع K می‌نامند. اگر s_p سادک باشد، آنگاه گردابه متشکل از s_p و وجوه آن در شرطهای K_1 و K_2 صدق می‌کند و لذا مجتمع است. این مجتمع را با $K(s_p)$ نمایش می‌دهند و مجتمع p بعدی متعارف می‌نامند. واضح است که

$$|K(s_p)| = \bar{s}_p.$$



شکل ۳.۱۰

مثال ۴.۱۰ نشان دهید چندوجهی دو مجتمع متفاوت ممکن است یکی باشد.

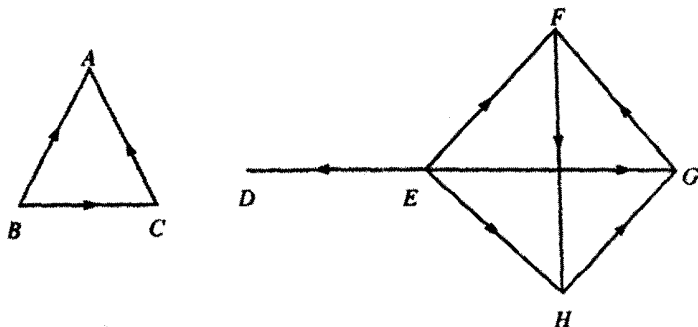
فرض می‌کنیم $s_1 = (a_0, a_1)$ در این صورت مجتمع $K = K(s_1)$ متشکل از سادکهای L سادکهای (a_0, a_1) ، (a_0, a_2) ، (a_2, a_1) ، (a_0, a_2) ، (a_0, a_1) ، (a_2, a_1) ، (a_0, a_2) ، (a_0, a_1) ، (a_2, a_1) ، (a_0, a_2) ، (a_0, a_1) ، (a_2, a_1) است که در شکل ۳.۱۰ نمایش داده شده، و سادکهای مجتمع L سادکهای (a_0, a_2) ، (a_2, a_1) ، (a_0, a_1) ، (a_0, a_2) ، (a_2, a_1) ، (a_0, a_1) ، (a_0, a_2) ، (a_2, a_1) ، (a_0, a_1) ، (a_0, a_2) ، (a_2, a_1) ، (a_0, a_1) ، (a_0, a_2) ، (a_2, a_1) هستند. لذا مجتمعهای K و L برابر نیستند، اما $|K| = |L|$.

اگر K مجتمع و q عددی صحیح و نامنفی باشد و از بعد K بزرگتر نباشد، آنگاه q -استخوان‌بندی K_q از K زیرمجتمعی از K است که متشکل از تمام زیرسادکهایی از K با بعد حداکثر q است.

مثال ۵.۱۰ - استخوان‌بندی K مجموعه رؤس K است.

یک مجتمع K را که در آن به هر سادک یک جهت داده شده است، مجتمع جهت‌دار می‌نامند. از این به بعد منظورمان از مجتمع، مجتمع جهت‌دار و از سادک، سادک جهت‌دار خواهد بود، مگر اینکه خلاف آن بیان شود.

مثال ۶.۱۰ شکل ۴.۱۰ را که نشان‌دهنده یک مجتمع ۳ بعدی است، در نظر بگیرید. جهت‌های ۱- سادکها و ۲- سادکها با پیکان نمایش داده شده‌اند. جهت‌ها دلخواه‌اند و لزومی ندارد که به یکدیگر وابسته باشند. چهاروجهی EFGH تنها ۳- سادک این مجتمع است. مثلث‌های BAC, EFH،



شکل ۴.۱۰

EGH, FHG و EFG ۲-سادکهای هستند که غیر از اولی، همگی وجوه چهاروجهی هستند. پاره خطهای BA, CA, BC, ED, EF, EH, EG, FH, GF و HG ۱-سادک هستند و A, B, C, D, E, F, G و H ۰-سادک هستند. ضمناً مشاهده می شود که چندوجهی متناظر، همبند نیست.

گردایه متشکل از ناحیه درونی مثلث BAC، یالهای BC, CA, BA، و رؤس A, B, C مثالی از زیرمجموع است.

گردایه متشکل از یالهای BA, CA, BC, ED, EF, EH, EG, FH, GF و رؤس A, B, C, D, E, F, G, H مثالی از ۱-استخوان بندی است.

۵. مثلث بندی

موضوع مثلث بندی بسیار عمیق است و در کتابی از این نوع، این موضوع را با دقت کامل نمی توان مطرح کرد. بنابراین فقط ایده های مقدماتی را ارائه خواهیم کرد.

اگر K مجتمع باشد، آنگاه چندوجهی متناظر آن $|K|$ ، به طور منحصر به فرد معین می شود و دیده ایم که $|K|$ مجموعه ای فشرده است. همچنین دیده ایم (شکل ۳.۱۰) که چندوجهی دو مجتمع متفاوت ممکن است یکی باشد، یعنی با یک چندوجهی مفروض $|K|$ مجتمع K ، غیر از حالت بدیهی که $|K|$ فقط یک نقطه دارد، به طور منحصر به فرد معین نمی شود، در واقع تعدادی نامتناهی مجتمع متفاوت ممکن است یک چندوجهی داشته باشند. فرض می کنیم یک چندوجهی مفروض باشد، در این صورت فرایند ساختن مجتمعی که چندوجهی آن همان چندوجهی مفروض باشد، به مثلث بندی چندوجهی مشهور است.

ایده مثلث بندی را با قرار دادن مجموعه هایی همسانریخت با سادکهای یک مجتمع به جای آن سادکها می توان تعمیم داد. به عنوان مثال، رویه های فشرده \mathbb{R}^3 را می توان از طریق نقاط، خمها، و مثلتهای خمیده خطی مثلث بندی کرد. همچنین، اگر زیرمجموعه فشرده S از \mathbb{R}^n همسانریخت با چندوجهی $|P|$ باشد، آنگاه با قرار دادن نگاره سادکهای P تحت همسانریختی $S \rightarrow |P| : f$ به جای آن سادکها، می توان S را مثلث بندی کرد.

مثال ۷.۱۰ رویه یک کره در \mathbb{R}^3 فضایی مثلث بندی شدنی است، زیرا این رویه با گردایه وجوه یک چهاروجهی، که مجتمع است، همسانریخت است. می توانیم این همسانریختی را بدین روش تصور کنیم که مرکزوار چهاروجهی را به عنوان مرکز کره در نظر بگیریم و از این نقطه یک رویه را به روی دیگری تصویر کنیم. تصاویر وجوه چهاروجهی، مثلثهایی خمیده خطی روی کره هستند و لذا با استفاده از این همسانریختی، رویه کره به تعدادی مثلث خمیده خطی تقسیم می شود.

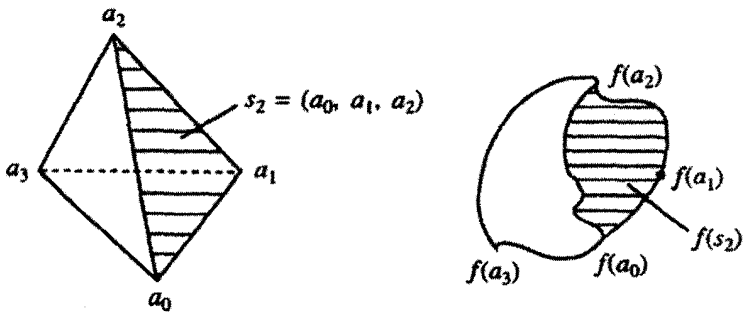
مثال ۸.۱۰ رویهٔ چنبره فضایی مثلث‌بندی‌شده است.

نکتهٔ ۲.۱۰ در اکثر حالتها برای رویه‌های ساده، مثلث‌بندی با کمک مثلثها (مثلثهای خمیده‌خطی) انجام می‌شود و لذا توجیهی شهودی برای قبول اصطلاح «مثلث‌بندی‌شده» وجود دارد. حال می‌خواهیم تعریفی دقیق ارائه کنیم. توجه کنید هنگامی که مطالعهٔ ویژگیهای توپولوژیک یک فضا مورد نیاز است، با وضعیتهای مختلفی ممکن است مواجه شویم. با در نظر داشتن این موضوع ابتدا چندوجهی توپولوژیک را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۹.۱۰ چندوجهی توپولوژیک فضایی است که با چندوجهی یک مجتمع همسانریخت باشد.

فرض کنید K مجتمع، X فضای توپولوژیک و $f: |K| \rightarrow X$ همسانریختی باشد، در این صورت اگر s_p سادک (a_0, a_1, \dots, a_p) از K باشد، $f(s_p)$ زیرفضایی از X است که با s_p همسانریخت است. زیرفضای $f(s_p)$ را می‌توان «سادک خمیده» با «رئوس» $f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_p)$ نامید. مثالی از این وضعیت در شکل ۵.۱۰ نمایش داده شده است.

فرض می‌کنیم $\{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{0, 1, \dots, p\}$ در این صورت اگر K سوجه چنین سادک خمیده‌ای را به صورت $f(s_k) = (f(a_{i_0}), f(a_{i_1}), \dots, f(a_{i_k}))$ تعریف کنیم، مشاهده می‌کنیم که گردایهٔ تمام $f(s_p)$ ها، $s_p \in K$ ، تمام ویژگیهای مجتمع را دارد، فقط ممکن است ویژگی مستقیم‌الخط بودن را نداشته باشد، و لذا می‌توان آن را «مجتمع خمیده‌خطی» نامید و این مجتمع خمیده‌خطی یک مثلث‌بندی از X به دست می‌دهد. اینک تعریف دقیق مفهوم مثلث‌بندی را ارائه می‌کنیم.



شکل ۵.۱۰

تعریف ۱۰.۱۰ فرض می‌کنیم X یک چندوجهی توپولوژیک باشد. مثلث‌بندی X یک دوتایی (K, f) است که در آن K مجتمع و $f: |K| \rightarrow X$ همسانریختی است.

مثال ۱۰.۹ اگر s_p سادک باشد، آنگاه $K(s_p)$ یک مثلث‌بندی از سادک بسته \bar{s}_p است.

۶. نگاشت سادگی

فرض می‌کنیم s_p, p -سادک (a_0, a_1, \dots, a_p) در \mathbb{R}^m و s_s, s -سادک (b_0, b_1, \dots, b_s) در \mathbb{R}^n باشد و f نگاشتی باشد که هر رأس a_i از s_p را به یک رأس از t_s مانند b_j می‌نگارد. نگاشت f ممکن است یک‌به‌یک نباشد. اگر

$$x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p \in s_p$$

آنگاه به x ، نقطه $f(x) \in \mathbb{R}^n$ را نسبت می‌دهیم که

$$f(x) = \lambda_0 f(a_0) + \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_p f(a_p).$$

نگاشت f ، که به این ترتیب حاصل می‌شود، نگاشتی پیوسته از سادک s_p به سادک t_s است. f را نگاشت سادگی از سادک s_p به سادک t_s می‌نامند. مجموعه $f(s_p)$ وجه C_k ای از t_s است که این وجه، یعنی سادک C_k به وسیله آن رئوسی از t_s مانند b_j تولید می‌شود که به صورت $f(a_i)$ باشند.

متذکر می‌شویم که f ممکن است دو یا چند رأس از s_p را به یک رأس از t_s بنگارد و لذا عبارت $f(x)$ فوق ممکن است به صورت زیر در آید

$$f(x) = u_0 b_0 + u_1 b_1 + \dots + u_s b_s$$

که در آن u_j مجموع تمام λ_i هایی است که $f(a_i)$ متناظر با آنها برابر b_j است. به عنوان مثال اگر $s = 2$ و $p = 3$

$$f(a_0) = f(a_2) = b_0, \quad f(a_1) = f(a_3) = b_1$$

آنگاه $u_1 = \lambda_1 + \lambda_3$ و $u_0 = \lambda_0 + \lambda_2$ و لذا $f(x) = (\lambda_0 + \lambda_2)b_0 + (\lambda_1 + \lambda_3)b_1$ در اینجا $k = 1$ و $C_1 = (b_0, b_1)$.

حال تعریف دقیق این مفهوم را برای مجتمعها ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۱۰ فرض می‌کنیم K و L دو مجتمع و f نگاشتی پیوسته از چندوجهی $|K|$ به چندوجهی $|L|$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم به ازای هر سادک A از K ، f نگاشتی سادکی از سادک A به سادکی از L مانند B باشد، در این صورت f را نگاشت سادکی از مجتمع K به مجتمع L می‌نامند.

تعریف فوق ایجاب می‌کند که اگر a_0, a_1, \dots, a_p رئوس سادکی از مجتمع K باشند، آنگاه $f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_p)$ رئوس سادکی از L باشند. اکنون تعریف دیگری ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱۲.۱۰ فرض می‌کنیم f نگاشتی باشد که به هر رأس از مجتمعی مانند K ، رأسی از مجتمعی مانند L را چنان نسبت می‌دهد که اگر a_0, a_1, \dots, a_p رئوس سادکی از K باشند، آنگاه $f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_p)$ رئوس سادکی از L باشند. در این صورت، f را نگاشت رأسی سادکی یا سادک رأسی از مجتمع K به مجتمع L می‌نامند.

۷. بعد توپولوژیک

می‌دانیم چندوجهی توپولوژیک فضایی است که با چندوجهی یک مجتمع همسانریخت باشد. در این مرحله شاید واضح نباشد که بعد (جبری) منحصر به فردی برای چندوجهی توپولوژیک بتوان تعریف کرد زیرا می‌توان تصور کرد که چنین فضایی می‌تواند با چندوجهیهای مجتمعهایی که بعدهای (جبری) متفاوت دارند، همسانریخت باشد. بنابه مطالبی که ارائه خواهد شد، آشکار خواهد شد که چنین حالتی ممکن نیست رخ دهد. ابتدا تعریف بعد توپولوژیک را ارائه می‌کنیم.

فرض می‌کنیم X زیرفضایی از \mathbb{R}^n ، پوششی از X با تعداد متناهی مجموعه، و ε عددی مثبت باشد. اگر قطر هر عضو G کمتر از ε باشد، آنگاه G را ε -پوشش X می‌نامند. مرتبه پوشش G ، m است هرگاه هیچ نقطه از X متعلق به $m+1$ عضو از G نباشد، اما حداقل یک نقطه از X موجود باشد که متعلق به m عضو از G باشد.

تعریف ۱۳.۱۰ گویند بعد (توپولوژیک) فضای فشرده $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ، k است هرگاه k کوچکترین عدد صحیح نامنفی با این ویژگی باشد که به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، ε -پوشش متناهی و بسته‌ای از X با مرتبه $k+1$ موجود باشد. در این حالت می‌نویسیم $\dim X = k$.

قضیه بعدی، که اثبات آن خارج از چارچوب این کتاب است، نتایج گوناگونی دارد و به طرق زیادی به کار می‌آید.

قضیه ۳.۱۰ فرض می‌کنیم s_p ، p -سادک باشد. در این صورت، $\dim |K(s_p)| = \text{diam}(\bar{s}_p) = p$.
قضیه بعدی را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۴.۱۰ فرض می‌کنیم X و Y فضاهای فشرده همسانریخت باشند و $\dim X = k$ ،
در این صورت $\dim Y = k$.
برای اثبات قضیه، به لم زیر احتیاج داریم.

لم ۷.۱۰ (لم پوشش لبگ). فرض می‌کنیم فضای $X \subseteq \mathbb{R}^n$ فضایی فشرده و c یک پوشش
باز X باشد. در این صورت، عدد $\delta > 0$ چنان موجود است که هر زیرمجموعه X با قطر کمتر از
 δ در عضوی از c قرار گیرد.
عدد δ را عدد لبگ این پوشش c می‌نامند.

اثبات لم. فرض می‌کنیم $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ زیرپوششی متناهی از c برای X باشد، و به‌ازای
هر $i = 1, 2, \dots, k$

$$\phi = \max(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k) \quad \text{و} \quad \phi_i(x) = \text{dist}(x, X - U_i)$$

واضح است که ϕ پیوسته است. چون هر $x \in X$ در یک U_i قرار دارد و هر $X - U_i$ بسته
است، نتیجه می‌گیریم به‌ازای هر $x \in X$ ، $\phi(x) \geq \phi_i(x) > 0$. بنابراین $\phi(X)$ زیرمجموعه
فشرده‌ای از \mathbb{R} است که شامل صفر نیست و لذا $\text{dist}(0, \phi(X)) > 0$. در نتیجه، عدد $\delta > 0$
چنان موجود است که به‌ازای هر $x \in X$ ، $\phi(x) > \delta$. بنابراین گوی باز $B^n(x, \delta)$ که در آن x
می‌تواند هر نقطه‌ای از X باشد، به‌طور کامل در یک U_i قرار می‌گیرد و لذا لم به اثبات می‌رسد.

اثبات قضیه. فرض می‌کنیم نگاشت $f : X \rightarrow Y$ همسانریختی باشد. نشان می‌دهیم که
 $\dim Y \leq k$. بدین‌منظور، باید نشان دهیم که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ یک ε -پوشش متناهی و بسته
برای Y از مرتبه $k + 1$ وجود دارد. فرض می‌کنیم ε عدد مثبت دلخواه، و c پوشش Y متشکل از
تمام گویهای باز $B^n(x, \varepsilon)$ ، $x \in Y$ باشد. در این صورت، گردایه $\{f^{-1}(U) : U \in c\}$ پوششی
باز برای X است. فرض می‌کنیم δ عدد لبگی برای این پوشش باشد. چون $\dim X = k$ ، یک
 δ -پوشش متناهی و بسته مانند $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ برای X از مرتبه $k + 1$ موجود است.
در نتیجه $\{f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_m)\}$ یک پوشش متناهی و بسته برای Y از مرتبه $k + 1$
است و چون هر A_i در یک $U \in c$ ، $f^{-1}(U)$ قرار دارد، این پوشش ε -پوشش نیز هست.
به طریق مشابهی می‌توان نشان داد عدد $\varepsilon > 0$ چنان موجود است که مرتبه هر ε -پوشش

متناهی و بسته Y حداقل $k + 1$ باشد و این ایجاب خواهد کرد که $\dim Y \geq k$. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیه ۵.۱۰ اگر A زیرمجموعه فشرده‌ای از \mathbb{R}^n باشد، آنگاه بعد توپولوژیک A حداکثر n است.

اثبات. مجموعه A در n -سادگی مانند s_n قرار دارد. با تحدید هر ε -پوشش متناهی و بسته \bar{s}_n به A ، یک ε -پوشش متناهی و بسته A که مرتبه آن بیشتر از مرتبه پوشش \bar{s}_n نیست، به دست می‌آید. حال قضیه از قضیه ۳.۱۰ نتیجه گرفته می‌شود.

قضیه ۵.۱۰ نتیجه مهمی دارد که آن را در قضیه بعدی می‌آوریم.

قضیه ۶.۱۰ \mathbb{R}^m با \mathbb{R}^n همسازیکت است اگر و فقط اگر $n = m$.

اثبات. نشان خواهیم داد اگر $n \neq m$ ، آنگاه \mathbb{R}^m با \mathbb{R}^n همسازیکت نیست. فرض می‌کنیم $m < n$ و نگاشت $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ همسازیکتی باشد. همچنین فرض می‌کنیم s_n ، n -سادگی در \mathbb{R}^n باشد. بنابه قضیه ۳.۱۰، $\dim \bar{s}_n = n$. چون $f(\bar{s}_n)$ با \bar{s}_n همسازیکت است، بنابه قضیه ۴.۱۰، $\dim f(\bar{s}_n) = n$. با توجه به اینکه $f(\bar{s}_n)$ زیرفضایی فشرده از \mathbb{R}^m است و $m < n$ ، این نتیجه متناقض با قضیه ۵.۱۰ است و لذا قضیه به اثبات می‌رسد.

۸. قضیه نقطه ثابت براوئر^۱

فرض می‌کنیم X فضایی توپولوژیک و f نگاشتی از X به خودش باشد. اگر نقطه $x_0 \in X$ چنان موجود باشد که $f(x_0) = x_0$ ، آنگاه x_0 را نقطه ثابت f می‌نامند. اگر X چنان باشد که هر نگاشت پیوسته مانند $f: X \rightarrow X$ نقطه ثابت داشته باشد، آنگاه می‌گویند X ویژگی [مربوط به] نقطه ثابت دارد. ابتدا نشان می‌دهیم که بازه بسته $[0, 1]$ ویژگی نقطه ثابت دارد.

قضیه ۷.۱۰ بازه بسته $[0, 1]$ و ویژگی نقطه ثابت دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم نگاشت $f: C \rightarrow C$ پیوسته باشد. اگر $f(0) = 0$ یا $f(1) = 1$ ، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که $f(0) > 0$ و $f(1) < 1$. نگاشت $g: C \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $g(x) = x - f(x)$ ، به ازای هر $x \in C$ ، تعریف می‌کنیم. در این صورت g پیوسته است، $g(0) = -f(0) < 0$ ، و $g(1) = 1 - f(1) > 0$. لذا $x_0 \in C$ چنان موجود است که $g(x_0) = 0$ و لذا قضیه به اثبات می‌رسد.

حال نشان می‌دهیم که دو فضای همسانریخت و بزرگی نقطه ثابت دارند هرگاه یکی از آنها این ویژگی را داشته باشد.

قضیه ۸.۱۰ فرض می‌کنیم نگاشت $f : X \rightarrow Y$ همسانریختی باشد و X ویژگی نقطه ثابت داشته باشد. در این صورت، Y ویژگی نقطه ثابت دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم نگاشت $g : Y \rightarrow Y$ پیوسته باشد. در این صورت، نگاشت $f^{-1}gf : X \rightarrow X$ پیوسته است و لذا بنابه فرض، نقطه $x_0 \in X$ چنان موجود است که $f^{-1}gf(x_0) = x_0$ ، یعنی $g(f(x_0)) = f(x_0)$ و لذا نقطه $f(x_0) \in Y$ یک نقطه ثابت g است.

فرع ۱.۱۰ هر بازه بسته $[a, b]$ در \mathbb{R} ویژگی نقطه ثابت دارد. لذا بازه $[-1, 1]$ نیز ویژگی نقطه ثابت دارد.

این حکم از قضایای ۷.۱۰ و ۸.۱۰ نتیجه می‌شود. اینک خواهیم دید که این حکم حالت خاصی از قضیه مشهور نقطه ثابت براور است.

قضیه ۹.۱۰ (قضیه نقطه ثابت براور). گوی بسته B^n ($n \geq 1$) ویژگی نقطه ثابت دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم s_n ، n -سادک (a_0, a_1, \dots, a_n) باشد. اثبات اینکه گوی بسته B^n همسانریخت با \bar{s}_n است، دشوار نیست و لذا بنابه قضیه ۸.۱۰، فقط کافی است نشان دهیم که \bar{s}_n ویژگی نقطه ثابت دارد. فرض می‌کنیم نگاشت $f : \bar{s}_n \rightarrow \bar{s}_n$ پیوسته باشد و $x \in \bar{s}_n$ در این صورت، می‌توانیم بنویسیم

$$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i(x) a_i$$

که در آن $\sum_{i=0}^n \lambda_i(x) = 1$ و $0 \leq \lambda_i(x) \leq 1$ ، $i = 0, 1, \dots, n$.

همچنین چون $f(x) \in \bar{s}_n$ ، می‌توانیم بنویسیم

$$f(x) = \sum_{i=0}^n u_i(x) a_i, \quad \sum_{i=0}^n u_i(x) = 1, \quad 0 \leq u_i(x) \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

فرض می‌کنیم به‌ازای هر $i = 0, 1, \dots, n$ $A_i = \{x \in \bar{s}_n : u_i(x) \leq \lambda_i(x)\}$

در این صورت چون f پیوسته است، بنابه قضیه ۱.۱۰، هر A_i بسته است.

فرض می‌کنیم $\{i_0, i_1, \dots, i_p\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ و $x \in (a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_p})$. لذا می‌توانیم بنویسیم

$$x = \sum_{j=0}^p \lambda_{i_j}(x) a_{i_j}, \quad \sum_{j=0}^p \lambda_{i_j}(x) = 1, \quad 0 < \lambda_{i_j}(x) < 1, \quad j = 0, 1, \dots, p.$$

از عبارتی که برای $f(x)$ نوشته بودیم نتیجه می‌شود که حداقل به‌ازای یک $j, j \leq p$ ، مثلاً به‌ازای r باید داشته باشیم $u_{i_r}(x) \leq \lambda_{i_r}(x)$ و لذا $x \in A_{i_r}$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_p}) \subseteq A_{i_0} \cup A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_p}.$$

حال از این مطالب نتیجه می‌گیریم که $\bigcap_{i=0}^n A_i$ ناتهی است. فرض می‌کنیم $y \in \bigcap_{i=0}^n A_i$ در این صورت، $y \in \bar{s}_n$ و همچنین به‌ازای هر $i, u_i(y) \leq \lambda_i(y)$. چون $\sum_{i=0}^n \lambda_i(y) = \sum_{u=0}^n u_i(y) = 1$ ، باید به‌ازای هر $i = 0, 1, \dots, n$ ، داشته باشیم $u_i(y) = \lambda_i(y)$ ؛ در نتیجه $f(y) = y$. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

۹. افراز گرانیگاهی

مفهوم افراز گرانیگاهی برای مثلث‌بندی هر چندوجهی با سادک‌هایی که به اندازه دلخواه کوچک باشند، مفید است.

فرض می‌کنیم s_p سادک (a_0, a_1, \dots, a_p) باشد. در این صورت گرانیگاه s_p ، نقطه

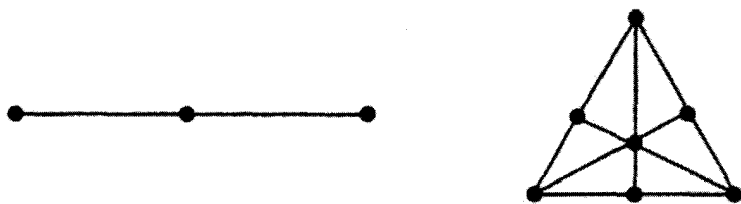
$$b(s_p) = \frac{1}{p+1}(a_0 + a_1 + \dots + a_p)$$

است.

بنابراین، $b(s_p)$ همان گرانیگاه (یا مرکز ثقل) رئوس به معنای معمولی است. فرض می‌کنیم K مجتمع باشد، در این صورت دنباله‌ای صعودی از سادک‌های K ، گردهای ماند

$$\{s^0, s^1, \dots, s^k\}$$

از سادک‌های K است که $s^0 < s^1 < \dots < s^k$. در اینجا به جای اندیس پایین از اندیس بالا استفاده کرده‌ایم تا نشان دهیم که بعد s^i ممکن است i نباشد. افراز گرانیگاهی K' از K ، مجتمعی است که هر یک از رئوس آن گرانیگاه $b(s)$ ، به‌ازای سادک s از K باشد، و سادک‌های آن توسط مجموعه‌هایی از گرانیگاه‌ها که سادک‌های متناظر با آن گرانیگاه‌ها با ترتیبی مناسب تشکیل یک دنباله صعودی دهند، تعریف شوند. به عبارت دقیقتر



شکل ۶.۱۰

تعریف ۱۴.۱۰ افراز گرانیگاهی مجتمعی مانند K ، مجتمعی مانند K' است به طوری که
 (الف) رئوس K' گرانیگاههای تمام سادکهای K باشند؛

(ب) سادکهای K' ، سادکهایی به صورت $(b(s^0), b(s^1), \dots, b(s^m))$ باشند که در آن
 $s^i \in K$ و $s^i < s^{i+1}$.

نکته ۳.۱۰ چون مجتمع K' به وضوح به وسیله تعریف فوق معین می شود، اگر مجتمع K' موجود
 باشد، منحصر به فرد است.

در شکل ۶.۱۰، افراز گرانیگاهی یک ۱-سادک و یک ۲-سادک را نشان داده ایم.

لم ۸.۱۰ فرض می کنیم L مجتمع و K زیرمجموعی از L باشد. اگر افزای گرانیگاهی مانند
 L' داشته باشد، آنگاه K افزای گرانیگاهی مانند K' دارد که K' متشکل از تمام سادکهایی از
 L' است که در $|K|$ باشند.

اثبات. سادکهایی از L' که در $|K|$ باشند، به وضوح تشکیل زیرمجموعی از L' می دهند. شرطهای
 (الف) و (ب) از تعریف ۱۴.۱۰ برقرارند زیرا اگر s^i ها سادکهای K باشند و $s^0 < s^1 < \dots < s^m$
 آنگاه $(b(s^0), b(s^1), \dots, b(s^m)) \subseteq s^m \subseteq |K|$.

لم ۹.۱۰ اگر K مجتمع باشد و افزای گرانیگاهی مانند K' از K موجود باشد، آنگاه $|K| = |K'|$.

اثبات. فرض می کنیم t سادک $(b(s^0), b(s^1), \dots, b(s^m))$ از K' باشد؛ در این صورت،
 $|K| \supseteq s^m \supseteq t$. لذا $|K'| \subseteq |K|$. برای اثبات عکس این رابطه، فرض می کنیم
 $x \in s \subseteq |K|$. رئوس سادک $s = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ را می توان چنان مرتب کرد که اگر
 $x = \sum t_i a_i$ ، آنگاه $t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_n$. فرض می کنیم $s_i = (a_0, a_1, \dots, a_i)$.
 در این صورت $x = \sum r_i b(s_i)$ ، که در آن $r_i = (i+1)(t_i - t_{i+1})$ واضح است که $r_i \geq 0$

و $\sum r_i = \sum t_i = 1$ لذا

$$x \in (b(s_0), b(s_1), \dots, b(s_m)) \in K'$$

یعنی $|K| \subseteq |K'|$ ، و بنابراین $|K| = |K'|$.

تعریف ۱۵.۱۰ فرض می‌کنیم s_p سادک (a_0, a_1, \dots, a_p) باشد، در این صورت ∂s_p گردایه تمام سادکهای (a_1, a_2, \dots, a_p) ، $(a_0, a_1, a_3, \dots, a_p)$ ، \dots ، $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ است. واضح است که ∂s_p مجتمع است.

لم ۱۰.۱۰ فرض می‌کنیم s_p سادک (a_0, a_1, \dots, a_p) باشد و ∂s_p افزایش گرانیگاهی داشته باشد. در این صورت، s_p افزایش گرانیگاهی دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم نقطه $b = (p+1)^{-1}(a_0 + a_1 + \dots + a_p)$ گرانیگاه s_p باشد. همچنین فرض می‌کنیم سادک $t_s = (b_0, b_1, \dots, b_s)$ از افزایش گرانیگاهی ∂s_p ، یعنی سادکی از $(\partial s_p)'$ باشد. تعریف می‌کنیم $t_s b = (b_0, b_1, \dots, b_s, b)$. ابتدا نشان می‌دهیم که $t_s b$ سادک است. فرض می‌کنیم $\sum t_i b_i + t b = 0$ و $\sum t_i + t = 0$. به علاوه فرض می‌کنیم در صورتی که امکان داشته باشد $t \neq 0$. چون t_s در وجهی از s_p مانند s_j قرار دارد، می‌توانیم بنویسیم

$$\sum_{k \neq j} \lambda_{i,k} = 1 \quad \text{که} \quad b_i = \sum_{k \neq j} \lambda_{i,k} a_k$$

در نتیجه

$$b = \frac{-1}{t} \sum t_i b_i = -\frac{1}{t} \sum_{k \neq j} t_i \lambda_{i,k} a_k = \sum_{k \neq j} d_k a_k$$

که در آن $\sum_{k \neq j} d_k = (-1/t) \sum_{k \neq j} t_i \lambda_{i,k} = -1$ بنابراین

$$\sum r_k = 0 \quad \text{و} \quad 0 = \frac{1}{p+1}(a_0 + a_1 + \dots + a_p) + \sum_{k \neq j} d_k a_k = \sum r_k a_k$$

چون s_p سادک است، باید به ازای هر k داشته باشیم $r_k = 0$ اما $r_j = (p+1)^{-1}$ و در نتیجه به تناقض رسیده‌ایم. لذا $t = 0$. بنابراین $\sum t_i b_i = 0$ و $\sum t_i = 0$ اما t_s سادک است، لذا باید به ازای هر i داشته باشیم $t_i = 0$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $t_s b$ سادک است. واضح است که رئوس s'_p عبارت‌اند از رئوس $(\partial s_p)'$ و b ؛ و سادکهای s'_p عبارت‌اند از

سادکهای t_s و $t_s b$ به‌ازای همه سادکهای t_s از $(\partial s_p)'$. برای اثبات اینکه s'_p مجتمع است، باید نشان دهیم که اشتراک هر دو سادکی از آن وجهی از هر کدام است. این مطلب واضح است، زیرا

$$t_s b \cap t'_s = t_s \cap t'_s, \quad t_s b \cap t'_s b = (t_s \cap t'_s) b.$$

لذا s'_p مجتمع است و به این ترتیب لم به اثبات می‌رسد.

اگر K و L دو مجتمع باشند، آنگاه منظورمان از $K \cap L$ مجموعه سادکهایی است که هم در K و هم در L باشند، و منظورمان از $K \cup L$ مجموعه سادکهایی است که یا در K یا در L باشند. واضح است که $K \cap L$ زیرمجتمعی از K و L است، اما $K \cup L$ ممکن است مجتمع نباشد. لیکن در لم بعدی می‌بینیم که در حالتی خاص، $K \cup L$ مجتمع است.

لم ۱۱.۱۰ فرض می‌کنیم K و L دو مجتمع باشند. اگر

$$|K \cap L| = |K| \cap |L|$$

آنگاه $K \cup L$ مجتمع است.

اثبات. فرض می‌کنیم s سادکی از K و t سادکی از L باشد. می‌خواهیم نشان دهیم $t \cap s$ هم وجه s است هم وجه t (توجه کنید که مجموعه تهی وجه هر سادکی است). فرض می‌کنیم A و B به ترتیب زیرمجتمعهای K و L باشند. در این صورت

$$|A \cap B| = |A| \cap |B| \cap |K \cap L|$$

این مطلب را ثابت می‌کنیم. واضح است که $|A \cap B| \subseteq |A| \cap |B| \cap |K \cap L|$. فرض می‌کنیم $x \in A$ و $x \in B$ و $x \in K \cap L$ و $x \in u$ و u سادکهایی از L هستند، لذا $t \cap u < u$ به همین صورت نتیجه می‌گیریم که $s \cap u < s$. لذا

$$s \cap t \cap u = (s \cap u) \cap (t \cap u) < s \cap u < s.$$

همچنین، به دلیل تقارن، $s \cap t \cap u < t$. بنابراین

$$x \in |A \cap B| \quad \text{و} \quad x \in s \cap t \cap u \in A \cap B.$$

اگر A (یا B) مجتمعی متشکل از s (یا t) و تمام وجوه آن باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= s \cap t \cap |K \cap L| = s \cap t \cap |K| \cap |L| \\ &= (s \cap |K|) \cap (t \cap |L|) = s \cap t. \end{aligned}$$

چون $A \cap B$ هم زیرمجموع A و هم زیرمجموع B است، پس $s \cap t$ زیرمجموع هر دو سادک s و t است. از لم ۵.۱۰ نتیجه می‌گیریم که $s \cap t$ محدب است و لذا هم وجه s و هم وجه t است. پس $K \cup L$ مجتمع است. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد. حال قضیه اصلی این بخش را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۱۰ هر مجتمع افراز‌گرانیگاهی دارد.

اثبات. قضیه را با استقرایی مضاعف روی بعد مجتمع و روی تعداد سادکها ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم قضیه به‌ازای هر مجتمع با بعد کمتر از p و همچنین به‌ازای هر مجتمع با بعد p که تعداد p -سادکهای آن کمتر از s باشد، $s \geq 1$ ، برقرار باشد.

فرض می‌کنیم K مجتمعی p -بعدي باشد که تعداد p -سادکهای آن s است. همچنین فرض می‌کنیم u یک p -سادک باشد. در این صورت، زیرمجموعی از K مانند L با کمتر از s سادک چنان موجود است که $K = L \cup u$. بنا به استقرا، L مجتمع است، $(\partial u)'$ نیز مجتمع است، در نتیجه بنا به لم ۱۰.۱۰، u' مجتمع است. می‌توان نشان داد که $K' = L' \cup u'$. بنابراین بنا به لم ۱۱.۱۰، کافی است نشان دهیم

$$|K' \cap u'| = |K'| \cap |u'|.$$

مشاهده می‌کنیم $(K \cap u)' = K' \cap u' = (K \cap u)'$ بنا به لم ۸.۱۰، مجتمع است. اگر M مجتمع و K_0 و K_1 زیرمجموعه‌هایی از M باشند، آنگاه $|K_0 \cap K_1| = |K_0| \cap |K_1|$. با استفاده از این مطلب و لم ۹.۱۰، نتیجه می‌گیریم که

$$|K' \cap u'| = |(K \cap u)'| = |K \cap u| = |K| \cap |u| = |K'| \cap |u'|.$$

بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

نکته ۴.۱۰ از اثبات نتیجه می‌شود که برای هر مجتمع K ، بعد $K' =$ بعد K .

تعریف ۱۶.۱۰ فرض می‌کنیم K مجتمع باشد. قطر K را، که با $u(K)$ نشان می‌دهیم، به صورت

$$u(K) = \max\{\text{diam } s : s \in K\}$$

تعریف می‌کنیم.

فايده اصلی افراز‌گرانیگاهی در دو قضیه بعدی نهفته است.

قضیه ۱۱.۱۰ فرض می‌کنیم بعد مجتمع K ، m باشد، در این صورت

$$u(K') \leq \frac{m}{m+1} u(K).$$

اثبات. بنابه لم ۶.۱۰، فقط یالها را باید در نظر بگیریم. فرض می‌کنیم s' یالی از K' (یعنی ۱-سادک) با رئوس $b(s_p)$ و $b(s_q)$ باشد، و $s_p < s_q$ در این صورت $p < q \leq m$. فرض می‌کنیم

$$s_q = (a_0, a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_q) \quad \text{و} \quad s_p = (a_0, a_1, \dots, a_p).$$

در این صورت

$$\begin{aligned} b(s_p) - b(s_q) &= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p a_i - \frac{1}{q+1} \sum_{i=0}^q a_i \\ &= \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1} \right) \sum_{i=0}^p a_i - \frac{1}{q+1} \sum_{i=p+1}^q a_i \\ &= \frac{q-p}{q+1} \left(\frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p a_i - \frac{1}{q-p} \sum_{i=p+1}^q a_i \right). \end{aligned}$$

نقاط $\frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p a_i$ و $\frac{1}{q-p} \sum_{i=p+1}^q a_i$ هر دو در \bar{s}_q هستند و چون بنابه نکته ۱.۱۰، $\text{diam } \bar{s}_q = \text{diam } s_q$ فاصله این دو نقطه از هم بیشتر از $u(K)$ نیست، یعنی

$$\left\| \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p a_i - \frac{1}{q-p} \sum_{i=p+1}^q a_i \right\| \leq u(K).$$

لذا از مطالب فوق نتیجه می‌شود که

$$\|b(s_p) - b(s_q)\| \leq \frac{q-p}{q+1} u(K) \leq \frac{q}{q+1} u(K) \leq \frac{m}{m+1} u(K).$$

لم ۶.۱۰ نشان می‌دهد که $u(K')$ طول بزرگترین یال K' است. چون نابرابری فوق برای هر یال K' برقرار است، نتیجه می‌گیریم که

$$u(K') \leq \frac{m}{m+1} u(K).$$

به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

اگر K مجتمع باشد، افراز گرانیگاهی آن K' نیز مجتمع است. بنابراین با تشکیل افرازهای گرانیگاهی متوالی، دنباله‌ای مانند

$$K^{(0)} = K, K^{(1)} = K', K^{(2)} = (K^{(1)})' = (K')', \dots, K^{(r)} = (K^{(r-1)})', \dots$$

که در آن $K^{(r)}$, $r = 1, 2, 3, \dots$ افراز گرانیگاهی $K^{(r-1)}$ است، به دست می‌آوریم. حال ثابت می‌کنیم که r را می‌توان آن قدر بزرگ اختیار کرد که قطر $K^{(r)}$ به اندازه دلخواه کوچک باشد.

قضیه ۱۲.۱۰ فرض می‌کنیم K مجتمع و ε عدد مثبت دلخواهی باشد. عدد $r \geq 0$ چنان موجود است که $u(K^{(r)}) < \varepsilon$.

اثبات. فرض می‌کنیم m بعد K باشد. در این صورت، با استفاده از نکته ۴.۱۰ و قضیه ۱۱.۱۰، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} u(K^{(r)}) &\leq \left(\frac{m}{m+1}\right) u(K^{(r-1)}) \leq \left(\frac{m}{m+1}\right)^2 u(K^{(r-2)}) \\ &\leq \dots \leq \left(\frac{m}{m+1}\right)^r u(K). \end{aligned}$$

چون r را می‌توان به اندازه مورد نیاز بزرگ اختیار کرد و $m/(m+1) < 1$ ، درستی قضیه نتیجه گرفته می‌شود.

تمرین

۱. اگر مجموعه $s = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ از لحاظ هندسی مستقل باشد، ثابت کنید ابرصفحه $\pi(s)$ بسته است.

۲. اگر $\{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ زیرمجموعه‌ای هندسی مستقل از \mathbb{R}^n باشد، نشان دهید عدد $\varepsilon > 0$ چنان موجود است که هر مجموعه $\{b_0, b_1, \dots, b_p\}$ از نقاط \mathbb{R}^n با ویژگی $\|a_i - b_i\| < \varepsilon$ ، $i = 0, 1, 2, \dots, p$ هندسی مستقل باشد.

۳. اگر s_p و t_p دو p -ساده باشند، نشان دهید s_p با t_p و \bar{s}_p با \bar{t}_p همسانریخت است.

۴. نشان دهید که هر سادگی محدب است.

۵. نشان دهید اشتراک دو زیرمجموعه، زیرمجموعه‌ای از هر کدام است.

۶. ثابت کنید که زیرمجموعه یک زیرمجموعه خود زیرمجموعه است.
۷. نشان دهید حاصلضرب دو چندوجهی توپولوژیک یک چندوجهی توپولوژیک است.
۸. نشان دهید در هر مثلث بندی مکعب I_n ، تعداد n -سادکها حداقل $n!$ است.
۹. ثابت کنید گوی باز $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ ویژگی نقطه ثابت ندارد.

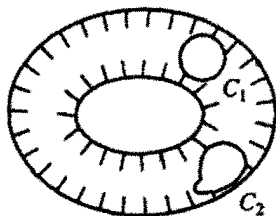
نظریه مانستگی سادگی

۱. مقدمه

نظریه مانستگی در توپولوژی بسیار مهم است. در این فصل نظریه مانستگی مجتمه‌های سادگی را به اختصار ارائه خواهیم کرد. شرح کامل این نظریه خارج از چارچوب این کتاب است. باید توجه کرد که نظریه مانستگی سادگی فقط یکی از چندین نظریه مانستگی است.

در برخی از حالات، مانستگی شبیه هوموتوبی است. به عنوان مثال، می‌توان گفت دو ۱-چرخه (که بعداً تعریف می‌شود) روی چنبره مانسته هستند اگر و فقط اگر هوموتوپیک باشند. لیکن در حالت کلی این موضوع برای رویه‌ها برقرار نیست. به عنوان مثال، رویه‌ای را که از حذف درون یک ناحیه ساده همبند از رویه یک چنبره حاصل می‌شود در نظر بگیرید. قسمت حذف شده در شکل ۱.۱۱ نشان داده شده است.

هیچ خمی بر رویه چنبره که این ناحیه را احاطه کند، با صفر هوموتوپیک نیست، زیرا این خم نمی‌تواند روی رویه چنبره به طور پیوسته آن قدر منقبض شود تا به یک نقطه تبدیل شود. اما چون این خم مرز تمام رویه است، با صفر مانسته است. همچنین خمهای C_1 و C_2 همان گونه که در شکل فوق نمایش داده شده‌اند، مانسته هستند اما هوموتوپیک نیستند.



شکل ۱.۱۱

۲. گروه آبلی متناهی مولد

در این فصل به برخی از ایده‌ها و قضایا دربارهٔ گروه‌های متناهی مولد احتیاج خواهیم داشت. فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی جمعی باشد. در این صورت، G را متناهی مولد نامند هرگاه اعضای g_1, g_2, \dots, g_k در G چنان موجود باشند که هر $x \in G$ را بتوان به صورت

$$x = u_1 g_1 + u_2 g_2 + \dots + u_k g_k$$

نوشت که در آن u_1, u_2, \dots, u_k اعدادی صحیح هستند.

فرض می‌کنیم $g \in G$ و k چنان عدد صحیحی باشد که $kg = 0$. در این صورت، مقدار مینیمم چنین k ای را مرتبهٔ g و g را عنصر تاب G می‌نامند. اگر چنین k ای موجود نباشد، آنگاه می‌گویند g از مرتبهٔ نامتناهی است.

قضایای زیر، که اثبات آنها را نمی‌آوریم، در مراحل متعددی مورد نیاز خواهند بود.*

قضیهٔ A (قضیهٔ پایه). فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی متناهی مولد باشد. عنصرهای g_1, g_2, \dots, g_k به ترتیب از مرتبه‌های $m_1, m_2, \dots, m_k, m_i, m_{i-1}, \dots$ را عا د کند، و اعضای h_1, h_2, \dots, h_r از مرتبهٔ نامتناهی چنان موجودند که G مجموع مستقیم

$$G = \{g_1\} \oplus \{g_2\} \oplus \dots \oplus \{g_k\} \oplus \{h_1\} \oplus \{h_2\} \oplus \dots \oplus \{h_r\}$$

باشد، که در آن $\{g_i\}$ گروهی دوری از مرتبهٔ m_i است که توسط g_i تولید می‌شود و $\{h_i\}$ گروه دوری نامتناهی تولیدشده توسط h_i است.

* برای ملاحظهٔ اثبات این قضایا، می‌توانید به کتابهای زیر رجوع کنید

1. G. Birkhoff and S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan, New York, 1971;
2. I. D. MacDonald, *The Theory of Groups*, Oxford University Press, New York, 1968.

نکته ۱.۱۱. اعداد m_1, m_2, \dots, m_k و l به طور منحصر به فرد توسط G معین می شوند. اعداد m_1, m_2, \dots, m_k را ضرایب تاب G ، و l را رتبه G می نامند.

قضیه B. فرض می کنیم H زیرگروهی از گروه آبدی متناهی مولد G باشد. در این صورت، رتبه G برابر با مجموع رتبه های H و $G - H$ است.

قضیه C. فرض می کنیم G گروه جمعی دلخواهی باشد. زیرمجموعه $H \subseteq G$ زیرگروه G است اگر و فقط اگر چنانچه $x \in H$ و $y \in H$ ، آنگاه $x - y \in H$.

۳. زنجیر

فرض می کنیم K یک مجتمع سادگی هندسی n بعدی باشد، و به ازای $p = 0, 1, 2, \dots, n$ ، α_p تعداد p -سادهای K باشد. زنجیر p بعدی روی K یا به اختصار p -زنجیر K ، یک «جمع صوری» به شکل

$$c_p = u_1 s_p^1 + u_2 s_p^2 + \dots + u_{\alpha_p} s_p^{\alpha_p}$$

است، که در آن $u_1, u_2, \dots, u_{\alpha_p}$ اعدادی صحیح و $s_p^1, s_p^2, \dots, s_p^{\alpha_p}$ p -سادهای K هستند. لذا c_p یک صورت خطی روی p -سادهای K است. همچنین می نویسیم

$$(-1)s_p = -s_p$$

که در آن s_p p -سادک است. باید توجه کرد که هر p -سادک K را می توان p -زنجیری در نظر گرفت که تمام ضرایب آن غیر از یکی برابر صفرند.

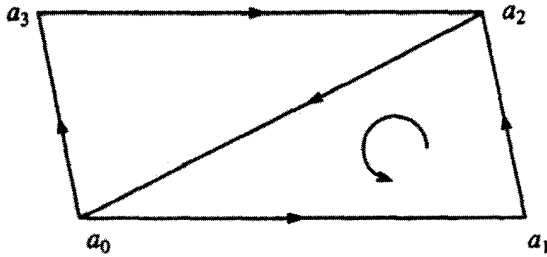
اگر c_p و c'_p زنجیرهای

$$c_p = \sum u_i s_p^i \quad \text{و} \quad c'_p = \sum u'_i s_p^i$$

باشند، مجموع آنها $c_p + c'_p$ را p -زنجیر

$$c_p + c'_p = \sum (u_i + u'_i) s_p^i$$

تعریف می کنیم. لذا مجموع دو p -زنجیر یک p -زنجیر است و قانون شرکت پذیری برای p -زنجیرها برقرار است زیرا جمع اعداد صحیح شرکت پذیر است. p -زنجیری را که تمام ضرایب آن صفر باشد p -زنجیر صفر می نامند (همانی). معکوس هر p -زنجیر $\sum u_i s_p^i$ به صورت $\sum (-u_i) s_p^i$ تعریف می شود. بنابراین با این عملها، مجموعه تمام p -زنجیرهای K تشکیل گروهی می دهد که به وضوح



شکل ۲.۱۱

آبلی است. این گروه را با $C_p(K)$ نمایش می‌دهند و گروه p -زنجیری یا گروه p -زنجیرهای K می‌نامند.

اگر s_p ، p -سادگی از K باشد، آنگاه $s_p -$ متعلق به $C_p(K)$ است و لذا گروه $C_p(K)$ با تغییر جهت‌های سادک‌های K تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر، $C_p(K)$ مستقل از جهت انتخاب‌شده برای K است. $C_{-1}(K)$ را برابر صفر تعریف می‌کنیم.

مثال ۱.۱۱. فرض می‌کنیم K مجتمعی متشکل از ۲-سادک (a_0, a_1, a_2) ، رئوس a_0, a_1, a_2, a_3 و ۱-سادک‌های (a_0, a_1) ، (a_0, a_2) ، (a_1, a_2) ، (a_0, a_3) ، (a_2, a_3) با جهت‌های نشان‌داده‌شده در شکل ۲.۱۱ باشد.

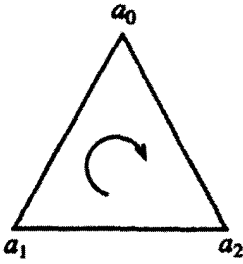
در این صورت، (a_0, a_1) و $(a_2, a_0) + (a_3, a_2) + (a_2, a_0)$ از ۱-زنجیرهای K و لذا متعلق به $C_1(K)$ هستند. تمام مضارب صحیح چنین زنجیرهایی نیز عضو $C_1(K)$ هستند.

۴. تلازم

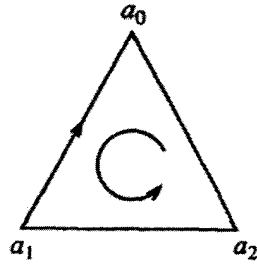
فرض می‌کنیم K مجتمع s_m و t_{m+1} دو سادک آن باشند. عدد تلازم این دو سادک را با $[t_{m+1}; s_m]$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم. اگر s_m وجهی از t_{m+1} نباشد، آنگاه عدد تلازم $[t_{m+1}; s_m]$ صفر تعریف می‌شود. اگر سادک $s_m = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ وجهی از t_{m+1} باشد، آنگاه رأس دیگری مانند b وجود دارد چنانکه

$$t_{m+1} = \pm(b, a_0, a_1, \dots, a_m)$$

که علامت مثبت و منفی به جهت دو سادک بستگی دارد [b را رأس اضافی t_{m+1} می‌گوییم].



شکل ۴.۱۱



شکل ۳.۱۱

عدد تلازم $[t_{m+1}; s_m]$ را به صورت زیر تعريف می‌کنیم

$$t_{m+1} = (b, a_0, a_1, \dots, a_m) \quad \text{هرگاه} \quad [t_{m+1}; s_m] = 1$$

و

$$t_{m+1} = -(b, a_0, a_1, \dots, a_m) \quad \text{هرگاه} \quad [t_{m+1}; s_m] = -1$$

اگر عدد تلازم دو سادک مخالف صفر باشد، آنگاه می‌گوییم دو سادک متلازم‌اند.

مثال ۲.۱۱ مجتمع K را شامل ۲-سادک $s_2 = (a_0, a_1, a_2)$ و ۱-سادک $s_1 = (a_1, a_0)$ با جهت‌هایی که در شکل‌های ۳.۱۱ و ۴.۱۱ نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم. بر طبق شکل ۳.۱۱

$$[s_2; s_1] = -1 \quad \text{ولذا} \quad s_2 = (a_1, a_2, a_0) = -(a_2, a_1, a_0)$$

بر طبق شکل ۴.۱۱

$$[s_2; s_1] = 1 \quad \text{ولذا} \quad s_2 = (a_2, a_1, a_0)$$

حال فرض می‌کنیم تعداد m -سادکها و $(m+1)$ -سادکهای مجتمع K به ترتیب q و r باشد. فرض می‌کنیم این دو دسته سادک به ترتیب

$$t_{m+1}^r, \dots, t_{m+1}^2, t_{m+1}^1 \quad \text{و} \quad s_m^q, \dots, s_m^2, s_m^1$$

باشند، و به ازای $i = 1, 2, \dots, q$ و $j = 1, 2, \dots, r$

$$[t_{m+1}^i; s_m^j] = \eta_{ij}^m.$$

بنابراین به تعداد $r \times q$ عدد η_{ij}^m به دست می‌آوریم که 0 ، 1 یا -1 هستند. ماتریسی r سطری و q ستونی که درایهٔ سطر i ام و ستون j ام آن η_{ij}^m باشد تشکیل می‌دهیم. این ماتریس را ماتریس تلازم می‌نامیم و با I_m نمایش می‌دهیم.

اگر s_p سادک (a_0, a_1, \dots, a_p) باشد، منظورمان از $prsp$ ، rsp و غیره به ترتیب سادکهای $(r, a_0, a_1, \dots, a_p)$ ، $(p, r, a_0, a_1, \dots, a_p)$ و غیره است. بعداً به قضیهٔ زیر نیاز خواهیم داشت.

$$\text{قضیهٔ ۱.۱۱} \quad I_m I_{m-1} = 0$$

اثبات. حاصلضرب $I_m I_{m-1}$ وجود دارد زیرا تعداد ستونهای I_m ، تعداد سادکهاست که برابر با تعداد سطرهای I_{m-1} است.

اگر تعداد m -سادکها q باشد، آنگاه درایهٔ سطر i ام و ستون j ام $I_m I_{m-1}$ عبارت است از

$$\sum_{k=1}^q \eta_{ik}^m \eta_{kj}^{m-1}. \quad (1)$$

نشان می‌دهیم که این درایه صفر است. اگر t_{m+1}^i با s_m^k متلازم نباشد، η_{ik}^m صفر است. اگر s_m^k با $(m-1)$ -سادک u_{m-1}^j متلازم نباشد، η_{kj}^{m-1} صفر است. بنابراین، یکی از جملات مجموع (۱) صفر است مگر آنکه s_m^k با هر دو سادک t_{m+1}^i و u_{m-1}^j متلازم باشد. فرض می‌کنیم s_m^k با هر دو سادک t_{m+1}^i و u_{m-1}^j متلازم باشد. در این صورت اگر

$$u_{m-1}^j = (q_0, q_1, \dots, q_{m-1})$$

آنگاه

$$s_m^k = \eta_{kj}^{m-1} (p u_{m-1}^j), \quad t_{m+1}^i = \eta_{ik}^m \eta_{kj}^{m-1} (r p u_{m-1}^j)$$

که در آن p رأس اضافی s_m^k و r رأس اضافی t_{m+1}^i است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} t_{m+1}^i &= -\eta_{ik}^m \eta_{kj}^{m-1} (p r u_{m-1}^j) \\ &= -\eta_{kj}^{m-1} (p v_m^h) \end{aligned}$$

که در آن v_m^h ، m -سادک $(r u_{m-1}^j)$ است. بنابراین m -سادک v_m^h ای وجود دارد که با سادکهای t_{m+1}^i و u_{m-1}^j متلازم است و اعداد تلازم آنها به ترتیب $-\eta_{kj}^{m-1}$ و η_{ik}^m هستند. واضح است که $\pm v_m^h$ وجهی از سادک t_{m+1}^i از مجتمع K است و لذا $\pm v_m^h$ سادکی از K است. علاوه بر این،

$\pm v_m^h$ و s_m^k تنها سادکهایی از K هستند که با هر دو سادک t_{m+1}^i و u_{m-1}^j متلازم اند. از اینجا نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر جمله مخالف صفر در مجموع (۱)، یک جمله مخالف صفر دیگر با همان قدرمطلق ولی با علامت مخالف وجود دارد. لذا مقدار مجموع (۱) صفر است، و در نتیجه $I_m I_{m-1} = 0$. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

۵. مرز

فرض می‌کنیم K مجتمع باشد و s_p ها، p -سادکها و t_{p-1} ها، $(p-1)$ -سادکهای K باشند. مرز p -سادک s_p^i ($p > 0$)، $(p-1)$ -زنجیر

$$\sum_j \eta_{ij}^{p-1} t_{p-1}^j$$

است و با $\partial_p s_p^i$ نمایش داده می‌شود. بنابراین

$$\partial_p s_p^i = \sum_j \eta_{ij}^{p-1} t_{p-1}^j.$$

در اینجا η_{ij}^{p-1} عدد تلازم s_p^i و t_{p-1}^j است. مرز p -سادک را صفر تعریف می‌کنیم. با تعریف زیر، از مرز سادک به مرز زنجیر می‌رسیم. فرض می‌کنیم c_p ، p -زنجیری به صورت

$$c_p = \sum u_i s_p^i$$

باشد. در این صورت، مرز p -زنجیر c_p ، $(p-1)$ -زنجیر

$$\partial_p c_p = \sum_i u_i \partial_p s_p^i = \sum_{i,j} u_i \eta_{ij}^{p-1} t_{p-1}^j$$

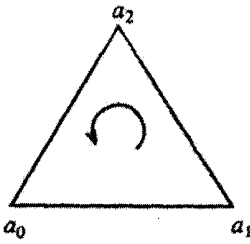
است. بنابه تعریف، مرز p -زنجیر، صفر است. اگر c_p و c'_p دو p -زنجیر باشند، آنگاه

$$\partial_p (c_p + c'_p) = \partial_p c_p + \partial_p c'_p.$$

لذا ∂_p یک هم‌ریختی از $C_p(K)$ به $C_{p-1}(K)$ است. پس برای هر مجتمع K ، دنباله‌ای از هم‌ریختیهای گروههای زنجیری مانند

$$\dots \longrightarrow C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_{-1}(K)$$

به‌دست می‌آوریم که در آن فرض بر این است که به‌ازای هر عدد صحیح i بزرگتر از بعد مجتمع K ، $C_i(K) = 0$ و $\partial_i = 0$.



شکل ۶.۱۱



شکل ۵.۱۱

مثال ۳.۱۱ فرض می‌کنیم s_1 و s_2 سادکهای (a_0, a_1) و (a_0, a_1, a_2) از مجتمع K با جهت‌های نشان داده شده در شکل‌های ۵.۱۱ و ۶.۱۱ باشند. در این صورت

$$\partial_1 s_1 = a_1 - a_0$$

$$\partial_2 s_2 = (a_0, a_1) + (a_1, a_2) + (a_2, a_0)$$

$$= (a_1, a_2) - (a_0, a_2) + (a_0, a_1).$$

ویژگی اساسی مرز زنجیر را در قضیه بعدی می‌آوریم.

قضیه ۲.۱۱ اگر K مجتمع باشد و $\varphi > 0$ ، آنگاه ترکیب هم‌ریختیهای

$$C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2}(K)$$

هم‌ریختی بدیهی است. به عبارت دیگر $\partial_{p-1}(\partial_p c_p) = 0$ ، یعنی مرز هر p -زنجیر صفر است.

اثبات. داریم $\partial_p c_p = \partial_p(\sum u_i s_p^i) = \sum u_i \eta_{ij}^{p-1} t_{p-1}^j$ که عبارت سمت راست این تساوی $(p-1)$ -زنجیر است. اگر $\varphi = 1$ ، آنگاه

$$\partial_{p-1}(\partial_p c_p) = \partial_{p-1}\left(\sum u_i \eta_{ij}^{p-1} t_{p-1}^j\right) = 0$$

اما اگر $\varphi > 1$ ، عبارت فوق $(p-2)$ -زنجیر

$$\sum_{i,j,k} u_i \eta_{ij}^{p-1} \eta_{jk}^{p-2} u_{p-2}^k$$

است که در آن u_{p-2}^k ها $(p-2)$ -سادک هستند. بنابه قضیه ۱.۱۱، $\sum \eta_{ij}^{p-1} \eta_{jk}^{p-2} = 0$ ، لذا $\partial_{p-1}(\partial_p c_p) = 0$ بنا براین قضیه به اثبات می‌رسد.

۶. چرخه

فرض می‌کنیم K مجتمع باشد. p -زنجیر روی K را p -چرخه نامند هرگاه مرز آن صفر (یعنی بدیهی) باشد، به عبارت دیگر اگر c_p ، p -زنجیر باشد و $\partial_p c_p = 0$ ، آنگاه c_p ، p -چرخه است. اگر c_p و c'_p دو p -چرخه باشند، آنگاه $\partial_p c'_p = 0 = \partial_p c_p$ ، لذا

$$\partial_p(c_p - c'_p) = \partial_p c_p - \partial_p c'_p = 0$$

یعنی $c_p - c'_p$ ، p -چرخه است. بنابراین بنابه قضیه C ، مجموعه تمام p -چرخه‌ها زیرگروهی از $C_p(K)$ تشکیل می‌دهد، که آن را با $Z_p(K)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۱۱. مرز $(p+1)$ -زنجیر p -چرخه است.

اثبات. فرض می‌کنیم $c_p = \partial_{p+1} c_{p+1}$ در این صورت، بنابه قضیه ۲.۱۱،

$$\partial_p c_p = \partial_p(\partial_{p+1} c_{p+1}) = 0$$

و لذا c_p ، p -چرخه است.

نکته ۲.۱۱ باید توجه داشت که p -چرخه ممکن است مرز $(p+1)$ -زنجیر نباشد.

p -چرخه‌ای را که مرز $(p+1)$ -زنجیری از K باشد p -مرز می‌نامند، یعنی هرگاه c_p ، p -چرخه باشد و $(p+1)$ -زنجیری از K مانند c_{p+1} چنان موجود باشد که

$$c_p = \partial_{p+1} c_{p+1}$$

آنگاه c_p ، p -مرز است.

فرض می‌کنیم c_p و c'_p ، p -مرز باشند. در این صورت $\partial_p c'_p = 0 = \partial_p c_p$ و $(p+1)$ -زنجیرهای c_{p+1} و c'_{p+1} روی K چنان موجودند که

$$c'_p = \partial_{p+1} c'_{p+1} \quad \text{و} \quad c_p = \partial_{p+1} c_{p+1}$$

در نتیجه $\partial_p(c_p - c'_p) = 0$

$$c_p - c'_p = \partial_{p+1} c_{p+1} - \partial_{p+1} c'_{p+1} = \partial_{p+1}(c_{p+1} - c'_{p+1}).$$

لذا $c_p - c'_p$ ، p -مرز است. بنابراین بنابه قضیه C ، مجموعه تمام p -مرزها زیرگروهی از $Z_p(K)$ تشکیل می‌دهد، که آن را با $B_p(K)$ نشان می‌دهیم.

بنابراین، به‌ازای هر مجتمع K ، سه گروه $B_p(K)$ ، $Z_p(K)$ و $C_p(K)$ را تشکیل داده‌ایم که رابطه

$$B_p(K) \subseteq Z_p(K) \subseteq C_p(K)$$

بین آنها برقرار است.

۷. گروههای مانستگی

فرض می‌کنیم K مجتمع باشد، و c_p و c'_p دو p -چرخه روی K باشند. اگر $c_p - c'_p$ p -مرز باشد، می‌نویسیم

$$c_p \sim c'_p$$

و می‌گوییم c_p با c'_p مانسته است (معنی نماد \sim را در هر بحثی از فحوای کلام باید دریافت).

اگر خود c_p ، p -مرز باشد، می‌گوییم c_p با صفر مانسته است و می‌نویسیم $c_p \sim \circ$.

نشان می‌دهیم که رابطه \sim یک رابطه هم‌ارزی است.

(الف) شرط بازتابی: چون $c_p - c_p = \circ$ ، $c_p \sim c_p$.

(ب) شرط تقارن: فرض می‌کنیم $c_p \sim c'_p$ ، لذا c_{p+1} چنان موجود است که
 $c_p - c'_p = \partial_{p+1} c_{p+1}$ لذا

$$c'_p - c_p = \partial_{p+1} (-c_{p+1})$$

و در نتیجه $c'_p \sim c_p$.

(ج) شرط ترابایی: فرض می‌کنیم $c_p \sim c'_p$ و $c_p \sim c''_p$ ، در این صورت

$$c'_p - c''_p = \partial_{p+1} c'_{p+1} \quad \text{و} \quad c_p - c'_p = \partial_{p+1} c_{p+1}$$

و در نتیجه $c_p - c''_p = \partial_{p+1} (c_{p+1} + c'_{p+1})$ ، لذا $c_p \sim c''_p$.

بنابراین رابطه \sim مجموعه تمام p -چرخه‌ها را به رده‌های هم‌ارزی دوه‌دو مجزا تفکیک می‌کند. این رده‌ها را رده‌های مانستگی از بعد p می‌نامند.

حال جمع این رده‌ها را تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم $[c_p]$ و $[c'_p]$ دو رده از p -چرخه‌ها باشند. جمع آنها را به صورت

$$[c_p] + [c'_p] = [c_p + c'_p]$$

تعریف می‌کنیم. مجموع فوق منحصر به فرد است، زیرا این مجموع مستقل از نماینده رده‌هاست. اگر $[0]$ نمایشگر رده p -مرزها باشد، آنگاه واضح است که

$$[c_p] + [0] = [c_p]$$

و

$$[c_p] + [-c_p] = [0].$$

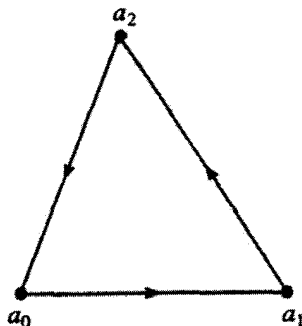
جمع رده‌ها شرکت‌پذیر است، زیرا جمع p -چرخه‌ها شرکت‌پذیر است. این مطالب نشان می‌دهند که مجموعه رده‌های مانستگی از بعد p یک گروه آبلی جمعی است. این گروه را با $H_p(K)$ نمایش می‌دهند و گروه مانستگی p ام K می‌نامند. از نحوه ساختن این گروه نتیجه می‌شود که $H_p(K)$ گروه خارج قسمتی $Z_p(K)/B_p(K)$ است، یعنی

$$H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K).$$

مثال ۴.۱۱ مجتمع ۲ بعدی متعارف $K(s_2)$ را در نظر بگیرید که در آن $s_2 = (a_0, a_1, a_2)$ و سادکهای s_2 به صورتی که از نمایش آنها در زیر برمی‌آید جهت‌دهی شده‌اند

$$(a_0, a_1, a_2), (a_0, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_0), a_0, a_1, a_2$$

(شکل ۷.۱۱ را ببینید). به ازای $p > 2$ ، $C_p(K(s_2)) = 0$ و $\partial_p = 0$ ، و لذا به ازای $p > 2$ ، $H_p(K(s_2)) = 0$. اما $H_2(K(s_2)) = 0$ توسط عضو (a_0, a_1, a_2) تولید می‌شود و هر عضو $C_2(K(s_2))$ به صورت $m(a_0, a_1, a_2)$ است که در آن $m \in \mathbb{Z}$. به ازای هر عضو $m(a_0, a_1, a_2)$ از $C_2(K(s_2))$ داریم



شکل ۷.۱۱

$$\partial_2(m(a_0, a_1, a_2)) = m\partial_2(a_0, a_1, a_2) = m[(a_0, a_1) + (a_1, a_2) + (a_2, a_0)].$$

در نتیجه

$$\ker \partial_2 = Z_2(K(s_2)) = 0$$

و

$$\partial_2 \text{ نگاره } = B_1(K(s_2)) = \{m[a_0, a_1] + (a_1, a_2) + (a_2, a_0) : m \in \mathbb{Z}\}$$

بنابراین نگاره ∂_2 با \mathbb{Z} یکرخت است. توجه کنید که

$$\partial_1[(a_0, a_1) + (a_1, a_2) + (a_2, a_0)] = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_0 - a_2) = 0.$$

چون $\partial_2 = 0$ ، $\partial_2 \text{ نگاره } = B_2(K(s_2)) = 0$ و لذا گروه

$$H_2(K(s_2)) = Z_2(K(s_2))/B_2(K(s_2))$$

فقط شامل عنصر همانی است.

۸. مجتمع همبند

فرض می‌کنیم K مجتمع باشد. در این صورت، K را همبند نامند هرگاه اجتماع دو زیرمجتمع ناتهی که هیچ سادک مشترکی ندارند، نباشد. می‌توان نشان داد که K همبند است اگر و فقط اگر چندوجهی $|K|$ همبند باشد. برای اثبات اینکه $H_0(K)$ با گروه جمعی اعداد صحیح یکرخت است، به قضیه بعدی نیاز خواهیم داشت.

قضیه ۴.۱۱ شرط لازم و کافی برای اینکه مجتمع K همبند باشد آن است که به ازای هر دو رأسی از K مانند a و b ، دنباله‌ای از رؤس مانند

$$a_1 (= a), \dots, a_r, a_r (= b)$$

چنان موجود باشد که a_i و a_{i+1} رؤس ۱-سادکی از K باشند.

اثبات. فرض می‌کنیم K همبند باشد و a رأس دلخواهی از K باشد. همچنین فرض می‌کنیم K مجموعه تمام رؤسی از K باشد که بتوان آنها را با دنباله‌هایی به شکل مذکور به a وصل

کرد. در این صورت، مجموعهٔ تمام سادکهای از K که رئوسشان در K باشد، زیرمجمعی مانند L تشکیل می‌دهد.

فرض می‌کنیم M زیرمجموع دیگری باشد که هیچ سادگی در L نداشته باشد (اگر چنین مجموعه‌ای موجود باشد). در این صورت M, L را قطع نمی‌کند. در نتیجه M باید تهی باشد زیرا K همبند است. بنابراین هر دو رأسی از K را می‌توان با دنباله‌ای به شکل مذکور به هم وصل کرد. بالعکس، فرض می‌کنیم هر دو رأسی از K را بتوان با دنباله‌ای، به شکلی که در صورت قضیه بیان شد، به هم وصل کرد. فرض می‌کنیم که K در صورت امکان همبند نباشد. در این صورت، K اجتماع دو زیرمجموع ناتهی مجزا مانند L و M است. فرض می‌کنیم a رأسی از L و b رأسی از M باشد و دنبالهٔ a_1, a_2, \dots, a_r دنبالهٔ وصل‌کنندهٔ a و b باشد. فرض می‌کنیم a_i اولین عضوی از این دنباله باشد که متعلق به M است. در این صورت $i > 1$ و a_{i-1} در L است. بنابراین (a_{i-1}, a_i) سادگی از K نیست. این تناقض نشان می‌دهد که K همبند است.

قضیهٔ ۵.۱۱. فرض می‌کنیم K مجموعه همبند باشد. در این صورت، $H_0(K)$ با گروه جمعی اعداد صحیح یکرخیخت است.

اثبات. فرض می‌کنیم a و b دو رأس از رئوس K باشند. بنابه تعریف، دنباله‌ای مانند

$$a_1(a=p), \dots, a_2, a_{r-1}, a_r(=b)$$

از رئوس K چنان موجود است که a_i و a_{i+1} رئوس 1 -سادگی از K باشند. 1 -سادک $s_i^1 = (a_{i+1}, a_i)$ را در نظر بگیرید، در این صورت

$$\partial_1 s_i^1 = a_i - a_{i+1}.$$

بنابراین

$$\partial_1 \sum_{i=1}^{r-1} u s_i^1 = ua - ub$$

که در آن u می‌تواند هر عدد صحیحی باشد. این رابطه نشان می‌دهد که ua با ub مانسته است و در نتیجه، اگر $\sum u_i s_i^1$ ، چرخهٔ دلخواهی از K باشد، با 0 چرخهٔ $a(\sum u_i)$ مانسته است. لذا هر 0 -چرخه‌ای از K ، به‌ازای عدد صحیح u ای، با ua مانسته است. شایان توجه است که، به‌ازای دو عدد صحیح u و v ، دو 0 -چرخهٔ مجزای ua و va مانسته نیستند. زیرا اگر مانسته باشند، $u - v$ ، 0 -مرز خواهد بود که ممکن نیست زیرا $u \neq v$. بنابراین، تناظری یک‌به‌یک بین

رده‌های مانستگی ۰-چرخه‌ها و مجموعه اعداد صحیح وجود دارد. در این تناظر، اگر u و v با دو رده مانستگی متناظر باشند، آنگاه واضح است که $u + v$ با مجموع آن دو رده متناظر خواهد بود. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $H_0(K)$ با گروه جمعی اعداد صحیح یکرخت است، و لذا قضیه به اثبات می‌رسد.

تمرین

۱. فرض کنید $s_0 = (a_0)$. به‌ازای $p > 0$ ، گروه مانستگی $H_p(K(s_0))$ را مشخص کنید.
۲. فرض کنید s_2 ۲-سادک باشد. نشان دهید $H_0(K(s_2))$ با مجموعه اعداد صحیح مثبت یکرخت است. به‌ازای $p > 0$ ، گروه مانستگی $H_p(K(s_2))$ را مشخص کنید.
۳. فرض کنید s_2 ۲-سادک، و $K_1(s_2)$ ۱-استخوان‌بندی $K(s_2)$ باشد. نشان دهید $H_0(K_1(s_2))$ با $H_1(K_1(s_2))$ و هر یک از این دو با مجموعه اعداد صحیح مثبت یکرخت است. به‌ازای $p > 1$ ، گروه مانستگی $H_p(K_1(s_2))$ را مشخص کنید.
۴. تمام گروه‌های مانستگی طوق

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq (x^2 + y^2)^{1/2} \leq 1\}$$

را بیابید.

۵. نشان دهید به‌ازای $p = 1, 2, 3, \dots$ ، گروه خارج‌قسمتی $C_p(K)/Z_p(K)$ با $B_{p-1}(K)$ یکرخت است.

مانستگی تکین

در این فصل فقط خلاصه‌ای از ایده‌های مبحث مانستگی تکین را ارائه می‌کنیم.

۱. تعاریف

n -ساده متعارف Δ_n زیرفضای

$$\Delta_n = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n\}$$

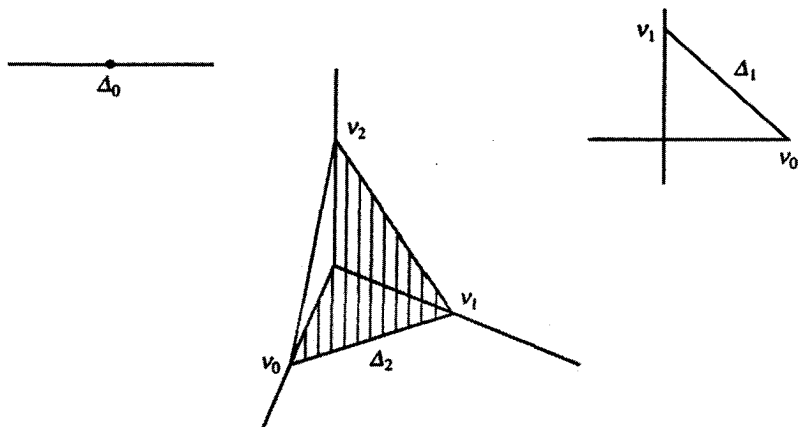
از \mathbb{R}^{n+1} است. رؤس Δ_n نقاط

$$\nu_0 = (1, 0, \dots, 0), \nu_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \nu_n = (0, \dots, 0, 1).$$

هستند.

مثال ۱.۱۲. Δ_0 تک‌نقطه، Δ_1 بازه و Δ_2 ناحیه مثلثی است. این ساده‌ها را در شکل ۱.۱۲ نشان داده‌ایم.

حال n -ساده تکین فضای توپولوژیک را تعریف می‌کنیم.



شکل ۱.۱۲

تعریف ۱.۱۲ فرض می‌کنیم X فضایی توپولوژیک باشد. در این صورت، n -سادک تکین X نگاشتی پیوسته مانند $\phi : \Delta_n \rightarrow X$ است.

مثال ۲.۱۲. n -سادک تکین نقطه‌ای در X است. 1 -سادک تکین اساساً مسیری در X است. زیرا فرض می‌کنیم ϕ ، 1 -سادک تکین باشد، نگاشت f را با ضابطه $f(t) = \phi(1-t, t)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، نگاشت $f : C \rightarrow X$ مسیری از $\phi(v_0)$ و $\phi(v_1)$ است. بالعکس، اگر مسیری مانند $f : C \rightarrow X$ مفروض باشد، آنگاه با تعریف $\phi(x_0, x_1) = f(x_1)$ نگاشت $\phi : \Delta_1 \rightarrow X$ ، 1 -سادک تکین است.

تعریف ۲.۱۲ فرض می‌کنیم J مجموعه‌ای اندیسگذار و $\{\phi_j : j \in J\}$ گردایه تمام n -سادکهای تکین X باشد. در این صورت، عبارتی به شکل

$$\sum_{j \in J} n_j \phi_j$$

که در آن $n_j \in \mathbb{Z}$ و فقط تعدادی متناهی از n_j ها مخالف صفرند، n -زنجیر تکین X نامیده می‌شود.

مجموعه تمام n -زنجیرهای تکین X با $S_n(X)$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۱.۱۲ $S_n(X)$ گروهی آبلی است.

اثبات. جمع دو عضو از $S_n(X)$ را به صورت

$$\sum n_j \phi_j + \sum m_j \phi_j = \sum (n_j + m_j) \phi_j$$

تعریف می‌کنیم. عضو صفر $S_n(X)$ ، $\sum \circ \phi_j$ است و عضو معکوس $\sum (-n_j) \phi_j$ است. اصول موضوع گروه برقرارند و واضح است که این گروه آبلی است.

۲. عملگر مرزی

فرض می‌کنیم ϕ ، n -سادگی تکین باشد. به ازای $i = \circ, 1, \dots, n$ ، $(n-1)$ -سادگی تکین $\partial_i \phi$ را به صورت

$$\partial_i \phi(x_\circ, x_1, \dots, x_{n-1}) = \phi(x_\circ, x_1, \dots, x_{i-1}, \circ, x_i, \dots, x_{n-1})$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین، یک همریختی از گروه $S_n(X)$ به گروه $S_{n-1}(X)$ با ضابطه

$$\sum n_j \phi_j \longrightarrow \sum n_j \partial_i \phi_j$$

است. حال عملگر مرزی $\partial : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ را با ضابطه

$$\partial = \partial_\circ - \partial_1 + \partial_2 - \dots + (-1)^n \partial_n = \sum_{i=\circ}^n (-1)^i \partial_i$$

تعریف می‌کنیم. قضیه بعدی را فقط با استفاده از تعریف ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲.۱۲. $\partial \partial = \circ$

اثبات. فرض می‌کنیم ϕ ، n -سادگی تکین باشد. نشان می‌دهیم $\partial \partial \phi = \circ$ که در آن \circ نمایشگر همانی است. داریم

$$\partial \partial \phi = \partial \sum_{i=\circ}^n (-1)^i \partial_i \phi = \sum_{j=\circ}^{n-1} \sum_{i=\circ}^n (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \phi.$$

اگر $j \leq i$ ، ابتدا نشان می‌دهیم $\partial_i \partial_{j+1} = \partial_j \partial_i$. بدین منظور، متذکر می‌شویم که

$$\begin{aligned} (\partial_j \partial_i \phi)(x_\circ, \dots, x_{n-2}) &= (\partial_j (\partial_i \phi))(x_\circ, \dots, x_{n-2}) \\ &= (\partial_i \phi)(x_\circ, \dots, x_{j-1}, \circ, x_j, \dots, x_{n-2}) \\ &= \phi(x_\circ, \dots, x_{i-1}, \circ, x_i, \dots, x_{j-1}, \circ, x_j, \dots, x_{n-2}) \\ &= (\partial_i \partial_{j+1} \phi)(x_\circ, \dots, x_{n-2}) \end{aligned}$$

و لذا $\partial_j \partial_i = \partial_i \partial_{j+1}$ بنابراین

$$\begin{aligned} \partial \partial \phi &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \phi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \phi \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \partial_i \partial_{j+1} \phi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \phi \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{n-1} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_{i+1} \phi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \phi \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j-1} \partial_j \partial_i \phi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \phi \\ &= 0. \end{aligned}$$

در نتیجه قضیه به اثبات می‌رسد.

۳. چرخه و مرز

تعریف ۳.۱۲ n -زنجیری تکین مانند $\alpha \in S_n(X)$ را n -چرخه نامند هرگاه $\partial \alpha = 0$. مجموعه تمام n -چرخه‌های X را با $Z_n(X)$ نمایش می‌دهند. لذا

$$\partial : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X) \quad \text{که} \quad Z_n(X) = \ker \partial.$$

شایان توجه است که $Z_0(X) = S_0(X)$ ، یعنی تمام 0 -زنجیرهای تکین 0 -چرخه هستند.

تعریف ۴.۱۲ n -زنجیر تکین $\beta \in S_n(X)$ را n -مرز می‌نامند هرگاه به‌ازای زنجیری مانند $\gamma \in S_{n+1}(X)$ $\beta = \partial \gamma$. مجموعه تمام n -مرزهای X را با $B_n(X)$ نمایش می‌دهند. بنابراین

$$\partial : S_{n+1}(X) \longrightarrow S_n(X) \quad \text{که} \quad B_n(X) = \partial S_{n+1}(X).$$

از قضیه ۲.۱۲ نتیجه می‌شود که هر n -مرز n -چرخه است. از قضیه C (فصل ۱۱) و تعاریف فوق نتیجه می‌گیریم که $Z_n(X)$ و $B_n(X)$ زیرگروههایی از X هستند و علاوه بر این، از قضیه ۲.۱۲ نتیجه می‌گیریم که $B_n(X)$ زیرگروه $Z_n(X)$ است.

۴. گروههای مانستگی

تعریف ۵.۱۲. گروه مانستگی m ام X را گروه خارج قسمتی $Z_n(X)/B_n(X)$ تعریف می‌کنند و با $H_n(X)$ نمایش می‌دهند. بنابراین

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X).$$

اگر $\alpha, \beta \in Z_n(X)$ ، آنگاه می‌گوییم α با β هم‌ارز است اگر و فقط اگر $\alpha - \beta \in B_n(X)$ ، و در این صورت می‌نویسیم $\alpha \sim \beta$. به سادگی نتیجه می‌شود که \sim ، یک رابطه هم‌ارزی است و لذا اعضای $H_n(X)$ ، رده‌های هم‌ارزی چرخه‌ها تحت این رابطه هم‌ارزی هستند. اگر $\alpha \sim \beta$ می‌گویند α و β مانسته‌اند.

حال گروههای مانستگی را در حالت‌های ساده‌ای می‌یابیم.

قضیه ۳.۱۲. اگر X فضایی تک‌نقطه‌ای باشد، آنگاه $H_0(X)$ با \mathbb{Z} یکریخت است و به‌ازای هر $n > 0$ ، $H_n(X) = 0$.

اثبات. اگر $n \geq 0$ ، n -سادک تکین منحصر به فرد

$$\phi^{(n)} : \Delta_n \rightarrow X$$

وجود دارد. بنابراین

$$S_n(X) = \mathbb{Z} = \{k\phi^{(n)} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

چون به‌ازای $n > 0$ ، $\partial_i \phi^{(n)} = \phi^{(n-1)}$ پس

$$\begin{aligned} \partial \phi^{(n)} &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i \phi^{(n)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \phi^{(n-1)} \\ &= \begin{cases} \phi^{(n-1)} & \text{اگر } n > 0 \text{ و } n \text{ زوج باشد} \\ 0 & \text{اگر } n > 0 \text{ و } n \text{ فرد باشد} \end{cases} \end{aligned}$$

و $\partial \phi^{(0)} = 0$. از این مطالب به‌دست می‌آوریم

$$Z_n(X) = \begin{cases} S_n(X) & \text{اگر } n \text{ فرد باشد یا } n = 0 \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد و } n > 0 \end{cases}$$

$$B_n(X) = \begin{cases} S_n(X) & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

از این روابط نتیجه می‌گیریم که

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{اگر } n = 0 \\ 0 & \text{اگر } n > 0 \end{cases}$$

بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیه ۴.۱۲ اگر X فضایی مسیری همبند و ناتهی باشد، آنگاه $H_0(X)$ با \mathbb{Z} یکرخت است.

اثبات. هر 0 -چرخه، یعنی 0 -زنجیر تکین به شکل

$$\sum n_x x$$

است که در آن جمع روی عناصر $x \in X$ محاسبه می‌شود و n_x ها اعدادی صحیح‌اند و غیر از تعداد متناهی از آنها، همگی صفرند. نگاشت

$$\psi : H_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

را با ضابطه $\psi(\sum n_x x) = \sum n_x$ تعریف می‌کنیم.

نشان می‌دهیم که ψ خوش‌تعریف است. فرض می‌کنیم $\sum m_x x$ ، 0 -چرخه‌ای باشد که با

$\sum n_x x$ مانسته است، لذا

$$\sum n_x x = \sum m_x x + \partial\alpha$$

که در آن α ، 1 -زنجیری تکین است و در نتیجه α به شکل

$$\alpha = \sum_{j \in J} k_j \phi_j$$

است که در آن $k_j \in \mathbb{Z}$ و ϕ_j ها 1 -ساده‌های تکین هستند. واضح است که

$$\partial\alpha = \sum_{j \in J} k_j \partial\phi_j = \sum_{j \in J} k_j (\phi_j(v_1) - \phi_j(v_0)).$$

$$\begin{aligned}\psi\left(\sum n_x x\right) &= \psi\left(\sum m_x x + \partial\alpha\right) \\ &= \psi\left(\sum m_x x + \sum k_j \phi_j(v_1) - \sum k_j \phi_j(v_0)\right) \\ &= \sum m_x = \psi\left(\sum m_x x\right).\end{aligned}$$

این رابطه نشان می‌دهد که ψ خوش‌تعریف است. همریختی بودن ψ به سادگی نتیجه می‌شود. همچنین، ψ پوشاست زیرا به‌ازای هر نقطه $x \in X$ ، $\psi(nx) = n$. بالاخره، نشان می‌دهیم که ψ یک‌به‌یک است. اگر $\sum n_x x$ ، \circ -چرخه باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\sum n_x x &= \left(\sum n_x\right) x_0 + \sum_{x \in X} (n_x x - n_x x_0) \\ &= \left(\sum n_x\right) x_0 + \partial\left(\sum_{x \in X} n_x \phi_x\right)\end{aligned}$$

که در آن ϕ_x ، \circ -سادگی تکین است، یعنی مسیری از x به x_0 است. بنابراین $\sum n_x x$ و $\left(\sum n_x\right) x_0$ مانسته هستند و در نتیجه اگر $\psi\left(\sum n_x x\right) = \circ$ آنگاه $\sum n_x = \circ$. لذا ψ یک‌به‌یک است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

۵. همریختی القایی

فرض می‌کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک و $f: X \rightarrow Y$ نگاشتی پیوسته باشد. $H_n(X)$ و $H_n(Y)$ را در نظر می‌گیریم و نگاشت $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ را با ضابطه

$$f_*\left(\sum_{j \in J} n_j \phi_j\right) = \sum_{j \in J} n_j f \phi_j$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $\sum_{j \in J} n_j \phi_j$ ، n -چرخه‌ای از X است. در این صورت واضح است که f_* یک همریختی بین گروه‌های مانستگی n -ام است

$$f_*: H_n(X) \longrightarrow H_n(Y).$$

این نگاشت را همریختی القایی می‌نامند.

اگر نگاشت $f : X \rightarrow Y$ بیوسته باشد، نگاشت $f_{\#} : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$ را با ضابطه

$$f_{\#} \left(\sum_{j \in J} n_j \phi_j \right) = \sum_{j \in J} n_j f \phi_j$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، $f_{\#}$ همریختی گروه‌هاست.

قضیه ۵.۱۲ $\partial f_{\#} = f_{\#} \partial$

اثبات. اگر ϕ ، $(n-1)$ -سادک باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} ((\partial_i f_{\#})(\phi))(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) &= \partial_i(f\phi)(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &= (f\phi)(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, \circ, x_i, \dots, x_{n-1}) \\ &= f((\partial_i \phi)(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})), \\ &= (f \partial_i \phi)(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), \\ &= ((f_{\#} \partial_i)(\phi))(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

فرض ۱.۱۲ $f_{\#}$ چرخه را به چرخه و مرز را به مرز می‌نگارد.

قضیه ۶.۱۲ فرض می‌کنیم $f, g : X \rightarrow Y$ نگاشتهایی بیوسته باشند. اگر f و g هوموتوپیک باشند آنگاه $f_* = g_*$ ، که در آن نگاشتهای

$$f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y), g_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y) \quad n \geq 0$$

همریختیهای القایی هستند.

اثبات. به ازای $t \in C$ ، نگاشت $\lambda_t : X \rightarrow X \times C$ را با ضابطه $\lambda_t(x) = (x, t)$ تعریف می‌کنیم. اگر $F : X \times C \rightarrow Y$ یک هوموتوپیک از f به g باشد، آنگاه

$$F(x, \circ) = f(x), \quad F(x, \mathbb{1}) = g(x)$$

این روابط را می‌توان با استفاده از λ_t به صورت

$$F \lambda_{\circ} = f, \quad F \lambda_{\mathbb{1}} = g$$

نوشت. متذکر می‌شویم که اگر $\lambda_{0*} = \lambda_{1*}$ ، آنگاه به سادگی می‌توان نشان داد (قضیه ۴.۶ را ببینید) که

$$f_* = (F\lambda_0)_* = F_*\lambda_{0*} = F_*\lambda_{1*} = (F\lambda_1)_* = g_*$$

و لذا کافی است نشان دهیم

$$\lambda_{0*} = \lambda_{1*} : H_n(X) \longrightarrow H_n(X \times C).$$

نشان خواهیم داد که به‌ازای هم‌ریختیهای

$$\lambda_{0\#}, \lambda_{1\#} : S_n(X) \longrightarrow S_n(X \times C)$$

یک هم‌ریختی (به نام عملگر منشور) مانند

$$P : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X \times C)$$

با این ویژگی وجود دارد که $\partial P + P\partial = \lambda_{1\#} - \lambda_{0\#}$.

در این حالت، می‌گوییم هم‌ریختیهای $\lambda_{1\#}$ و $\lambda_{0\#}$ هوموتوپیک زنجیری‌اند.

فرض می‌کنیم $\lambda_{0\#}$ و $\lambda_{1\#}$ هوموتوپیک زنجیری باشند و α ، n -چرخه‌ای از X باشد.

در این صورت، به‌دست می‌آوریم

$$(\lambda_{1\#} - \lambda_{0\#})(\alpha) = (\partial P + P\partial)(\alpha) = \partial(P\alpha)$$

و این رابطه نشان می‌دهد که $\lambda_{0\#}\alpha$ و $\lambda_{1\#}\alpha$ مانسته هستند، یعنی $\lambda_{1*} = \lambda_{0*}$. بنابراین برای اثبات

قضیه، کافی است نشان دهیم λ_{1*} و λ_{0*} هوموتوپیک زنجیری هستند و بدین منظور باید عملگر

منشور P را تعریف کنیم. فرض می‌کنیم $\phi : \Delta_n \rightarrow X$ ، n -ساده‌تکین، یعنی عضو $S_n(X)$

باشد. $S_{n+1}(X \times C)$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم هر $P_i(\phi)$ ، $i = 0, 1, \dots, n$

عضوی از $S_{n+1}(X \times C)$ با ضابطه

$$P_i(\phi)(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$$

$$= \phi(x_0, x_1, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}) \times \left(1 - \sum_{k=0}^i x_k\right)$$

باشد، و عضو $P(\phi) \in S_{n+1}(X \times C)$ نگاشتی به صورت

$$P(\phi) = \sum_{i=0}^n (-1)^i P_i(\phi)$$

باشد. می‌توانیم نشان دهیم نگاشت $P : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times C)$ که به این صورت تعریف شد، همریختی است.

می‌توان $\partial P(\phi)$ را به شکل

$$\partial P(\phi) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \partial_j P(\phi) = \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} \partial_j P_i(\phi)$$

نوشت. همچنین می‌توان $\partial_j P_i(\phi)$ را به شکل دیگری نوشت. اگر $i < j - 1$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \partial_j P_i(\phi)(x_0, \dots, x_n) &= P_i(\phi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n) \\ &= \phi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{j-1}, 0, \dots, x_n) \\ &\quad \times \left(1 - \sum_{k=0}^i x_k \right) \\ &= \partial_{j-1} \phi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \\ &\quad \times \left(1 - \sum_{k=0}^i x_k \right) \\ &= P_i \partial_{j-1}(\phi)(x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

اگر $j > i$ ، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \partial_j P_i(\phi)(x_0, \dots, x_n) &= P_i(\phi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n) \\ &= \phi(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, \dots, x_{i-2}, x_{i-1} + x_i, x_{i+1}, x_n) \\ &\quad \times \left(1 - \sum_{k=0}^{i-1} x_k \right) \\ &= \partial_j \phi(x_0, \dots, x_{i-2}, x_{i-1} + x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &\quad \times \left(1 - \sum_{k=0}^{i-1} x_k \right) \\ &= P_{i-1} \partial_j(\phi)(x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

اگر $i = j$ آنگاه

$$\begin{aligned} \partial_j P_j(\phi)(x_0, \dots, x_n) &= P_j(\phi)(x_0, \dots, x_{j-1}, \circ, x_j, \dots, x_n) \\ &= \phi(x_0, \dots, x_n) \times \left(1 - \sum_{k=0}^{j-1} x_k \right) \\ &= \partial_j P_{j-1}(\phi)(x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

حاصل مطالب فوق این است که

$$\begin{aligned} \partial_j P_j &= \partial_j P_{j-1} \\ \partial_j P_j &= P_i \partial_{j-1} \quad i < j - 1 \\ \partial_j P_i &= P_{i-1} \partial_j \quad i > j. \end{aligned}$$

حال ∂P را به صورت زیر می نویسیم

$$\begin{aligned} \partial P &= \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} \partial_j P_i \\ &= \partial_0 P_0 + \sum_{i=j=1}^n \partial_j P_j + \sum_{i=j-1=0}^n (-1)^{i+j} \partial_j P_{j-1} - \partial_{n+1} P_n \\ &\quad + \sum_{i>j} (-1)^{i+j} \partial_j P_i + \sum_{i<j-1} (-1)^{i+j} \partial_j P_i. \end{aligned}$$

با استفاده از روابط فوق، پس از محاسبات لازم، به دست می آوریم

$$\partial P = \partial_0 P_0 - \partial_{n+1} P_n - P \partial.$$

لیکن داریم

$$\begin{aligned} \partial_0 P_0(\phi)(x_0, \dots, x_n) &= P_0(\phi)(\circ, x_0, \dots, x_n) \\ &= \phi(x_0, \dots, x_n) \times 1 \\ &= \lambda_{1\#}(\phi)(x_0, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} P_n(\phi)(x_0, \dots, x_n) &= P_n(\phi)(x_0, \dots, x_n, \circ) \\ &= \phi(x_0, \dots, x_n) \times \circ \\ &= \lambda_{\circ\#}(\phi)(x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\partial P + P\partial = \lambda_{1\#} - \lambda_{\circ\#}.$$

این رابطه نشان می‌دهد که $\lambda_{\circ\#}$ و $\lambda_{1\#}$ هموتوپیک زنجیری هستند و لذا اثبات قضیه به انجام می‌رسد.

۶. دنبالهٔ مایر-ویتوریس

اگر X فضای توپولوژیک باشد، فرض می‌کنیم $X = U_1 \cup U_2$ ، که در آن U_1 و U_2 زیرمجموعه‌های بازی از X هستند. فرض می‌کنیم نگاشتهای

$$\phi_i : U_1 \cap U_2 \longrightarrow U_i \quad (i = 1, 2)$$

$$\psi_i : U_i \longrightarrow X$$

نگاشتهای مشمولیت باشند. حال هم‌ریختیهای i و j را

$$i : H_k(U_1 \cap U_2) \longrightarrow H_k(U_1) \oplus H_k(U_2)$$

$$j : H_k(U_1) \oplus H_k(U_2) \longrightarrow H_k(X)$$

با ضابطهٔ

$$i(\alpha) = (\phi_{1*}(\alpha), \phi_{2*}(\alpha))$$

$$j(\alpha_1, \alpha_2) = \psi_{1*}(\alpha_1) - \psi_{2*}(\alpha_2)$$

تعریف می‌کنیم.

قضیهٔ بعدی را که به طرق مختلفی در نظریهٔ مانستگي کاربرد دارد، ثابت نخواهیم کرد؛ فقط یکی از کاربردهای آن را ارائه خواهیم کرد.

قضیهٔ ۷.۱۲ فرض می‌کنیم $X = U_1 \cup U_2$ ، که در آن U_1 و U_2 زیرمجموعه‌های بازی از X

هستند. می‌توان هم‌ریختیهای

$$\Delta : H_k(X) \longrightarrow H_{k-1}(U_1 \cap U_2)$$

را چنان یافت که در دنبالهٔ گروهها و هم‌ریختیهای زیر

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{k+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{i} H_k(U_1) \oplus H_k(U_2) \xrightarrow{j} \\ \xrightarrow{j} H_k(X) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

هستهٔ هر هم‌ریختی برابر با نگارهٔ هم‌ریختی قبل از خود باشد.

هم‌ریختیهای Δ ی فوق را هم‌ریختیهای رابط و دنبالهٔ قضیهٔ ۷.۱۲ را دنبالهٔ مایرویتوریس^۱ می‌نامند.

تعریف ۶.۱۲ دنباله‌ای از گروهها و هم‌ریختیها را که در آن هستهٔ هر هم‌ریختی برابر با نگارهٔ هم‌ریختی قبل از خود باشد دنبالهٔ کامل می‌نامند.

از قضیهٔ ۷.۱۲ نتیجه می‌شود که دنبالهٔ مایرویتوریس دنباله‌ای کامل است.

قضیهٔ ۸.۱۲ اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به‌علاوه اگر $T_n : S^n \rightarrow S^n$ نگاشت بازتابی

$$T_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$$

باشد، آنگاه نگاشت

$$T_{n*} : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$$

هر عنصری را بر حاصلضرب آن عنصر در -1 می‌نگارد.

اثبات. با استفاده از دنبالهٔ مایرویتوریس، قضیه را به استقرا ثابت می‌کنیم. اگر

$$U_1 = \left\{ x \in S^n : x_n > -\frac{1}{4} \right\}, \quad U_2 = \left\{ x \in S^n : x_n < \frac{1}{4} \right\}$$

آنگاه U_1 و U_2 انقباض پذیرند و $U_1 \cap U_2$ با S^{n-1} هموتوپی هم ارز است. لذا

$$H_k(U_i) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$H_k(U_1 \cap U_2) = H_k(S^{n-1}) \text{ و}$$

قبل از شروع استقرای متذکر می شویم که اگر S^{n-1} را به صورت $\{x \in S^n : x_n = 0\}$ در نظر بگیریم، آنگاه $T_n|_{S^{n-1}} = T_{n-1}$

فرض می کنیم $n = 1$. در این صورت به ازای $k = 1$ ، دنباله مایر-ویتوریس به صورت زیر است

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{j} H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_0(S^0) \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \dots$$

که با $i(x, y) = (x + y, x + y)$ ، به صورت زیر در می آید

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{j} H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \dots$$

چون $\ker(\Delta) = \text{im}(j) = 0$ ، Δ یک به یک است و به علاوه گروه

$$\text{im}(\Delta) = \ker(i) = \{(x, -x) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}$$

با \mathbb{Z} یکرخت است. لذا $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$

چون $T_{0*} = \Delta T_{1*}$ و به وضوح $T_{0*}(x, y) = (y, x)$ ، مشاهده می کنیم که T_{1*} هر عنصری را بر حاصل ضرب آن عنصر در -1 می نگارد. اگر $k > 1$ ، دنباله مایر-ویتوریس به صورت زیر است

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{i} H_k(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(S^0) \xrightarrow{j} 0 \longrightarrow \dots$$

حال $\ker(\Delta) = \text{im}(i)$ و لذا Δ یک به یک است و چون $\text{im}(\Delta) = \ker(j)$ پوشاست. در نتیجه Δ یکرختی است. بنابراین قضیه به ازای $n = 1$ درست است.

حال فرض می کنیم $m > 1$ و قضیه به ازای $n = m - 1$ برقرار باشد. باید نشان دهیم که قضیه به ازای $n = m$ برقرار است.

اگر $k = 1$ ، دنباله مایر-ویتوریس به صورت زیر است

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{j} H_1(S^m) \xrightarrow{\Delta} H_0(S^{m-1}) \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \dots$$

که با دنباله

$$\dots \longrightarrow \circ \xrightarrow{j} H_1(S^m) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \dots$$

که در آن $i(a) = (a, a)$ معادل است. بنابراین $\ker(i) = \circ$ و در نتیجه $\text{im}(\Delta) = \circ$ و لذا $H_1(S^m) = \circ$.

اگر $k > 1$ ، دنباله مورد نظر به صورت زیر است

$$\dots \longrightarrow \circ \xrightarrow{j} H_k(S^m) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(S^{m-1}) \xrightarrow{i} \circ \dots$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $H_k(S^m)$ با $H_{k-1}(S^{m-1})$ یکرخت است. اگر $k = m$ ، آنگاه با استفاده از رابطه

$$T_{m-1*}\Delta = \Delta T_{m*}$$

می‌توانیم نشان دهیم که T_{m*} هر عنصر را بر حاصلضرب آن عنصر در -1 می‌نگارد. بنابراین درستی قضیه به استقرا نتیجه می‌شود.

تمرین

۱. اگر نگاشت $f : X \rightarrow Y$ هم‌ارزی هوموتوپی باشد، نشان دهید به ازای $n \geq 0$ نگاشت

$$f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$

یکریختی است.

۲. فرض کنید A درون برد X ، و $i : A \rightarrow X$ نگاشت مشمولیت باشد. نشان دهید نگاشت

$$i_* : H_n(A) \longrightarrow H_n(X)$$

تکریختی است.

۳. اگر نگاشت $g : X \rightarrow A$ درون‌بری باشد، که در آن A درون برد X است، نشان دهید

$$H_n(X) = \text{im}(i_*) \oplus \ker(g_*)$$

(i_* نگاشت مذکور در تمرین ۲ است).

۴. نشان دهید $H_1(S^1)$ با \mathbb{Z} یکرخت است.

۵. با استفاده از دنباله مایر-ویتوریس، گروه مانستگی $\mathbb{R}P^2$ را مشخص کنید.

۶. نشان دهید هیچ درون‌بری از D^n به روی S^{m-1} موجود نیست.

1. V.K. Balachandran, Topological Algebras, Narosa Publishing House, New Delhi, 1999.
2. W. Fulton, Algebraic topology, Springer-Verlag 1995.
3. B. Gray, Homotopy theory, Academic Press, 1975.
4. M. Greenberg and J.R. Harper, Algebraic Topology: A first course, Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1981.
5. J.G. Hocking and G.S. Young, Topology, Addison-Wesley Pub. Co., 1961.
6. C. Kosniowski, A first course in Algebraic Topology, 1979.
7. S. MacLane, Homology, Springer-Verlag, 1963.
8. G. McCarty, Topology, McGraw-Hill Book Co. 1967.
9. W.S. Massey, Algebraic Topology, Harcourt, Brace & World, Inc. 1967.
10. W.S. Massey, A basic course in algebraic topology, Springer-Verlag, 1991.
11. C.R.F. Maunder, Algebraic topology, Van Nostrand Reinhold Co., 1970.
12. J.P. May, Equivalent Homotopy and Cohomology theory, Amer. Math. Soc., 1996.
13. G.L. Naber, Topological methods in Euclidean spaces, Camb. Univ. Press, 1979.
14. E.M. Patterson, Topology, Oliver and Boyd Ltd., 2nd edition, 1959.
15. L.S. Pontryagin, Foundations of combinatorial topology, Graylock Press, 1952.
16. F.H. Spanier, Algebraic Topology, Tata McGraw-Hill Pub. Co. Ltd., 1977.
17. A.H. Wallace, Algebraic Topology, Pergamon Press, 1961.

واژه‌نامهٔ انگلیسی-فارسی

ascending sequence	دنبالهٔ صعودی
barycentric subdivision	افراز گرانیگاهی
base point	نقطهٔ پایه مته: نقطهٔ پایه‌ای
contractible	انتقباض‌پذیر
covering projection	تصویرگر پوششی
cycle	چرخه
deformable	دگر‌دیی‌پذیر
deformation retract	درون‌برد دگر‌دیی
evenly	به‌طور هموار [در مورد پوشاندن]
factor group	گروه خارج‌قسمتی
fibration	تاربندی
finitely generated	متناهی‌مولد
forgetful functor	ناهمگون نادیده‌گیر
fundamental group	گروه بنیادی
geometrically independent	هندسی‌مستقل
geometric p -simplex	p -سادهک هندسی

geometric simplicial complex	مجتمع سادکی هندسی
incidence matrix	ماتریس تلازم
incidence number	عدد تلازم
incident	متلازم
inclusion map	نگاشت مشمولیت
lift (of a continuous map)	ترفیع (نگاشت پیوسته)
lifting \rightarrow lift	
morphism	ریختار
null homotopic	هوموتوپیک بوج
null path	مسیر بوج
prism operator	عملگر منشور
product path	مسیر حاصلضرب
projection	تصویرگر
properly discontinuous	ناپیوسته سره
quotient group \rightarrow factor group	
quotient set	مجموعه خارج قسمتی
quotient space	فضای خارج قسمتی
quotient topology	توپولوژی خارج قسمتی
simplicial vertex mapping	نگاشت رأس سادکی
spanned	مت: نگاشت سادک رأسی
standard p -dimensional complex	پدیدآمده
standard p -simplex	مجتمع p -بعدی متعارف
strong deformation retract	p -سادک متعارف
trivial group	درون برد دگردیسی قوی
unique path lifting	گروه بدیهی
	ترفیع مسیری منحصر به فرد

واژه‌نامه فارسی-انگلیسی

barycentric subdivision	افراز گرانیگاهی
contractible	انقباض پذیر
evenly	به طور هموار [در مورد پوشاندن]
spanned	پدید آمده
forgetful functor	تابعگون نادیده گیر
fibration	تار بندی
lift (of a continuous map) syn: lifting	ترفیع (نگاشت پیوسته)
unique path lifting	ترفیع مسیری منحصر به فرد
projetion	تصویرگر
covering projetion	تصویرگر پوششی
quotient topology	توپولوژی خارج قسمتی
cycle	چرخه
deformation retract	درون برد دگردیسی
strong deformation retract	درون برد دگردیسی قوی
deformable	دگردیسی پذیر
ascending sequence	دنباله صعودی
morphism	ریختار

standard p -simplex	p -سادک متعارف
geometric p -simplex	p -سادک هندسی
incidence number	عدم تلازم
prism operator	عملگر منشور
quotient space	فضای خارج قسمتی
trivial group	گروه بدیهی
fundamental group	گروه بنیادی
factor group	گروه خارج قسمتی
syn: quotient group	
incidence matrix	ماتریس تلازم
incident	متلازم
finitely generated	متناهی مولد
standard p -dimensional complex	مجتمع p -بعدی متعارف
geometric simplicial complex	مجتمع سادکی هندسی
quotient set	مجموعه خارج قسمتی
null path	مسیر پوچ
product path	مسیر حاصلضرب
properly discontinuous	ناپیوسته سره
base point	نقطه پایه
simplicial vertex mapping	نقطه پایه‌ای ← نقطه پایه نگاشت رأس سادکی
inclusion map	نگاشت سادک رأسی ← نگاشت رأس سادکی نگاشت مسمولیت
geometrically independent	هندسی مستقل
null homotopic	هوموتوپیک پوچ

نمایه

بستار ۸	آبلی (گروه) ۱۴
بسته	آزاد ۱۴
مجموعه ۸	ابر صفحه (پ-بعدی) ۹۰
مسیر ۳۹	استخوان بندی ۱۰۰
نگاشت ۱۱	اسکالر ۶
بعد	افراز گرانیگاهی ۱۰۸
توپولوژیک ۱۰۴	الحاقی (نگاشت) ۱۲
سادک ۹۵	القایی
مجتمع ۹۹	توپولوژی ۸
به طور هموار پوشاندن ۷۱	همریختی ۵۲
پادردا (تابعگون) ۱۷	انتقاض پذیر (فضا) ۲۸
پاره خط ۷	باز
پایه (مسیر) ۴۷	پوشش ۹
پایه فضای برداری ۶	مجموعه ۸
پدیدآمده (زیرفضا) ۷	نگاشت ۱۱
پوچ	بردار ۶
مسیر ۳۴	بروریختی ۱۴
تابع هوموتوپیک ۲۱	

۱۳۱-سادک	پوشا (تابع) ۱۰
تلازم	پوشاندن (به طور هموار) ۷۱
عدد ۱۲۰	پوشش
ماتریس ۱۲۱	باز ۹
توپولوژی ۸	متناهی ۹
القای ۸	پوششی
خارج قسمتی ۱۲	تصویرگر ۷۱
نسبی ۸	فضا ۷۱
توپولوژیک	نگاشت ۷۱
بعد ۱۰۴	تابع
تبدیل ۱۱	ضرایب ۱۱۸
چندوجهی ۹۹	عنصر ۱۱۷
فضا ← فضا(های توپولوژیک)	تابع ۹
نگاشت ۱۱	تابع خطی ۱۱
تهی (مجموعه) ۵	تابعگون ۱۷
جهت سادک ۹۸	پادوردا ۱۷
جهت دار	نادیده‌گیر ۱۸
سادک ۱۲۳	هموردا ۱۷
مجموع ۱۰۰	تار ۸۳
جهت دهی سادک ۹۸	تاریندی ۸۳
۱۳۳-چرخه(ها)	ترفع
مانسته ۱۳۴	مسیری منحصر به فرد ۸۴
D-چرخه(ها) ۱۲۴	نگاشت پیوسته ۷۸
مانسته ۱۲۵	ویژگی ← ویژگی ترفع
چنبره ۶۷	تصویرگر ۱۲
چندوجهی ۹۹	پوششی ۷۱
توپولوژیک ۱۰۲	تصویری (م-فضا) ۱۲
حاصلضرب	تعویض پذیر (گروه) ۱۴
دکارتی ۵	تکریختی ۱۳
مستقیم ۵	تکین
	م-زنجیر ۱۳۱

رابطه ۵	مسیر ۳۵
هم‌ارزی ۵	حقیقی
رتبه ۱۱۸	فضای برداری ۶
رده	n-فضای تصویری ۱۲
مانستگی ۱۲۵	خارج قسمتی
هم‌ارزی ۶	توپولوژی ۱۲
هوموتوپیی نگاشتهای بیوسته ۲۴	فضا ۷۵
هوموتوپیی مسیرها ۴۷	گروه ۱۴
رسته ۱۵	مجموعه ۷۵
ریختار ۱۶	خطی (تبدیل، عملگر، نگاشت) ۱۱
همانی ۱۶	خطی مستقل ۷
	خطی وابسته ۷
p-زنجیر(ها) ۱۱۸	درجه نگاشت ۶۹
گروه ۱۱۹	درون برد ۳۱
مرز ۱۲۲	دگردیسی ۳۱
n-زنجیر تکین ۱۳۱	دگردیسی قوی ۳۱
p-زنجیری (گروه) ۱۱۹	درون بری ۳۱
زیرفضا ۷	دکارتی (حاصلضرب) ۵
پدیدآمده ۷	دگردیسی ۲۵
زیرگروه ۱۴	درون برد ۳۱
نرمال ۱۴	درون برد قوی ۲۱
زیرمجموعه ۱۰۰	دگردیسی پذیر ۲۸
سادک ۹۴	دنباله
بعد ۹۵	صعودی ۱۰۸
جهت ۹۸	کامل ۱۴۲
جهت دار ۹۸	مایر-ویتوریس ۱۴۲
جهت دهی ۹۸	دوری (گروه) ۱۴
رئوس ۹۵	دوسویی (تابع) ۱۰
مرز ۱۲۲، ۹۵	دوگان
وجه ← ناوجه سادک	فضا ۱۲
ناوجه ۹۶	نگاشت ۱۲

غلاف محدب ۸	وجه سره ۹۶
فشرده (مجموعه) ۷	D-سادک ۹۴
فضا(های برداری) ۶	n-وجه ۹۶
حقیقی ۶	هندسی ۹۴
دوگان ۱۲	هندسی باز ۹۴
متناهی بعد ۷	هندسی بسته ۹۴
مجموع مستقیم ۷	n-سادک تکین ۱۳۱
مختلط ۶	n-سادک متعارف ۱۳۰
فضا(های توپولوژیک) ۸	سادکی (نگاشت) ۱۰۳
انتقاض پذیر ۲۸	ساده (کمان) ۱۹
پایهٔ تار بندی ۸۳	ساده همبند ۵۷
پایهٔ نگاشت پوششی ۷۱	سره (وجه) ۹۶
پوششی ۷۱	شرکت پذیری ۱۳
تاری هورویچ ۸۳	صفر (عضو) ۶
خارج قسمتی ۷۵	ضرایب تاب ۱۱۸
کلی تار بندی ۸۳	طوقه ۴۷
مسیری همبند ۳۵	عدد تالرم ۱۱۹
موضعیاً همبند ۹	عدد لیگ ۱۰۵
مؤلفه ۹	عضو صفر ۶
هم‌ارز هوموتوپی ۳۰	عضو همانی ۱۳
همبند ۹	عمل
همسانریخت ۱۱	دوتایی ۱۳
G-فضا ۷۴	گروه روی مجموعه ۷۴
n-فضای تصویری حقیقی ۱۲	نایبوستهٔ سره ۷۶
قطر (مجموع) ۱۱۱	عملگر
کمان ساده ۱۹	خطی ۱۱
گرانیگاه ۱۰۸	مرزی ۱۳۲
گرانیگاهی	منشور ۱۳۸
افراز ۱۰۸	عنصر تاب ۱۱۷

مختصات ۹۳	متناهی مولد (گروه) ۱۱۷
گروه (ها) ۱۴	مثلث بندی (چندوجهی) ۱۰۱
آبلی ۱۴	مجتمع ۹۹
آبلی آزاد ۱۴	افراز گرانیگاهی ۱۰۸
بدیهی ۱۳	بعد ۹۹
بنیادی ۴۸	D -بعدی متعارف ۹۹
تعویض پذیر ۱۴	جهت دار ۱۰۰
خارج قسمتی ۱۴	سادگی هندسی ۹۹
دوری ۱۴	قطر ۱۱۲
D -زنجیرها ۱۱۹	همبند ۱۲۷
D -زنجیری ۱۱۹	مجموع مستقیم (فضاهای برداری) ۷
عمل روی مجموعه ۷۴	مجموعه (ها)
مانستگی m ام ۱۳۴	باز ۸
مانستگی p ام ۱۲۶	بسته ۸
مولد ۱۴	تهی ۵
یکریخت ۱۳	حاصلضرب دکارتی ۵
ماتریس تلازم ۱۲۱	حاصلضرب مستقیم ۵
مانستگی (رده) ۱۲۶	خارج قسمتی ۷۵
مانستگی m ام (گروه) ۱۳۴	فشرده ۹
مانستگی p ام (گروه) ۱۲۶	محدب ۷
مانسته	G -مجموعه ۷۴
n -چرخه ها ۱۳۳	محدب
p -چرخه ها ۱۲۵	غلاف ۸
مایر-ویتوریس (دنباله) ۱۴۲	مجموعه ۷
متعارف	محمل ۹۹
n -سادک ۱۳۰	مختصات گرانیگاهی ۹۳
مجتمع D -بعدی ۹۹	مدار ۷۵
متقاطر (نقطه) ۷۲	مرتبه
متلازم (سادکها) ۱۲۰	پوشش ۱۰۴
متناهی (پوشش) ۹	عضو گروه ۱۴
متناهی بعد (فضای برداری) ۷	گروه ۱۴

نسی	نامتناهی عضوگروه ۱۴
توپولوژی ۸	مرز
هوموتوپیک ۲۶	زنجر ۱۲۲
نقطه	سادک ۱۲۲، ۹۵
پایه ۴۷	n-مرز ۱۳۳
پایه‌ای ۴۷	مرزی (عملگر) ۱۳۲
مقاطر ۷۲	مستقیم
نگاشت(ها) ۹	حاصلضرب ۵
الحاقی ۱۲	مجموع ۷
باز ۱۱	مسیر(ها)
بسته ۱۱	بسته ۳۹
پوششی ۷۱	ه. پایه ۴۷
پیوسته ۱۰	پوچ ۳۴
تصویرگر ۱۲	حاصلضرب ۳۵
توپولوژیک ۱۱	معکوس ۳۴
خطی ۱۱	هم‌ارز ۳۹
درجه ۶۹	هوموتوپیک ۴۰
دوگان ۱۲	مسیری همبند
رأس سادکی ۱۰۴	فضا ۳۵
سادک رأسی ۱۰۴	مؤلفه ۳۵
مرکب ۱۰	معکوس
مشمولیت ۹	چپ ریختار ۱۶
همانی ۹	راست ریختار ۱۶
هوموتوپیک ۲۱	مسیر ۱۰
هوموتوپیک با ثابت ۲۸	منشور (عملگر) ۱۳۸
هوموتوپیک پوچ ۲۸، ۲۱	موضِعاً همبند (فضا) ۹
هوموتوپیک نسبی ۲۱	مولد (گروه) ۱۴
	مؤلفه (فضا) ۹
وجه سادک ← h-وجه سادک	مسیری همبند ۳۵
h-وجه سادک ۹۶	
وجه سره سادک ۹۶	ناپیوسته سره (عمل گروه روی فضا) ۷۶
ویژگی ترفیع	نرمال (زیرگروه) ۱۴

همسانریختی ۱۱	منحصر به فرد ۸۳
همسانریختی موضعی ۷۳	هوموتویی ۸۲
همسایگی ۸	هسته ۱۳
هم مجموعه چپ ۱۴	همانی
هموردا (تابعگون) ۱۷	ریختار ۱۶
هندسی (p-سادک) ۹۴	عضو ۱۳
هندسی باز (p-سادک) ۹۴	نگاشت ۹
هندسی بسته (p-سادک) ۹۴	همارز (مسیرها) ۳۹
هندسی مستقل (مجموعه) ۹۰	همارز هوموتویی (فضاها) ۳۰
هوموتویی ۲۰	همارزی
رده ۴۷، ۲۴	رابطه ۵
همارزی ۳۰	رده ۶
نوع ۳۰	همارزی هوموتویی (نگاشت) ۳۰
هوموتوپیک ۲۰	همبند
با ثابت ۲۹	زیرمجموعه ۹
بوج ۲۸، ۲۱	فضا ۹
زنجیری ۱۳۸	مجتمع ۱۲۷
مسیرها ۴۰	همریختی (ها) ۱۳
نسبی ۲۶	القایی ۱۳۶، ۵۲
یک به یک (تابع) ۱۰	رابط ۱۴۲
یکریخت (گروهها) ۱۳	هوموتوپیک زنجیری ۱۳۸
یکریختی ۱۳	همسانریخت (فضاها) ۱۱