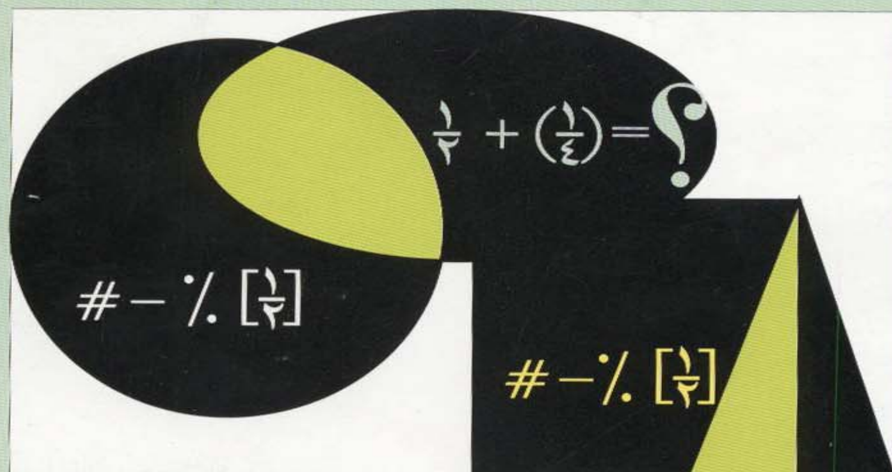
دانشگاه پیام نور

ریاضیات پایه

لیدا فرخو



نسخهٔ آزمایشی

نـــام درس: ریاضیات وکاربرد آن در مدیریت(1)

تعداد واحد: 3 واحد

نام منـــبع : ریاضیات پایه

مؤلـــــــف: لیـــدا فـــرخو

تهیه کننده: مهدی صحت خواه

ناشــــــــر: دانشگاه پیـــــام نور

هدف کلی درس

هدف كلي اين درس آموزش مباحثی از رياضيات است كه دانشجويان رشته های رشته های علوم انسانی دردروس تخصصی خود به آنها نياز خواهند داشت.

مباحث کتاب

برای نیل به اهداف کلی ،مباحث زیر درشش فصل تدوین شده است.

فصل اول: نظریه مجموعه ها

که شامل 44 اسلاید می باشد.

فصل دوم: دستگاههای مختصات

که شامل 47 اسلاید می باشد.

فصل سوم: رابطه وتابع

که شامل 69 اسلاید می باشد.

فصل چهارم: حد وپیوستگی توابع

که شامل 71 اسلاید می باشد.

فصل پنجم: مشـــتق

که شامل 71 اسلاید می باشد.

فصل ششم: کاربردهای مشتق

که شامل 74 اسلاید می باشد.

در آغاز هر فصل نکاتی به عنوان راهنمای مطالعه وهدف کلی آمده است،که به

شما کمک می کند تا منظور کل آن فصـــل را دریابید،درقسمتی که با عنوان

هدف های رفتاری وآموزشی مشخص شده است ،ازشما انتظارمی رود که پس

ازپایان مطالعه هرفصل مطالبی را که یادگرفته اید با توجه به هدف های رفتاری بسنجید.

یادگیری می تواند مثلا“ بیان یک مفهوم ،مقایسه دو مفهوم بایکدیگر، توضیح یک

قضیه نتیجه گیری ازیک مطلب، یا حل یک مسئله باشد.نظر به پیوستگي مفاهیم

ریاضی ،تا زمانی که به هدف های یک فصل نایل نشده اید،و مسائل آن فصل را

حل نکرده اید به فصل بعدی نپردازید.

فصـــل اول

نظریه مجموعه ها

هدف کلی:

هدف کلی این فصل این است که با مفهوم مجموعه ،انواع آن،اعمال جبری روی مجموعه ها،و ویژگی های این اعمال آشنا شوید.

هدفهای رفتاری:

از شما انتظار می رود پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:

1. مجموعه هاراشناسایی کنید.

2. عضوهای مجموعه های داده شده راتعیین کنید.

3. زیرمجموعه های هر مجموعه داده شده راتعیین کنید.

4. مجموعه تهی راشناسایی کنید.مثال هایی از مجموعه تهی بیاورید.

5. اعمال جبری روی مجموعه هاراتعریف کنیدوبرای مجمـوعه های داده شده ، اعمال مورد نظر راانجام بدهید.

6. بازه های باز وبسته راتشخیص بدهیدو آنها را به صورت مجموعه نمایش بدهید.

7. مفهوم مجموعه جهانی را توضیح بدهید.

8. مکمل هر مجموعه را نسبت به مجموعه جهانی داده شده ،تعیین کنید.

9. ویژگی های اعمال جبری روی مجموعه هارابیان کنید ودرمسائل به کاربربرید.

10.قوانین «دمورگان »را بیان کنیدودرمسائل به کاربربرید.

11.تعدادعناصر هرمجموعه متناهی داده شده راتعیین کنید.

12.حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه رابیان کنید وآن رابرای مجموعه های داده شده محاسبه کنید.

مقدمه:

مجموعه یکی از بنیادی ترین مفاهیم درریاضیات است وغالبا“ نقطه آغازی برای ریاضیات پایه و کاربردهای آن در بسیاری از علوم محسوب می شود. مثلا“،در رشته مدیریت درموارد بسیاری صحبت از مجموعه تولیدات یک کارخانه ،یا مجموعه کارگران یک کارگاه ،یا مجموعه تصمیمهای ممکن برای مدیر یک واحد ونظایر آن به میان می آید.برای درک بسیاری ازمطالب ارائه شده دراین کتاب، آشنایی باتعاریف ومفاهیم اولیه نظریه مجموعه ها ضروری است.

دراین فصل ،مفهوم بنیادی مجموعه واعمال جبری روی مجموعه ها راමورد بحث قرار می دهیم.

1-1مفهوم مجــموعه

1-1-1مفهوم شهودی مجموعه

مفهوم ریاضی یک مجموعه با مفهوم شهودی(عادی یا روز مره) آن تفاوت دارد یک مجموعه ازنظر ریاضی هنگامی معین است که اشیای تشکیل دهنده آن کاملا" مشخص باشند.به بیان دیگر هنگامی که برای هر شی به دقت بتوان تـعیین کرد آن شی به آن مجموعه دارد یا تعلق ندارد.

به طورکلی ،صفاتی مانند مهــارت،تبحر، زیبایی، زشـتی،کوچکی،بزرگی، خوشمزگی،وخوش سلیقگي و...که تعریف دقیقی ندارند ،نمی توانند مشخص کننده یک مجموعه باشند.

1-1-2 مثال:

هریک ازدسته های زیر یک مجموعه است:

أ- دستــه اعدادصحیـــح از 1تا100.

ب- دستــه حروف الفبای زبــان فارسی.

ج- آن دسته ازدانشجویان دانشگاه پیام نور که سن آنها کمتر از 25 است.

د- دستـه کتاب های درســی سال اول ابتدایی.

ه- دسته شهرهای کشور جمهوری اسلامی ایران.

و- دستــه سیــارات منظـومـه شمســی.

1-1-3 قرارداد:

اگر x، عضوی از مجموعه S باشد، می نویسیم:

$$x \in S$$

ومی خوانیم «x متعلق به مجموعه s است» یا «xعضوی از Sاست» یا به طور خلاصه،«x در Sاست».نقیض $x \in S$ رابا نماد

$$x \notin S$$

نشان می دهیم ومی خوانیم«x عضو Sنیست» یا «xبه sتعلق ندارد» یا به طور خلاصه، «x در Sنیست».

ازاین پس مجموعه ها را با حروف بزرگ لاتین مانند A ,B, C ,D,... و عضو های آنها را باحروف کوچک لاتین نظیر a, b, c, d, ...،نشان خواهیم داد.

1-1-4 نکته:

مجموعه S زمانی معین است که برای هر شی x بتوان تشخیص دادکه x، به S تعلق دارد یا نه.

6-1-1 نمایش مجمو عه ها:

برای نمایش یک مجمو عه تمام عضو های آن را، که با علامت «,» از هم جدا کرده ایم، درداخل ابرو می آوریم:

$S = \{5,8,26,73\}$ و $A = \{2,4,6,8\}$

✪توجه کنید که ترتیب نوشتن اعضای مجموعه ، اهمیتی ندارد.برای مـثال دو

مجموعه

$\{3,1,2\}$ و $\{1,2,3\}$

درواقع یک مجموعه را نمایش می دهند.

درمواردی که نوشتن تمام عضو های یک مجموعه غیرعملی باشد، مانند مجموعه

تمرین 1-1-5(ب)،معمولاً“ عضو ها را می توانیم برحسب خاصیت مشترکی معین

کنیم .فرض می کنیم گزاره $P(x)$، بیان کننده این خاصیت مشــترک مربوط به x

باشد. دراین صورت اگر مجموعه S شامل تمام x هایی باشد که به ازای آنها گزاره

$P(x)$درست است ،می نویسیم:

$$S = \{x | P(x)\}$$

مانند

$$A = \{x \in Q | (2x-1)(3x+4) = 0\}$$

1-1-7 مثال:

الف) مجموعه اعداداول بین 1 تا30 را می توان به صورت

نشان داد. $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$

ب)مجموعه ریشه های حقیقی معادله جبری $x^2+4x-1=0$ را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\{x\in R \mid x^2+4x-1=0\}$$

پ) مجمو عه اعداد صحیح فردومثبت را می توانیم به هریک از صورت های زیر نشان بدهیم:

$$\{x \mid x=2k-1, k\in N\}$$

یا

$$\{1,3,5,7,\ldots\}$$

10-1-1تعریف:

مجموعهS راتهی می نامیم،اگروتنها اگر دارای هیچ عضوی نباشد.مجموعه

تهی را معمولا“با حرف یونانی ϕ(فی)نشان می دهیم.بنابراین نماد

$$S = \phi$$

«مجموعه S تهی است» خوانده می شود.اگر مجموعه Sتهی نباشد،می نویسیم

ومی خوانیم«Sتهی نیست» یا «Sناتهی است».

$$S \neq \phi$$

✪درنتیجه، $S \neq \phi$خواهد بوداگروتنها اگر حداقل دارای یک عضو باشد.

13-1-1تعریف:

دومجموعه Aو Bرادرنظر می گیریم.اگر هرعضو مجموعه Aعضوی از مجموعه

Bهم باشد ،Aرایک زیر مجموعه Bمی نامیم وبا نماد

$$A \subseteq B$$

نشان می دهیم ومـی خوانیم «Aزیرمجمـوعه Bاست» یا «Bشامـل Aاست».

نماد $\subseteq$ را علامت شمـول یا جـزئیت می گوییم.

درصورتیکه Aزیر مجموعه ای از Bنباشد، می نویسیم

$$A \not\subseteq B$$

14-1-1تعریف:

فرض می کنیم مجموعه A،زیرمجموعه ای از مجموعه B، باشد.اگر B حداقل یک عضو داشته باشدکه درمجموعه A نباشد،آنگاه مجموعه Aرایک زیرمجموعه سرهB می نامیم وبا نماد زیرنشان می دهیم.

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$$

درصورتیکه مجموعه Aزیر مجموعه سره Bنباشد می نویسیم

$$\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}$$

15-1-1مثال:

مجموعه های زیر رادر نظر می گیریم:

$$A = \{x \mid x \in Z^+, x \le 100\}$$
$$B = \{x \mid x \in Z^+, x \le 50\}$$

روشن است که هـر عضـو مجموعه Bبه مجموعه Aنیز تعلق دارد.پس

$$B \subseteq A$$

ازطرفی $80 \in A$ ولی $80 \notin B$ پس Bیک زیر مجموعه سره Aاست،یعنی

$$B \subset A$$

اکنون فرض می کنیم که

$$C = \{x \mid x \le 720 \text{، } x \text{ عدد صحیح مثبتی است که بر 4 بخشپذیر است}\}$$

Cزیـر مجمـوعه ای از Aنیست،زیـرا $180 \in C$ ولی $180 \notin A$. پس

$$C \not\subset A$$

توجه کنید که Aهم زیرمجموعه ای از مجموعه Cنیست، زیرا $29 \in A$ ولی $29 \notin C$ پس

$$A \not\subset C$$

20-1-1قضیه:

اگر تعداد عضوهای مجموعه Aبرابر عدد طبیعی nباشد،آنگاه تعداد کل زیر

مجموعه های Aمساوی 2^n است.

22-1-1تعریف:

مجموعه تمام زیر مجموعه های Aرا مجموعه توانی Aمی نامیم وآن را با

نماد P(A) نشان می دهیم.

1-1-23 مثال:

فرض کنید $A=\{a,b\}$. تمام زیر مجموعه های A عبارتند ا ز

$$\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$$

بنابراین $P(A)$، مجموعه توانی A برابر است با

$$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

بنابر قضیه 1-1-20 اگر مجموعه A دارای n عضو باشد،تعدادعضوهای مجموعه

$P(A)$، برابر 2^n خواهد بود.

26-1-1تعریف:

دومجموعه A وB، رامساوی (یا برابر)می نامیم اگروتنها اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

دراین صورت می نویسیم

$$\mathbf{A = B}$$

به بیان دیگر ، دو مجموعه رامســاوی می نامیم،اگروتنها اگر دارای عضوهای

یکسانی باشند.

31-1-1تعریف:

فرض می کنیم a و b دوعددحقیقی باشند به طوری که $a<b$.

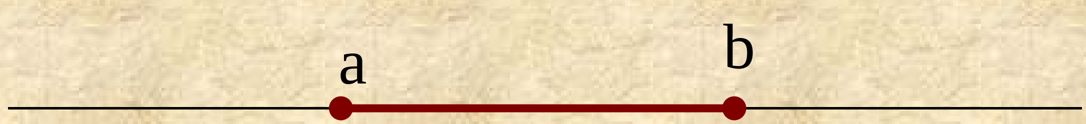
الف)مجموعه تمام اعداد حقیقی xرا که $a \le x \le b$ ،بازه بسته aوbمی نامیم و

بانماد [a,b]نشان می دهیم.پس

$$[a,b]=\{x \in R \mid a \le x \le b\}$$

درشکل 1-1بخشی از خط حقیقی که پررنگ کشیده شده است [a,b] رانشان

می دهد.



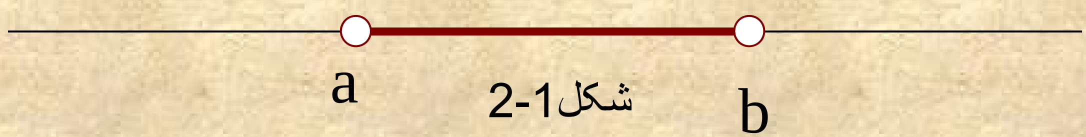
شکل1-1

ب)مجموعه تمام اعدادحقیقی x را که $a<x<b$، بازه باز a وb می نامیم وبانماد

(a,b) یا $]a,b[$ نشان می دهیم.بنابراین

$$(a,b)=\{x\in R \mid a<x<b\}$$

درشکل 2-1قسمت پررنگ خط حقیقی ،نشان دهنده (a,b)است.



شکل2-1

- توجه کنید که خود اعداد a وb به بازه (a,b)تعلق ندارند،وبه همین علت درشکل 2-1بادایره های توخالی نشان داده شده اند.

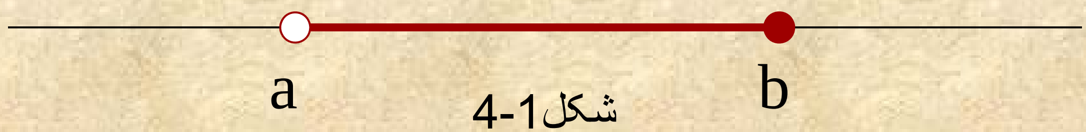
پ) هریک ازمجموعه های

$$\{x \in R \mid a \le x < b\} \qquad \{x \in R \mid a < x \le b\}$$

رایک بازه نیمباز a وb می نامیم وبه ترتیب بانمادهای $[a,b)$ و$(a,b]$ نشان می دهیم.

به شکل های 1-3 و1-4 نگاه کنید.

شکل1-3



شکل1-4

ت)هنگام استفاده از علامت های $\pm\infty$ باید مواظب باشیم که این نمادها رابا اعداد

حقیقی اشتباه نکنیم.زیرا آنها خواص اعدادحقیقی را ندارند.بنابراین بازه های زیر را داریم:

$$(-\infty, b] = \{x \in R \mid x \le b\}$$

$$(a,+\infty) = \{x \in R \mid x > a\}$$

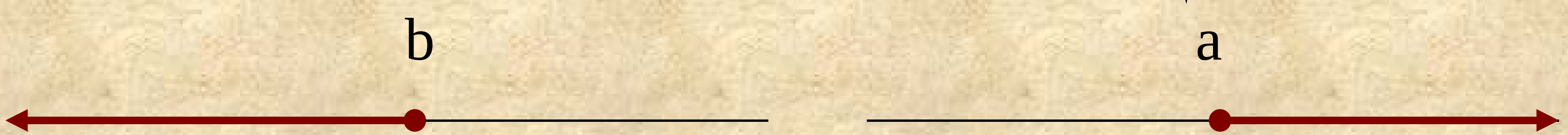
$$[a,+\infty) = \{x \in R \mid x \ge a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in R \mid x < b\}$$

$$(-\infty,+\infty) = R$$

شکل 5-1 بازه $(a,+\infty)$ وشکل 6-1 بازه $(-\infty, b]$ را نمایش می دهد.توجه کنیدکه

بازه مجموعه تمام اعدادحقیقی را نمایش می دهد.



شکل6-1

شکل5-1

در هریک از بازه های (a,b)، [a,b]، [a,b)، (a,b]، اعدادحقیقی a وb رانقاط

انتهایی بازه می نامیم.

32-1-1مثال:

مجموعه جواب نا معادله $2+3x<5x+6$ راتعیین کنیدوآن راروی محور اعداد

حقیقی نمایش بدهید.

حل:

اگر xعددی باشدکه در نامساوی صدق می کند،بایدداشته باشیم

$x>-2$ یا $-2x<4$

چون تمام مرحله های بالا برگشت پذیر هستند، نتیجه می گیریم که

$$2+3x<5x+6 \quad x>-2 \Leftrightarrow$$

بنابراین مجموعه جواب نا معادله مفروض ،بازه $(-2,+\infty)$است که در شکل7-1

نشان داده شده است.

شکل7-1

1-2اعمال جبري روي مجـــموعه ها

1-2-1مقدمه:

تشابهی میان نظریه مجموعه هاونظریه اعداد حقیقی وجوددارد.باچهار عمل اصلی

جمع،تفریق ،ضرب ،تقسیم روی مجموعه اعداد حقیقی آشـنا هشتیم.اعمال جبری

مشابهی را می توان برای مجموعه ها نیز تعریف کرد.دراین بخش به معرفی و

بررسی این اعمال می پردازیم .

1-2-2تعریف:

فرض می کنیم AوBدو مجموعه باشند،مجموعه تمام عضوهایی را که حداقل به

یکی ازاین دو مجموعه تعلق داشته باشند،اجتماع AوBمی نامیم وبانماد $\mathbf{A \cup B}$

نشان می دهیم.به بیان دیگر

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

1-2-3مثال:

الف)فرض می کنیم $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, c, d, e\}$. اجتماع دو مجموعه AوB بنابر تعریف1-2-2عبارتست ا ز

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

ب)فرض می کنیم Aمجموعه تمام افرادی باشد که روزنامه کیهان را می خوانند وBمجموعه تمام افرادی باشدکه روزنامه اطلاعات را می خوانند. $A \cup B$عبارت است از مجموعه تمام افرادی که حداقل یکی از روزنامه های کیهان یا اطلاعات را می خوانند.

1-2-4تعریف:

فرض می کنیم AوBدو مجموعه باشند،مجموعه تمام عضوهایی را که به هردو

مجموعه تعلق داشته باشند،اشتراك AوBمی نامیم وبانماد $\mathbf{A \cap B}$

نشان می دهیم.به بیان دیگر $A \cap B = \{x \mid x \in A , x \in B\}$

1-2-3مثال:

الف)فرض می کنیم $A = \{1,2,3,7\}$ و $B = \{0,2,4,7\}$. اشتراك دو مجموعه A

وBبنابر تعریف1-2-4عبارتست ا ز

$$A \cap B = \{2,7\}$$

ب)مجموعه $A \cap B$ درمثال 1-2-3(ب)عبارتست از مجموعه تمام افرادی که

هردوروزنامه کیهان واطلاعات را می خوانند.

عمل های اجتماع واشتراک از قوانین خاصی پیروی می کنند.این قوانین غالبا"

بدیهی اندوما ،به منظور سهولت کاربرد، آنها رادر قالب سه قضیه زیر می آوریم.

7-2-1قضیه:

برای هر سه مجموعه دلخواه Aو Bو Cومجموعه جهانی Uداریم

1) $A \cup \phi = A$

2) $A \cup A = A$

3) $B \cup A = A \cup B$

4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

5) $B \subseteq A \cup B \qquad A \subseteq A \cup B$

6) $A \cup U = U$

8-2-1قضیه:

برای هرسه مجموعه دلخواه A،B و Cومجموعه جهانی Uداریم

1) $A \cap \phi = \phi$

2) $A \cap A = A$

3) $B \cap A = A \cap B$

4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

5) $A \cap B \subseteq B \qquad A \cap B \subseteq A$

6) $A \cap U = A$

1-2-9نکته:

باستفاده از قسمت4 درقضیه های 1-2-7و1-2-8 ،می توانیم پرانتزها را

حذف کنیم واجتماع واشتراک سه مجموعه را به صورت های

$A\cap B\cap C$ $\qquad$ $A\cup B\cup C$

بنویسیم.ازقسمت5قضیه های مذکورنتیجه می شودکه $A\cap B\subseteq A\cup B$

1-2-10 قضیه:

برای هرسه مجموعه دلخواه AوB و C،داریم

1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

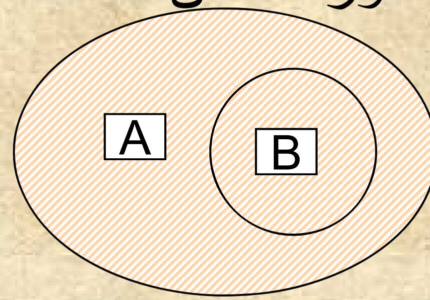
2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

12-2-1نمودارون:

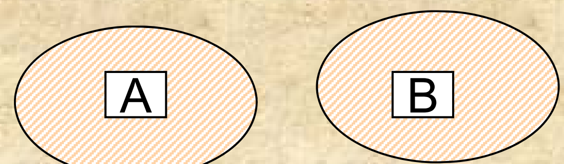
معمولابرای روشن تر شدن روابط بین مجموعه هااز نمودار ون استفاده می کنیم،

که مثال هایی ازآن در شکل 1-8 آمده است. درهریک از این نمودارهاناحیه سایه

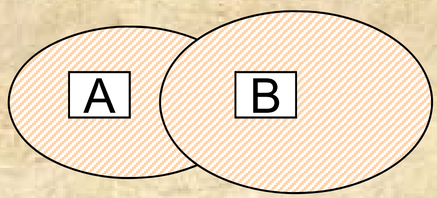
خورده نشان دهنده مجموعه ای است که درزیر نمودارنوشته شده است.



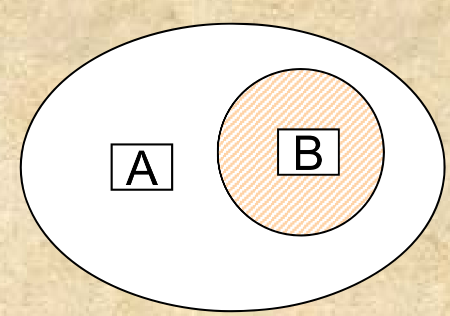
A ⋃ B



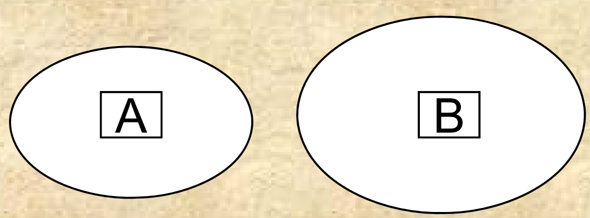
A ⋃ B



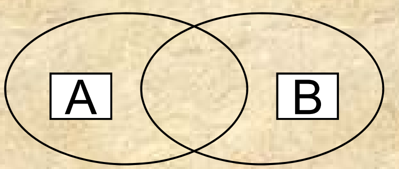
A ⋃ B



A ⋂ B



A ⋂ B



A ⋂ B

1-2-13تعریف:

دومجموعه AوBرا **از هم جدا** می نامیم درصــورتی که عضو مشترکی نداشته

باشند.به بیان دیگر،هرگاه $A \cap B = \phi$ آنگاه مجموعه AوB را ازهم جدا می خوانیم.

1-2-14مثال:

الف) مجمـوعه اعـداد صحیح فرد و مجموعه اعدادصحیح زوج،دومجموعه ازهم

جداهستند.

$$A \cap B = \phi$$

15-2-1تعریف:

دومجموعه AوBرادرنظر می گیریم.**تفاضل** مجموعه Bازمجموعه A،آن را بانماد

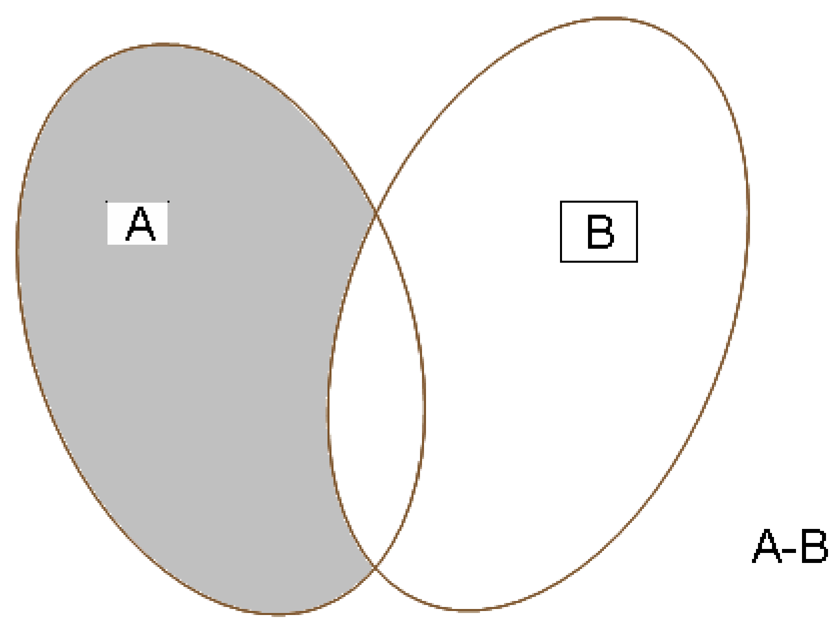
A-Bنشان می دهیم،عبارتست از تمام عضو هایی از Aکه عضـوBنیـستند. به

ببِان دیگر

$$A-B=\{x|x\in A, x\notin B\}$$

درشکل 1-9ناحیه سایه خورده ،تفاضـل BازAیعنی A-Bرابرای مجموعه های

دلبخواه AوB نشان می دهد.



شکل ۱-۹

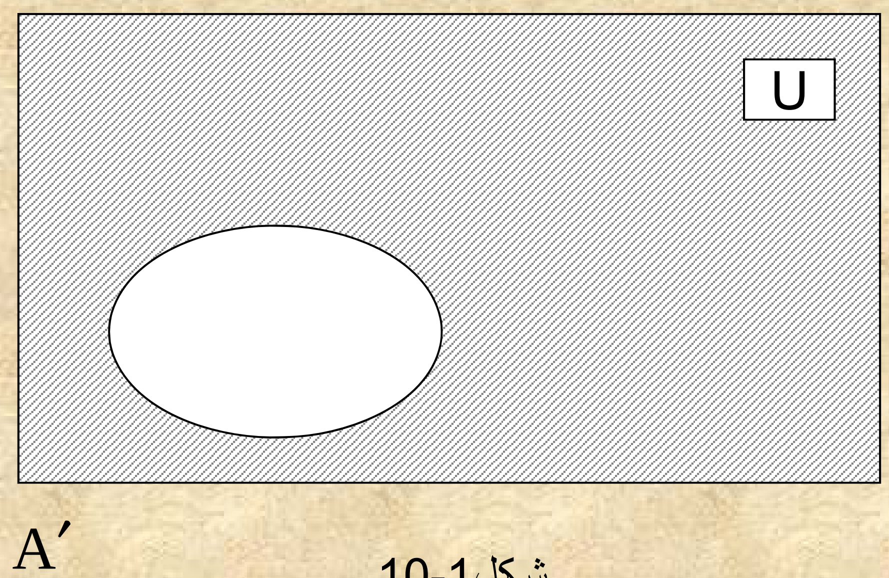
18-2-1تعریف:

برای هرمجموعه Aبامجموعه جهانیU،مجموعه U-Aرا**مکمل** مجموعه Aمی نامیم

وبا نماد A' نشان می دهیم.پس

$$A' = \{x | x \in U , x \notin A\}$$

ناحیه سایه خورده در شکل 1-10 نشان دهنده مکمل مجموعه Aاست.



شکل1-10

1-2-19مثال:

فرض می کنیم Uمجموعه اعداد حقیقی A مجموعه تمام اعدادگنگ(یااصم)،و B

مجموعه تمام اعدادگویا باشد.بنابر تعریف 1-2-18 داریم

$$A' = U - A = \{x | x \in R\ ,\ x \notin A\} = B$$

بنابراین A' برابر مجموعه اعداد گویاست.به همین ترتیب

$$B' = U - B = \{x | x \in R\ ,\ x \notin B\} = A$$

1-2-21 قضیه:

اگر Aو B زیرمجموعه از مجموعه جهانی Uباشند،آنگاه

الف) $\phi' = U$

پ) $(A')' = A$

ب) $U' = \phi$

ت) $A \subseteq B$, آنگاه $B' \subseteq A'$ وبرعکس

1-2-22 قضیه قوانین دمورگان:

اگر A و B زیرمجموعه هایی از مجموعه جهانی U باشند،آنگاه

الف) $(A \cup B)' = A \cup B$

ب) $(A \cap B)' = A \cap B$

1-2-24 قضیه تعمیم قوانین دمورگان

اگر مجموعه های $A_1, A_2, \ldots, A_n$ زیرمجموعه ای از مجموعه جهانی U باشند، آنگاه

الف) $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_n'$

ب) $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'$

28-2-1تعريف:

فرض می کنیم Aو B دو مجموعه باشند. مجموعه تمام عضو هایی راکه تنهابه A

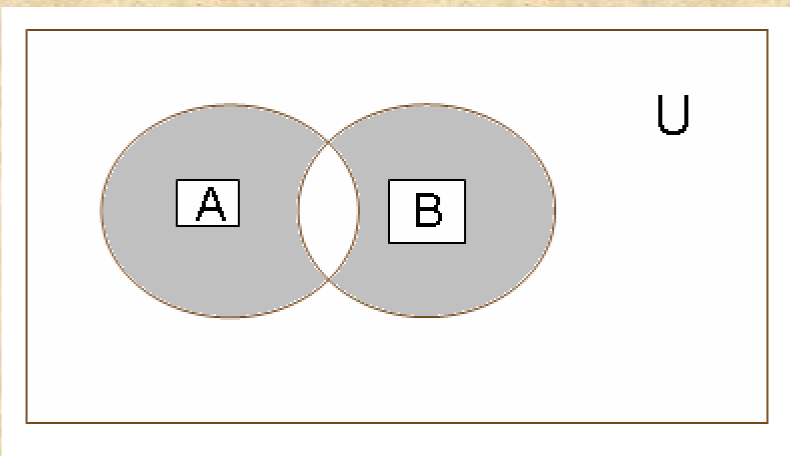
یا تنها به B تعلق دارند،**تفاضل متقارن Aو B** می نامیم وبانماد **$A\Delta B$**

نشان می دهِم. به بیان دیگر

$$\mathbf{A\Delta B = (A - B)\cup(B - A)}$$

تساوی بالا، دلیل انتخاب نام تفاضل متقارن برای $A\Delta B$ رانشان می دهد،زیرا

تفاضل متقارن Aو B برابربا اجتماع دو تفاضل A-Bو B-Aاست.



درشکل 1-12 ناحیه سایه خورده

$A\Delta B$نشان داده شده است.

1-3حاصل ضرب دكارتي مجـــموعه ها

پیش ازاینکه به تعریف حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه بپردازیم،مفهوم

زوج های مرتب را یادآوری می کنیم.

1-3-1تعریف:

دوتایی (a,b) راکه درآن ترتیب عناصرمطرح است،یک دوتایی مرتب یا زوج

مرتب یا جفت مرتب می نامیم.در زوج مرتب (a,b) ، aرامولفه اول وbرامولفه دوم می گوییم.

1-3-2تعریف:

دو زوج مرتب (a,b) و(c,d)**رامساوی یا برابر** می گوییم،اگروتنها اگر داشته باشیم

$$a=c \quad ,b=d$$

5-3-1 تعریف:

فرض می کنیم A وB دو مجموعه ناتهی دلبخواه باشند.**حاصل ضرب دکـارتی**

A وB که با نماد $\mathbf{A\times B}$ نشان داده می شود، عبارتست از مجموعه تمام زوج های

مرتبی به صورت (a,b) که درآن $a\in A$ و $b\in B$. یعنی

$$\mathbf{A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\}}$$

✪توجه کنید که هرعضو مجموعه $A\times B$ یک زوج مرتب است.

1-3-6مثال:

فرض می کنیم $A=\{1, 2, 3\}$ و $B=\{g, h\}$. بنابر 1-3-5 حاصل ضرب دکارتی

$A\times B$ عبارتست از

$$A\times B=\{(1,g),(1,h),(2,g),(2,h),(3,g),(3,h)\}$$

حاصل ضرب دکارتی $B\times A$ برابراست با

$$B\times A=\{(g,1),(g,2),(g,3),(h,1),(h,2),(h,3)\}$$

به طوری که مشاهده می کنیم ، حاصل ضرب های دکارتی $A\times B$ و $B\times A$

لزوما"برابرنیستند.

1-4تعداد عضوها و افراز یک مجـــموعه

1-4-2قـــرارداد:

تعدادعضو های مجموعه متناهی A رابا نماد **n(A)** نشان می دهیم.

✪مجموعه تهی یک مجموعه متناهی محسوب می شود.

1-4-1تعریف:

مجموعه ای که تعداد اعضای آن متناهی باشد، مجموعه متناهی یابا پایان نامیده

می شود. مجموعه ای که متناهی نباشد،نامتناهی یا بی پایان نامیده می شود.

1-4-3مثال:

الف) مجموعه $\{1, 3, 7, 9, 11\}$ متناهی است زیرادارای 5عضو است.

ب) مجموعه $\{x \in R \mid x^2 - 1 = 0\}$ متناهي است .

پ) مجموعه $[0,1] = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$ نامتناهی است.

ت) هریک از مجموعه های اعداد طبیعی، صحیح،گویا،گنگ،وحقیقی

نامتناهی است.

ث) بازه (a,b) که $a<b$،مجموعه ای نامتناهی است.

5-4-1 قضیه:

فرض می کنیم Aو B و Cسه مجموعه دلخواه باشند،همواره داریم

الف) $$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

ب) $$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$$

$$-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

پ) $$n(A\Delta B)=n(A-B)+n(B-A)$$

6-4-1مثال:

فرض کنید مجموعه A دارای 40 عضو ومجموعه B دارای 35عضو است

که 10 عضو آنها در AوB مشترک هستند. مجموعه $A \cup B$چند عضو دارد؟

حل:

چون $n(A \cap B) = 10$ وبنابر 1-4-5(الف) داریم

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 45 + 35 - 10 = 65$$

10-4-1تعریف:

مجموعه ناتهی A رادرنظر می گیریم. مجموعه های ناتهی $A_n, \dots, A_2, A_1$

رایک **افراز** مجموعه A می نامیم،درصورتی که:

الف) مجموعه های $A_n, \dots, A_2, A_1$ دو به دو ازهم جداباشند،به

بیان دیگر به ازای هر i و j که $i \neq j$ داشته باشیم

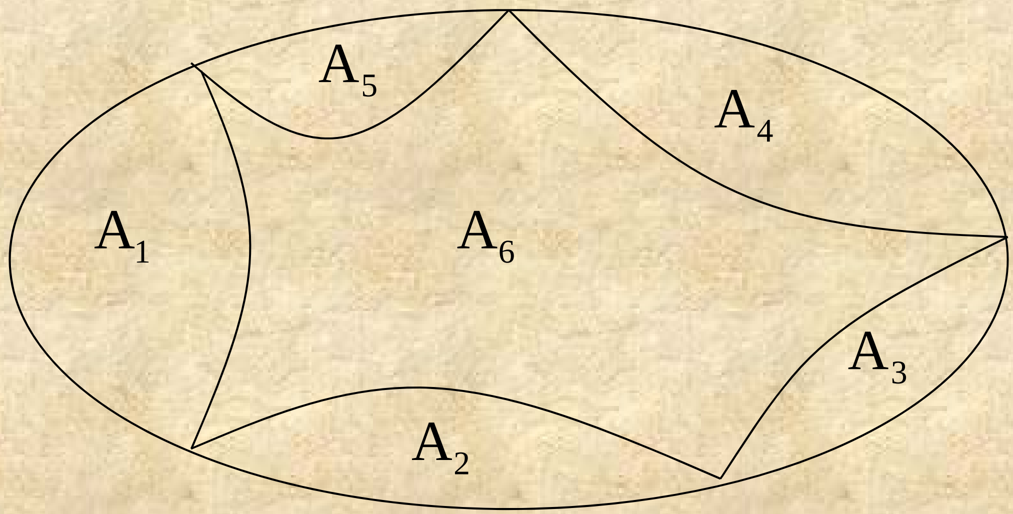
$$A_i \cap A_j = \phi$$

ب)اجتماع مجموعه های $A_n, \dots, A_2, A_1$ مساوی A باشد ، یعنی

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

درشکل 15-1 افراز مجموعه A به شش مجموعه $A_6, A_5, A_4, A_3, A_2, A_1$

نشان داده شده است.



شکل15-1

فصل دوم

دستگاههای مختصات

هدف کلی:

هدف کلی فصل این است که بادستگاههای مختصات دکارتی وقطبی آشنا شوید،

ومعادلات خطوط رابشناسید ونمودار آنهارارسم کنید.

هدف های رفتاری:

ازشما انتظار می رود که پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:

1. مختصات دکارتی هر نقطه رادر صفحه مختصات تعیین کنید.

2. باداشتن مختصات دکارتی یک نقطه ،موضع نقطه را در صفحه معین کنید.

3. فاصله دو نقطه رادر صفحه مختصات محاسبه کنید.

4. مختصات وسط یک پاره خط را با داشتن مختصات ابتدا وانتهای پاره خط پیدا کنید.

5. مختصات محل تلاقی سه میانه مثلث رابا دانستن مختصات دکارتی

راس هایمثلث محاسبه کنید.

6. مختصات نقطــه رادر دستگاهی که محور های آن به موازات خود انتقال یافته اند،تعیین کنید.

7. مــعادله خـط را با استفاده از داده های مسئله بنویسید.

8.شیب خط راتعریف کنید،رابطه بین شیب های خطوط موازی ،متعامد،ومتقاطع

را بلد باشید درحل مسائل به کاربربرید.

9. نمودار خط هایی را که معادلهآنها داده شده است،رسم کنید.

10.عـرض ازمبدا وطـول ازمبدا خــط هاراتعیین کنید.

11.فاصــله یک نقطـــه رااز یک خـــط محاسبه کنید.

12. فاصله دو خط موازی راتعیین کنید.

13. مختصات نقطه تلاقی دو خط رابیابید.

14. دستگاه مختصات قطبی را تعریف کنیدونحوه تعیین مختصات قطبی یک نقطه رابیان کنید.

15. رابطــه بین مختصات دکارتی و مختصات قطبی یک نقطه رابدانید ودر حل مسائل به کاربرید.

مقدمه

دراین فصل ابتدا به معرفی دستگاه مختصات دکارتی و دستگاه مختصات قطبی می پردازیم وسپس رابطه بین این دو دستگاه رابررسی می کنیم.

1-2دستگاه مختصات دکارتی

2-1-1تعریف:

در صفحه هندسی ،یک خط مستقیم افقی رسم می کنیم.درروی این خط، نقطه

دلخواه O رابه عنوان مبدا وطولی رابه عنوان واحد طول اختیار می کنیم.اکنون

این خط رابر حسب این واحد طول به ترتیب اسلاید بعدی مدرج می کنیم:

الف) نقطه O ،یعنی مبدا رابه عنوان نمایش عددصفر اختیار می کنیم.

ب) اگر a>0، نقطه ای رابه فاصله aبرابرواحد طول درسمت راست مبدا به عنوان نمایش aاختیار می کنیم .

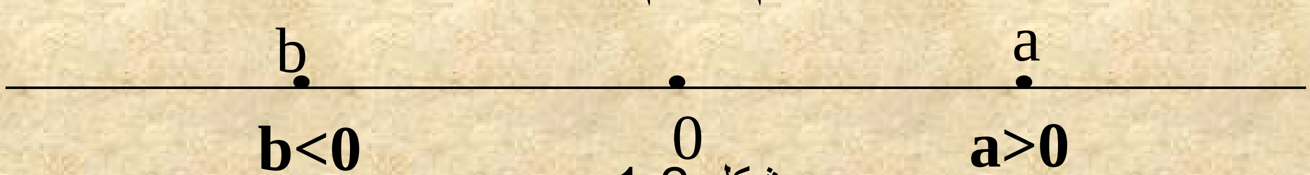
پ) اگر b<0،نقطه ای رابه فاصله b–برابرواحدطول درسمت چپ مبدا به عنوان نمایش bاختیارمی کنیم.

به این ترتیب ،نقاطی ازخط افقی که نمایش اعداد مثبت هستند درسمت راست نقطه O

ونقاطی که نمایش اعداد منفی هستند،درسمت چـــپ مبدا قراردارند.بنابراین،خط

جهت داری به دست می کنیم آوریم که نمایش اعداد حقیقی است.این خط جهت دار

رامحور طول ها یا محور xها می کنیم نامیم.به شکل 1-2 نگاه کنید.



شکل 1-2

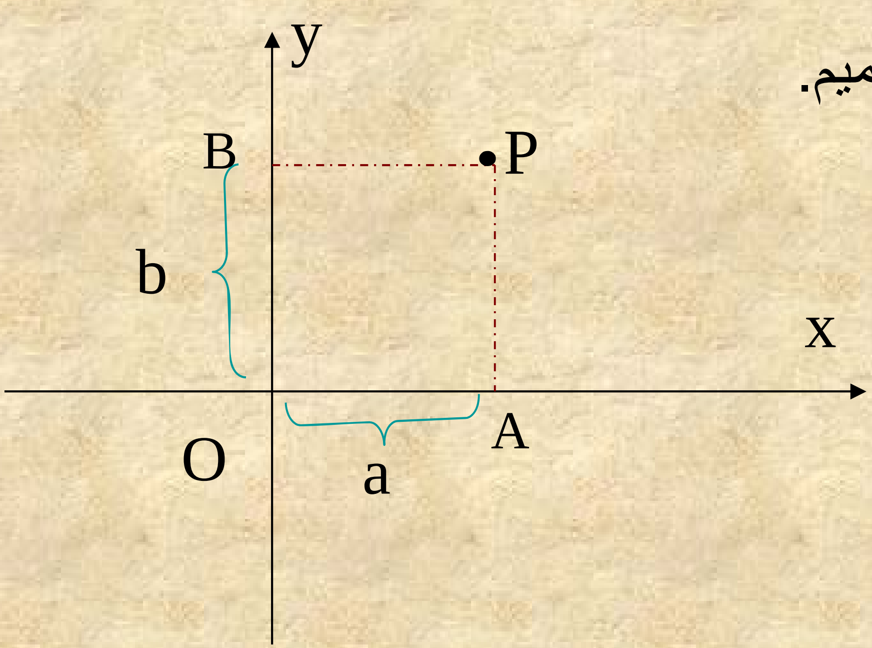
2-1-2 مختصات نقطه در صفحه:

فرض می کنیم P نقطه دلخواهی در صفحه هندسهxoy باشد.

درشکل 2-3،خطوط PA و PB رابه ترتیب عمودبرمحور xها وعمود بر محور yها

رسم می کنیم .اندازه جبری oA روی محورxها را طول نقطه P واندازه جبری oB

روی محور yها را عرض نقطه P می نامیم.

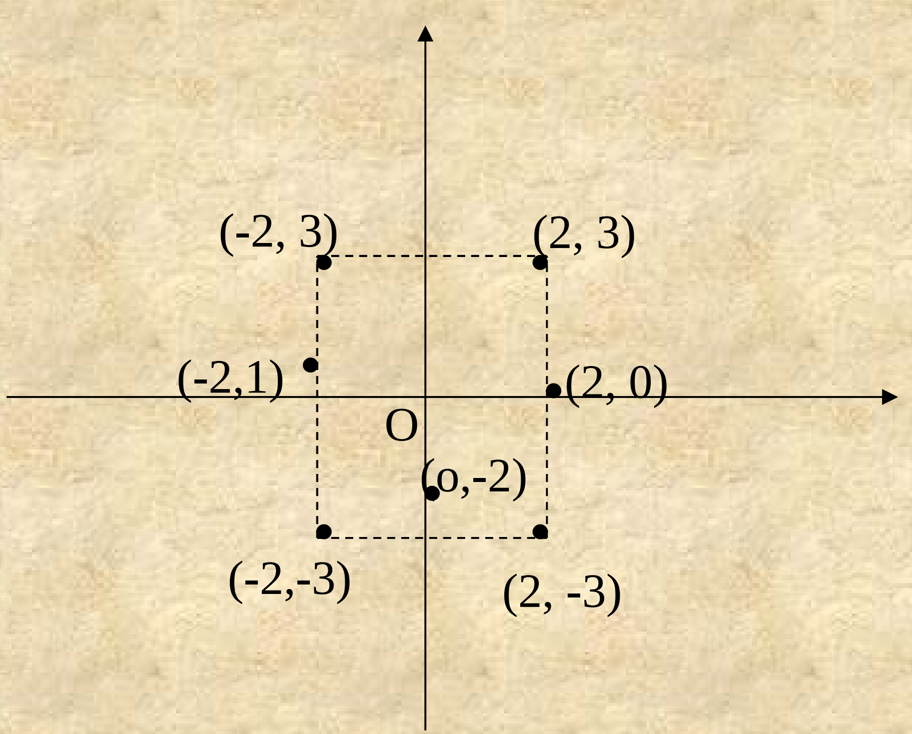


درنتیجه یک تناظر یک به یک بین نقاط صفحه وزوج هایی مانند(a,b)،که

در آن aوb اعدادحقیقی اند وجوددارد.بنابراین می توان صفحه xoy رابا

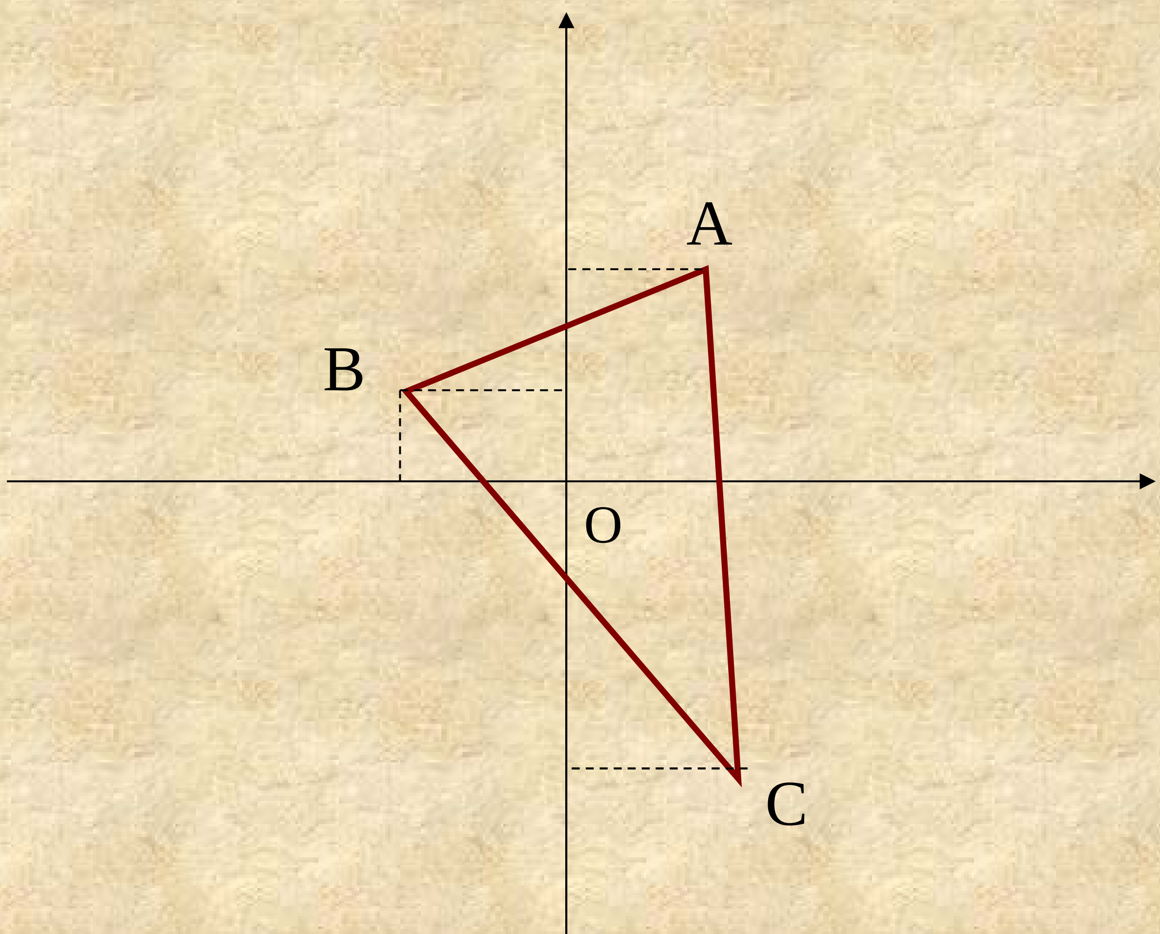
مجموعه $R^2 = R \times R$ یکی گرفت.درشکل 2-4،یک دستگاه مختصات

دکارتی وچند نقطه درآن نشان داده شده است.



4-1-2مثال:

مثلثی رسم کنیدکه مختصات راس های آن (A(2, 2 ،(B(-1, 1 و(C(1, -3 باشد.



5-1-2فاصله دو نقطه :

فرض می کنیم A نقطه به مختصات (x_A, y_A) و B نقطه به مختصات (x_B, y_B) باشد.فاصله دو نقطه A و Bرامساوی طول پاره خط ABتعریف می کنیم وبا نماد d(A,B)نشان می دهیم. می توان ثابت کرد که فاصله میان A و B از رابطه زیربه دست می آید.

$$d(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

7-1-2 مختصات وسط پاره خط:

دو نقطه A و B را به ترتیب با مختصات (x_A, y_A) و (x_B, y_B) در صفحه

در نظر می گیریم .اگر C نقطه وسط پاره خط AB باشد، آنگاه مختصات نقطه

Cبرابراست با

$$x_C = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$$

$$y_C = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$$

مثال2-1-8:

مختصات نقطه وسط پاره خط BCدر مثال 2-1-4 راتعیین کنید.

حل:

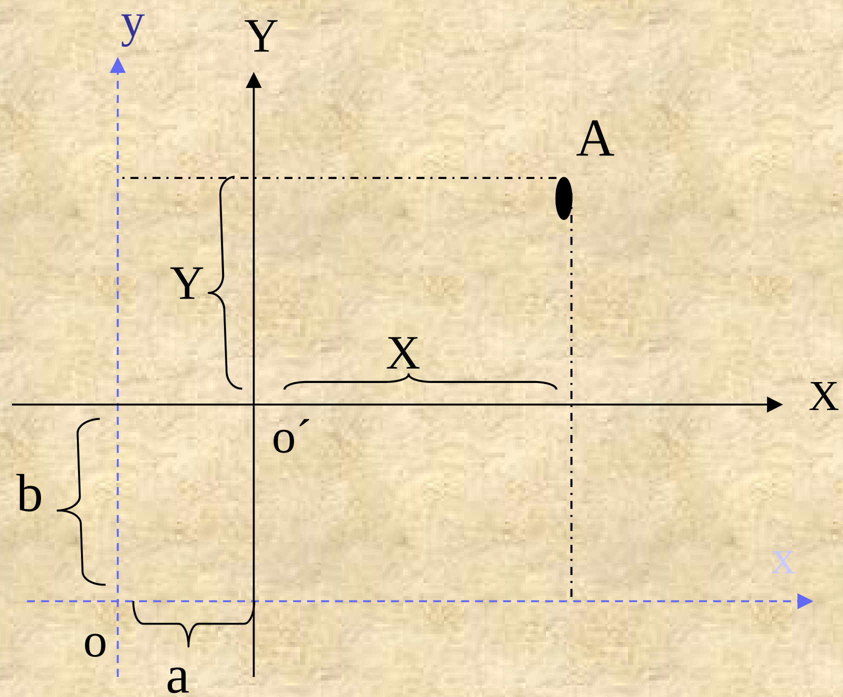
فرض می کنیم D، نقطه وسط پاره خط BCباشد،بنابر2-1-7داریم

$$x_D = \frac{1}{2}(-1+1) = 0$$

$$y_D = \frac{1}{2}(-3+1) = -1$$

بنابراین مختصات نقطه D،(0, -1) است.

12-1-2 انتقال محورهای مختصات :



$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

2-2معادله ونمودار خط

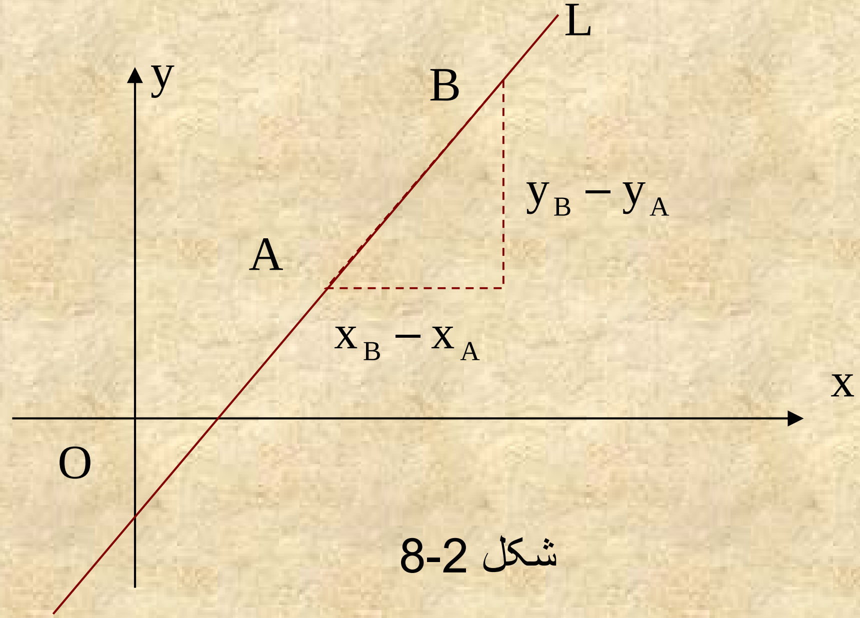
2-2-1مقدمه:

خط راست Lراکه،موازی محور yها نیست(خط غیر قائم)،درنظر می گیریم.اگر

AوB دو نقطه متمایز دلخواه روی خط Lباشند،آنگاه شیب یاضریب زاویه خط

رابا حرف mنشان می دهیم وبه صورت زیر تعریف می کنیم.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



شکل 2-8

✪دقت کنید که شیب خط بستگی به نقاطی که برای محاسبه آن انتخاب می کنیم

ندارد،وبرای تمام نقاط روی هر خط مقداری ثابت است.(چرا؟)

2-2-3 مثال:

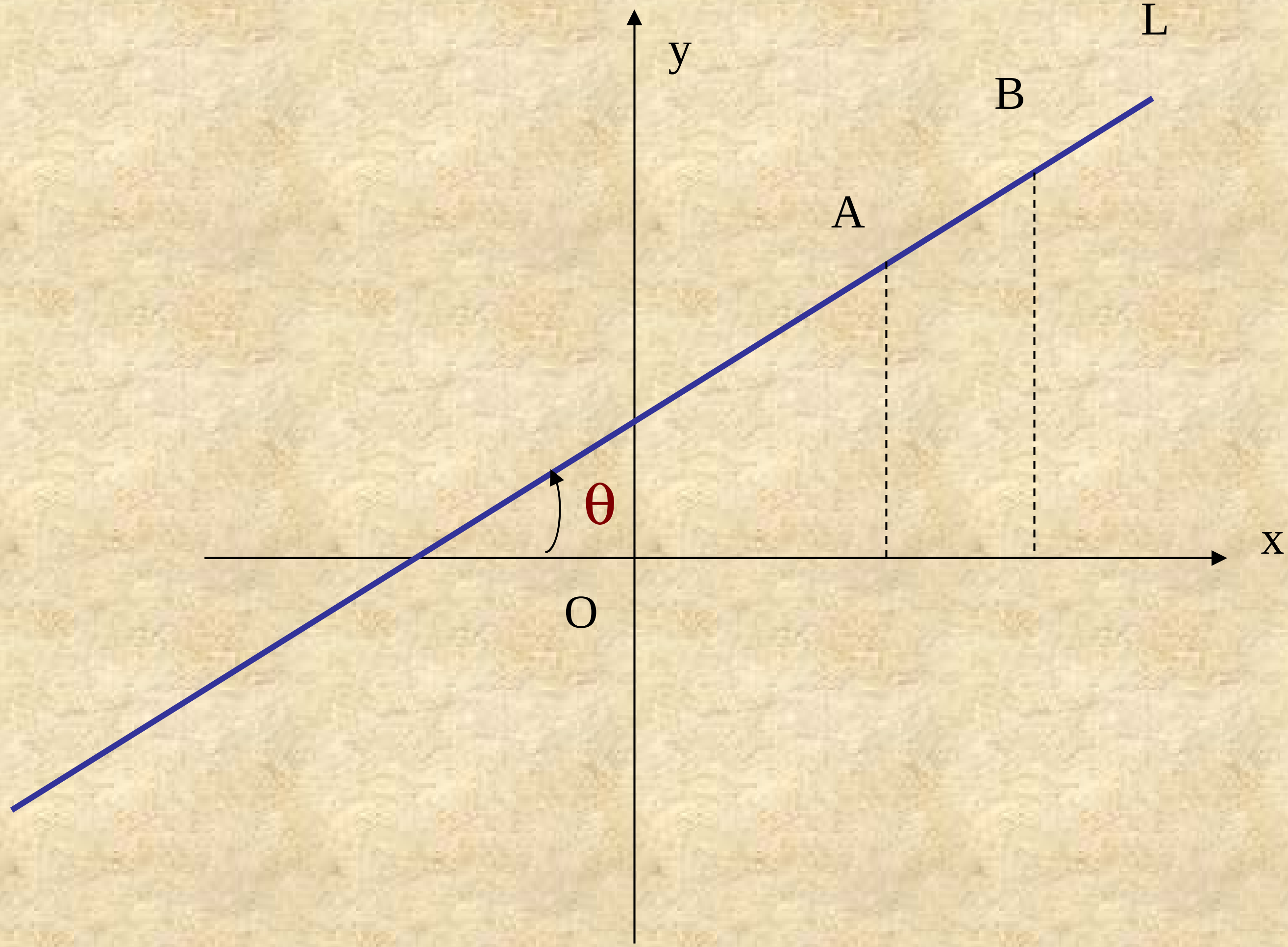
شیب خطی که ازدو نقطه $A(2,-3)$ و $B(4, 1)$ می گذرد برابراست با

$$m=\frac{1-(-3)}{4-2}=\frac{4}{2}=2$$

2-2-4نکته:

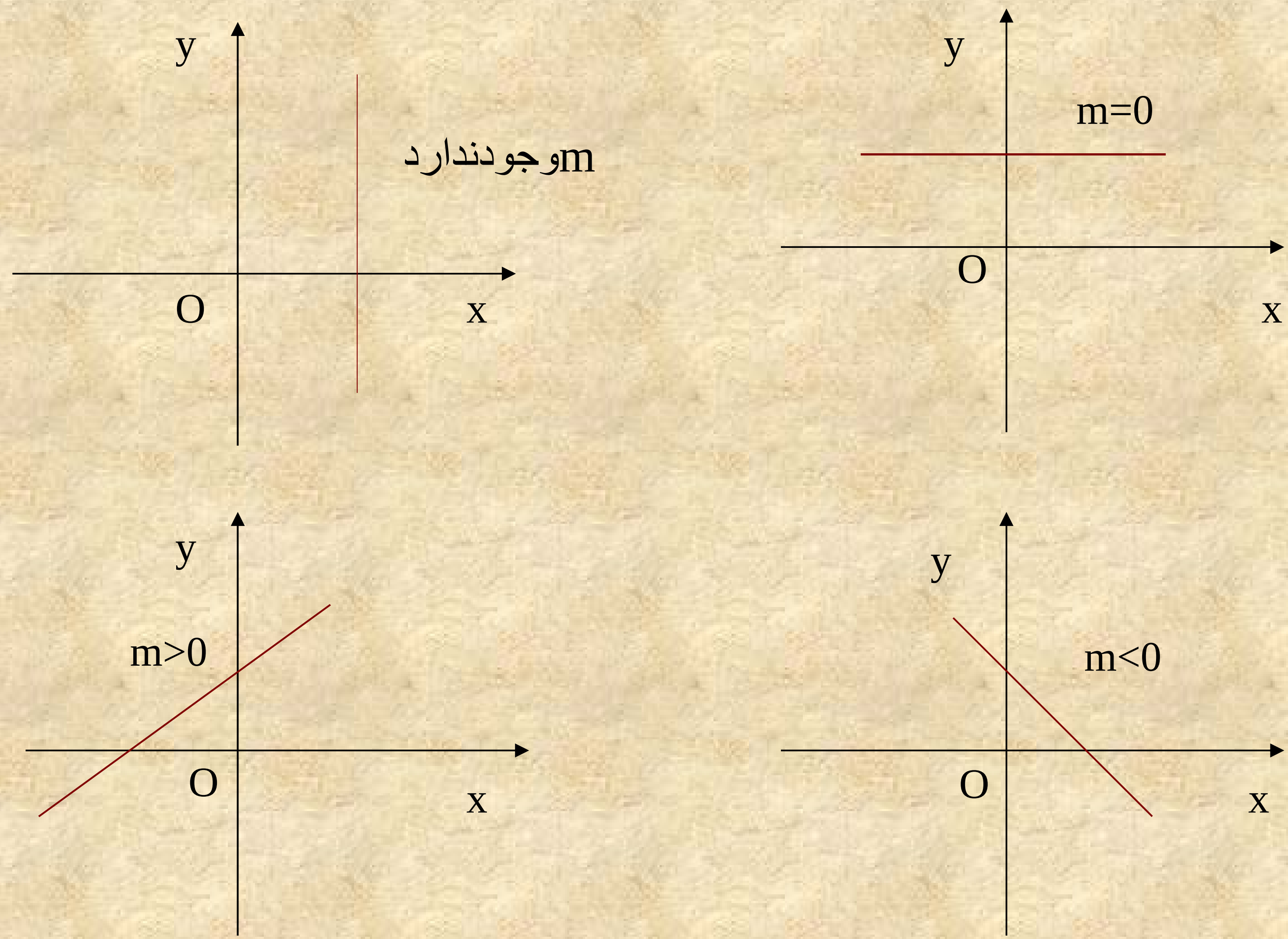
شیب خط Lرا می توان به **تانژانت زاویه ای که این خط** با جهت مثبت محور
X
هامی سازد نیزتعبیر کرد.به بیان دیگر

$$\mathbf{m=\tan\theta}$$



- دراین جا $0^\circ \le \theta \le 180$ زاویه ای است که خط L باجهت مثبت محور xها می سازد.

به شکل های 2-10توجه کنید.



شکل های 2-10

6-2-2 قضیه:

سه نقطه A وB وC برروی یک خط واقع اند اگروتنها اگر شیب های خطوط AB

وBC مساوی باشند،به عبارت دیگر داشته باشیم

$$\mathbf{m_{AB} = m_{BC}}$$

7-2-2 مثال:

عدد a را چنان تعیین کنید که سه نقطه A(1,-1), B(0, 2), C(a,-2a)، برروی

یک خط راست واقع باشند.

حل:

بنابرقضیه 6-2-2 بایدداشته باشیم

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{2-(-1)}{0-1} = \frac{-2a-2}{a-0} \Rightarrow 3a = 2a + 2$$

درنتیجه a=2.

2-2-9 قضیه (شرط توازی وتعامد دوخط):

فرض می کنیم m_1 و m_2 به ترتیب شیب های خط های L_1 و L_2 باشند.

الف) دوخط L_1 و L_2 متوازی اند اگروتنها اگر $m_1 = m_2$.

ب) دوخط L_1 و L_2 برهم عمودند اگر وتنها اگر $m_1 m_2 = -1$.

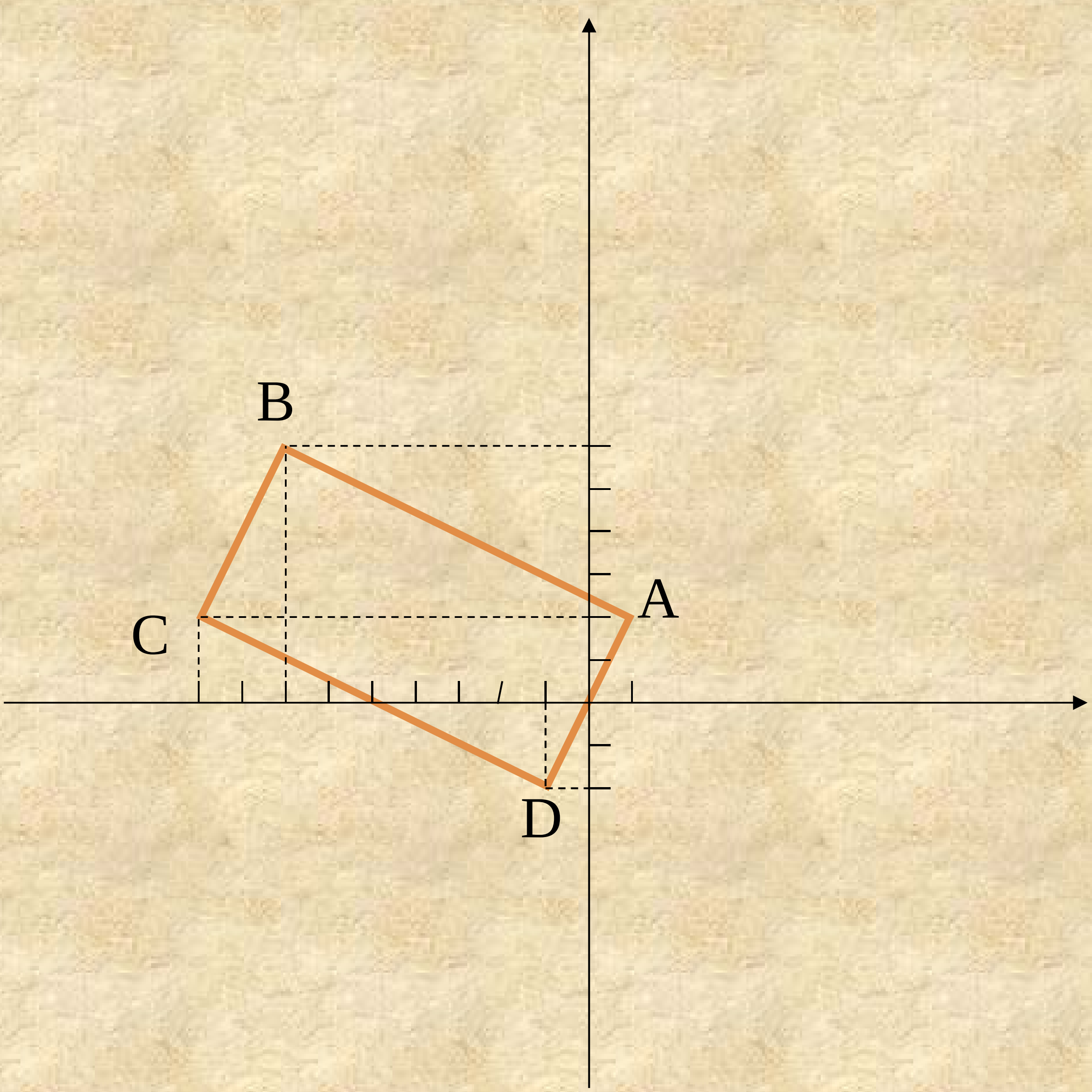
2-2-10 مثال:

نشان بدهید که چهار نقطه A(1,2), B(-7,6) , C(-9,2) , D(-1,-2)، راس های یک مستطیل اند.

حل:

می دانیم مستطیل یک چهار ضلعی است که درآن اضلاع دو به دو برهم عمودند

واضلاع روبه رو با هم مساوی ومتوازی اند،به شکل 2-11 دراسلاید بعدی توجه کنید.



$$m_{AD} = \frac{-2-2}{-1-1} = 2$$

$$m_{AB} = \frac{2-6}{1+7} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{BC} = \frac{2-6}{-9+7} = 2$$

$$m_{CD} = \frac{-2-2}{-1+9} = -\frac{1}{2}$$

از آن جا که $m_{AD}.m_{AB}=-1$ و $m_{CD}.m_{BC}=-1$، خطوط AB و AD و همچنین

خطوط BC و CD دوبه دو برهم عمود ند.

ازطرفی چون $m_{AD}=m_{BC}$ و $m_{CD}=m_{AB}$، دوخط AD و BC باهم ودوخط AB

و CD باهم متوازی اند.

از مطالب بالا نتیجه می شود که چهار ضلعی ABCD، مستطیل است.

12-2-2 زاویه بین دو خط :

فرض می کنیم m_1 و m_2 به ترتیب شیب های دو خط L_1 و L_2 باشند. زاویه

بین دو خط ، α، ازرابطه زیربه دست می آید.

$$\tan\alpha=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

15-2-2 معادله خط راست:

فرض می کنیم $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه متمایزروی خط L باشند. اگر

P(x,y) نقطه دلخواهی از خط L باشدآنگاه برحسب اینکه خط L قائم باشد یا نه،

معادله خط L عبارت است از:

حالت اول) اگر خط L قائم نباشد،یعنی $x_1 \neq x_2$ آنگاه معادله خط L برابراست با

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

یا

$$\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

حالت دوم) اگر خط L قائم باشد،یعنی $x_1 = x_2$ آ نگاه معادله خط قائم L عبارت است از

$$\mathbf{x = x_1}$$

16-2-2مثال:

معادله خطی رابنویسید که ازدو نقطه (3, 4)و(2 ,5-)می گذرد.

حل:

شیب خط برابراست با

$$m = \frac{4-2}{3+5} = \frac{1}{4}$$

معادله خط بنابر 15-2-2 (الف)عبارت است از

$$y - 4 = \frac{1}{4}(x-3) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$$

$$x - 4y + 13 = 0$$

18-2-2 نکته:

به طور کلی هر معادله ای به صورت $Ax+By+C=0$،که درآن اعدادحقیقی

AوB هردو باهم صفر نباشند، نمایشگر یک خط راست است. این معادله راکه

شامل توان های اول xوyاست،برحسب xو y، **خطی** می نامیم.

بنابراین هر خط راست در صفحه به وسیله یک معادله خطی مشخص می شودو

معادله خطی معرف یک خط راست است.

2-2-19طول و عرض از مبدا خط:

معادله خطی $Ax+By+c=0$،راکه درآن اعدادحقیقی A و B هردو باهم صفر

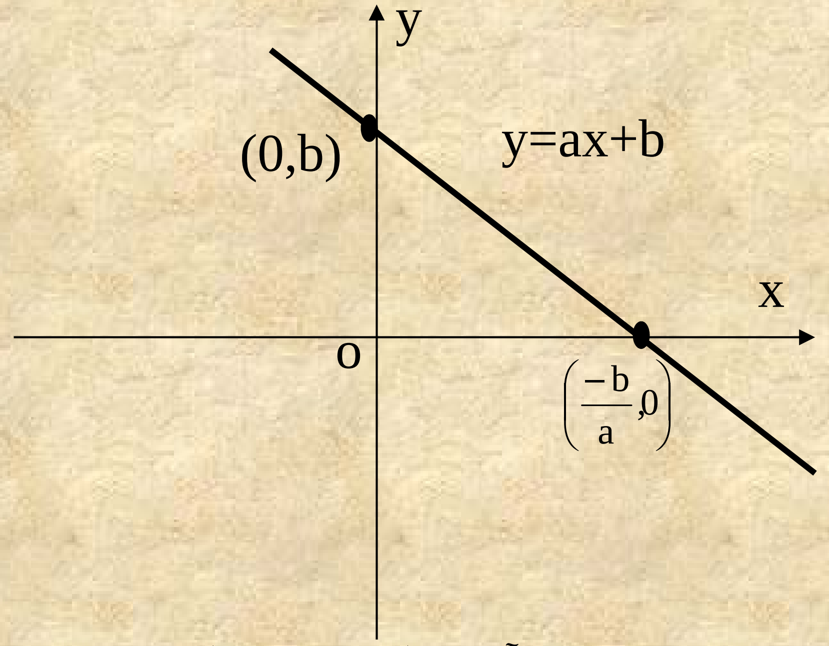
نیستند،می توانیم به صورت زیربنویسیم:

$$y=ax+b$$

که درآن bرا عرض از مبدا خط و $\frac{-b}{a}$را طول ازمبدا خط می نامیم.

توجه کنید که اعدادحقیقی bو $\frac{-b}{a}$به ترتیب به ازای $x=0$ و $y=0$از معادله

$y=ax+b$، به دست می آیند.به شکل 2-12 نگاه کنید.



درحقیقت (0,b)،نقطه ای است که درآ«خط مورد نظر با محور yها تلاقی می کند

و $\left(\frac{-b}{a},0\right)$ نیز نقطه است که درآن خط مورد نظر محور xها را قطع می کند.

در معادله y =ax+b،شیب خط برابر aاست .چون این معادله برحسب a،شیب ،وb،

عرض از مبدا خط ،نوشته شده است،آن را **معادله شیب و عــرض از مبدا خط** می نامیم.

23-2-2مثال:

نمودار خطی با معادله $y = -\frac{2}{3}x + 2$ را رسم کنید.

حل:

چون معادله خط به صورت شیب و عرض از مبدا داده شده است،لذا تعیین نقاط

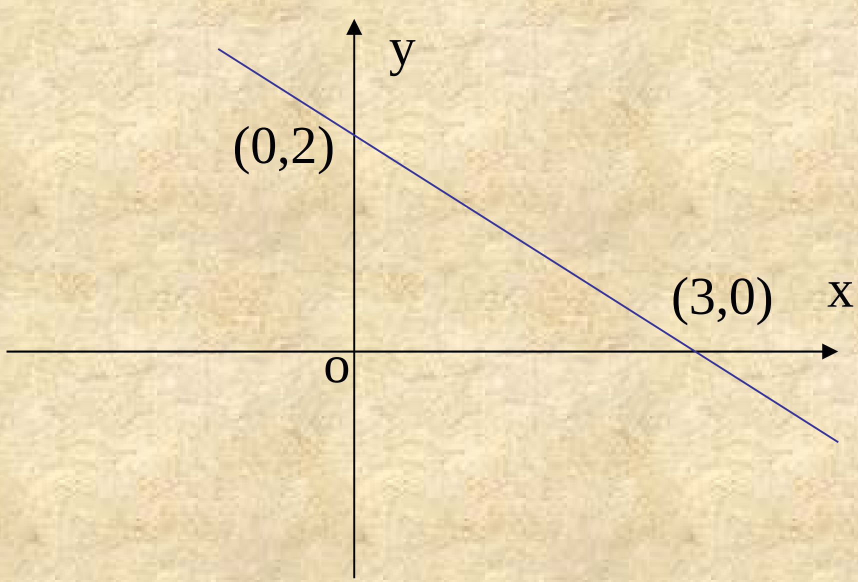
تلاقي خط با محور های مختصات ،یعنی عرض از مبدا وطول از مبدا خط،

ساده است. داریم:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$
$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

چون دو نقطه $(0,2)$و$(3,0)$ روی این خط قراردارند،خطی که این دو نقطه را به

هم وصل کند،نمودارخط داده شده است.این نمودار درشکل 2-13 نشان داده شده است.



26-2-2 فاصله یک نقطه از یک خط:

فاصله نقطه P(a,b) از خط L با معادله Ax+By+c=0 برابراست با:

$$d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

27-2-2 فاصله دو خط موازی:

فاصله دو خط موازی با معادله های $Ax+By+C=0$ و $Ax+By+D=0$ برابر است با:

$$h=\frac{|C-D|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

31-2-2 مختصات نقطه تلاقی دو خط:

نقطه تلاقی دو خط، نقطه ای است که برهر دو خط واقع است.بنابراین اگر معادله های

دو خط به صورت $Ax+By+C=0$ و $A'x+B'y+C'=0$ باشند، مختصات نقطه

تلاقی این دو خط ،از حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به دست می آید:

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ A'x+B'y+C'=0 \end{cases}$$

مثال 2-2-32:

مختصات نقطه تلاقی دوخط با معادله های $3x-4y+6=0$ و $x-2y-3=0$ را به دست آورید.

حل:

بنابر 2-2-31 باید دستگاه دو معادله دو مجهولی زیررا حل کنیم.

$$\begin{cases} 3x-4y+6=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases}$$

برای این کار، معادله دوم دستگاه بالا رادر (-3)ضرب ونتیجه را با معادله اول

دستگاه جمع می کنیم،یعنی

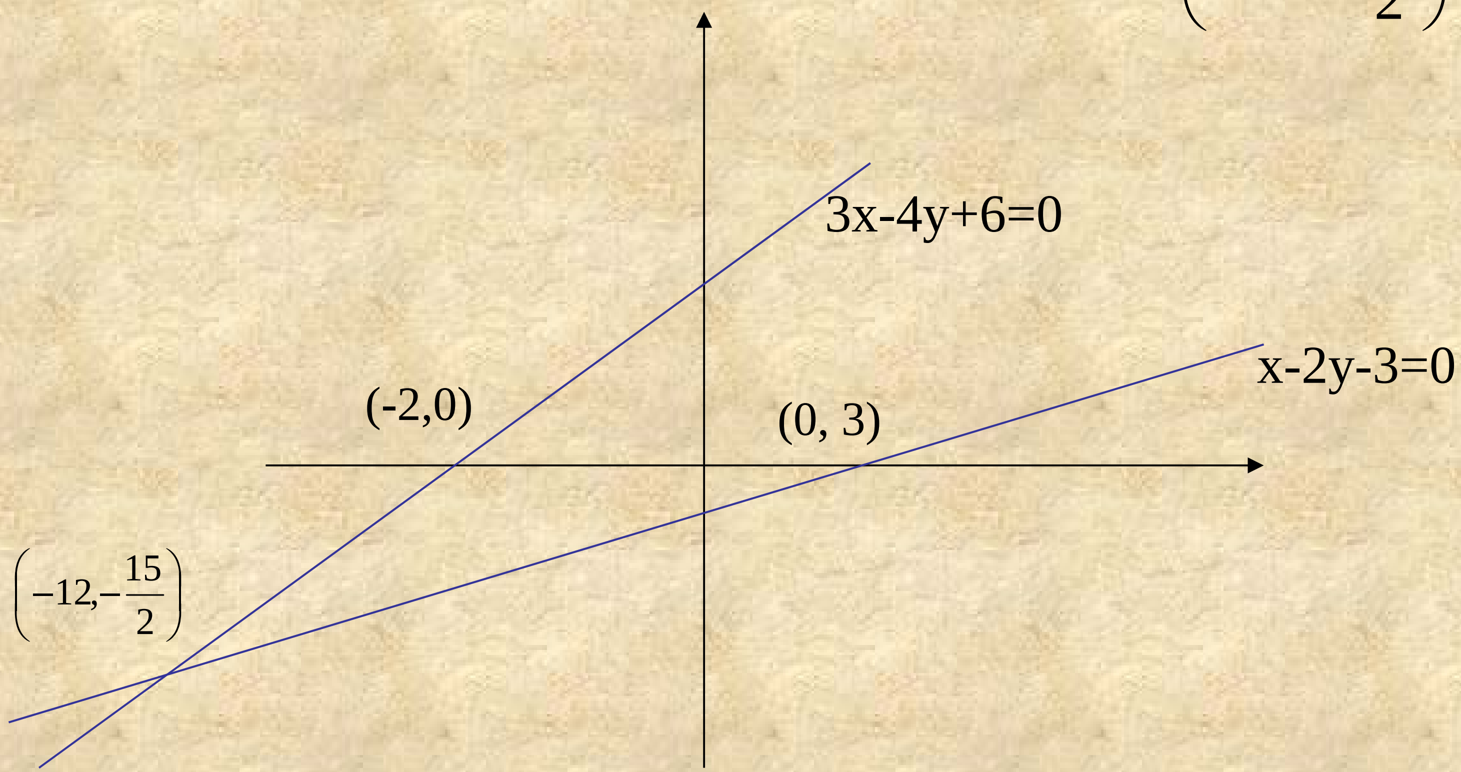
$$\begin{cases} 3x-4y+6=0 \\ -3x+6y+9=0 \end{cases}$$

$$\overline{\quad 0+2y+15=0 \quad}$$

در نتیجه، $y=-\frac{15}{2}$. با قرار دادن $y=-\frac{15}{2}$ در معادله دوم دستگاه به دست می آوریم

$$x-2\left(\frac{-15}{2}\right)-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=-12$$

بنا براین $\left(-12,-\frac{15}{2}\right)$ نقطه تلاقی دو خط است



2-3دستگاه مختصات قطبی

1-3-2 مقدمه:

در بخش 2-1دیدیم که مکان یک نقطــه از صفحه را می توانیم با طول وعرض آن نقطه در دستگاه مختصات دکارتی مشخص کنیم.روش دیگری برای تعیین محل یک نقطه در صفحه وجوددارد که به کمک دستگاه مختصات قطبی انجام می شود.

دراین بخش ،دستگاه مختصات قطبــی را معرفــی می کنیم و سپس به بررسی مختصات قطبــی یک نقطه ورابطه آن با مختصات دکارتی آن نقطه می پردازیم.

3-3-2 تعریف:

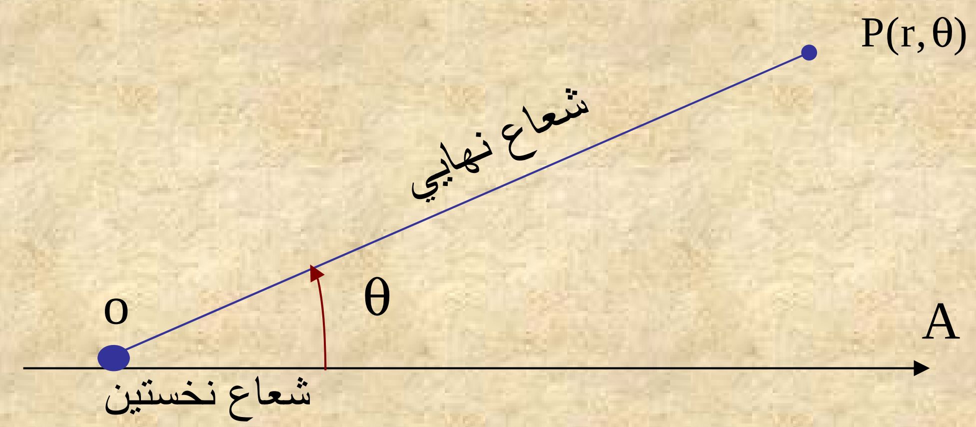
فرض می کنیم P نقطه ای ثابت باشد که بر o،قطب،منطبق نیست.اگر θ زاویه

جهت دار AoP باشد،oA را شعاع نخستین و oP را شعاع نهایی زاویه θ می نامیم.

جهت مثبت دراندازه گیری زاویه θ ،برخلاف عقربه های ساعت (پادساعتگرد)

در نظر گرفته می شود.اگر r فاصله جهت دار o از P،باشد، زوج مرتب (r,θ)

مختصات قطبی نقطه P در صفحه می نامیم،ومی نویسیم $P(r,\theta)$ به شکل 2-16 نگاه کنید.



معمولا“ زاویه θ برحسب درجه یا رادیان اندازه گیریمی شود.بین درجه ورادیان،

رابطه زیر برقراراست.

$$1 \text{ درجه} = \frac{\pi}{180} \text{ رادیان}$$

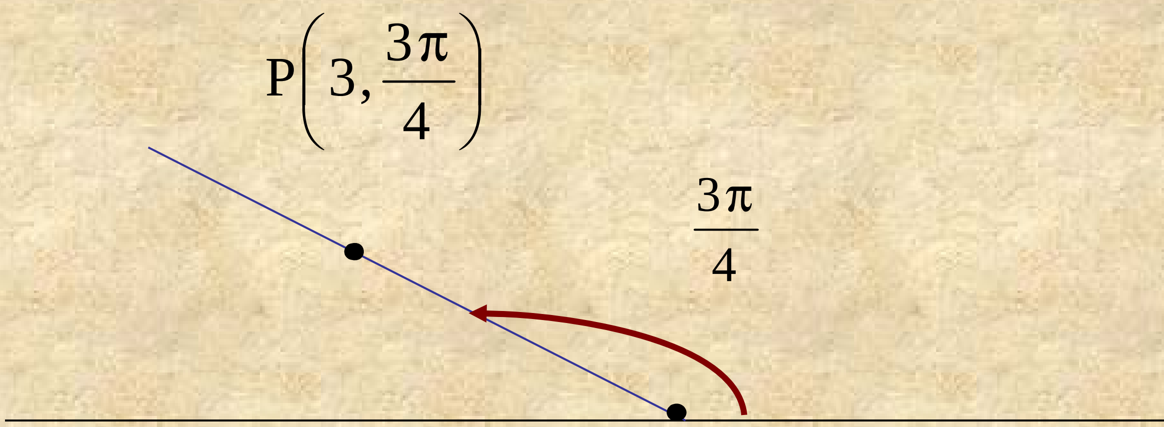
شعاع نهایی oPرا **شعاع حامل** نقطه Pنیز می نا مند.

2-3-4مثال:

براي تعیین مکان نقطه Pبه مختصات قطبی $\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$ ،ابتدا نیم خطی از o

رسم می کنیم به طوریکه زاویه AoPبرابر $\frac{3\pi}{4}$ باشد. نقطه ای که روی شعاع

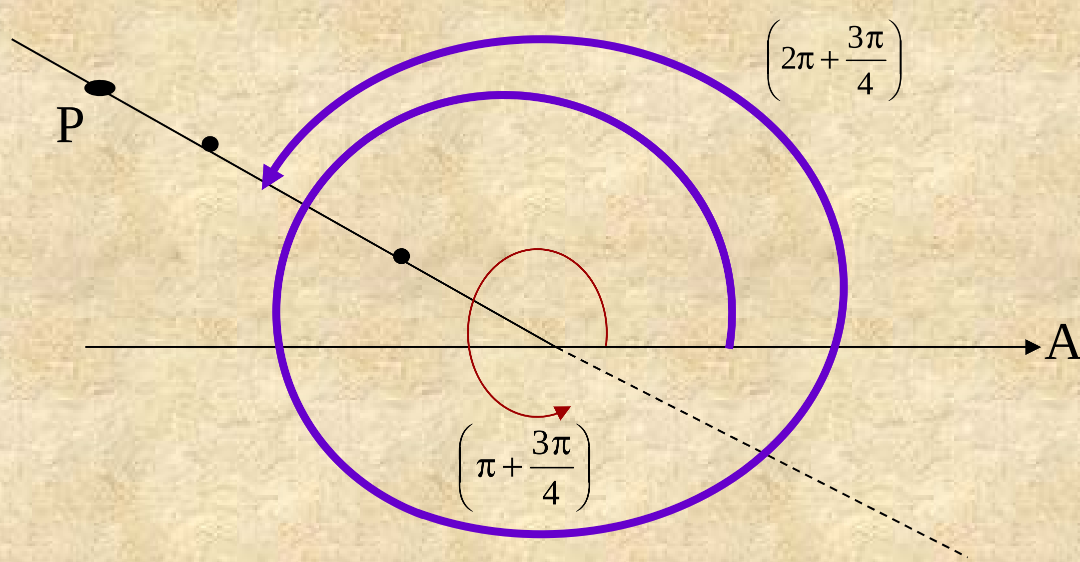
نهایی این زاویه و در فاصله 3 از oقراردارد همان نقطه Pاست.


$P\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$
$\frac{3\pi}{4}$

5-3-2 نکته:

در دستگاه مختصات قطبی ،نقاط $\left(3,\frac{3\pi}{4}\right)$، $\left(-3,\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$ و $\left(3,2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$ وبه طور

کلی به ازلی هر عدد صحِح k،نقطه $\left(3(-1)^{k},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$ برهم منطبق هستند.

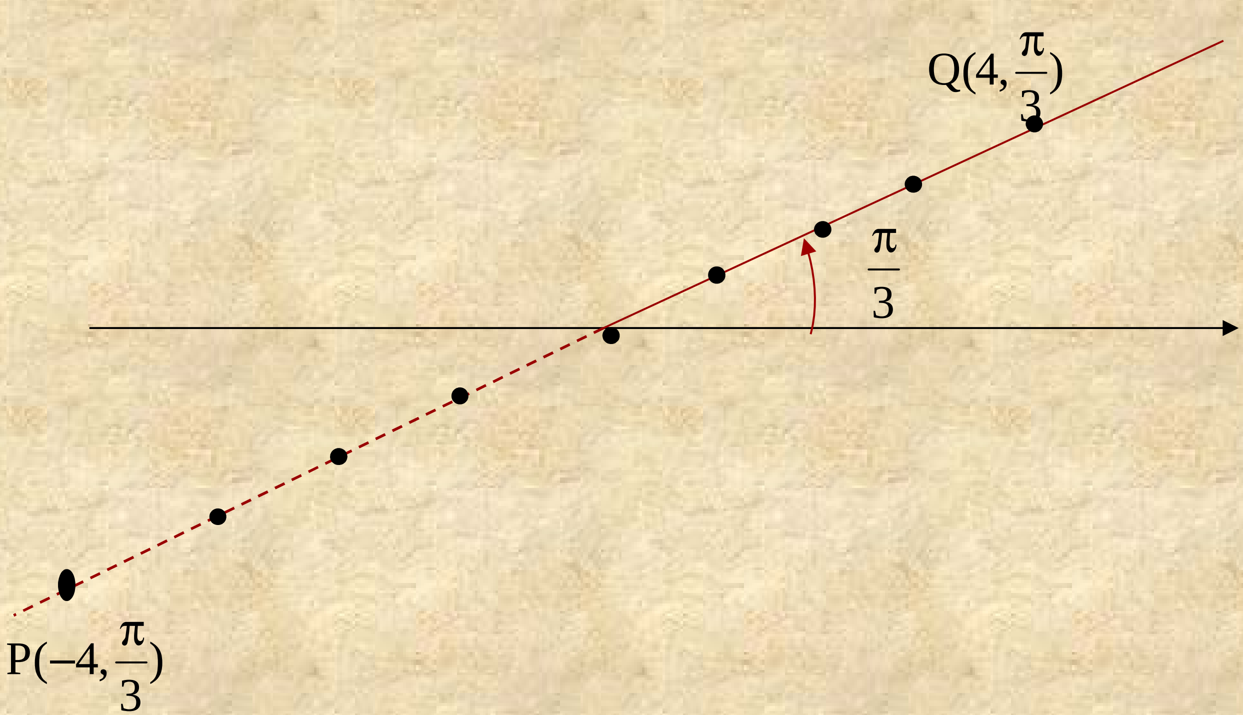


6-3-2 نکته:

در مختصات قطبی ،عدد r می تواند منفی نیز باشد.دراین صورت نقطه P به جای

اینکه درروی شعاع نهایی زاویه θ باشد،درامتداد این شعاع ودرجهت مخالـف

به فاصله از o واقع است .



11-3-2رابطه میان دستگاه مختصات دکارتی و قطبی :

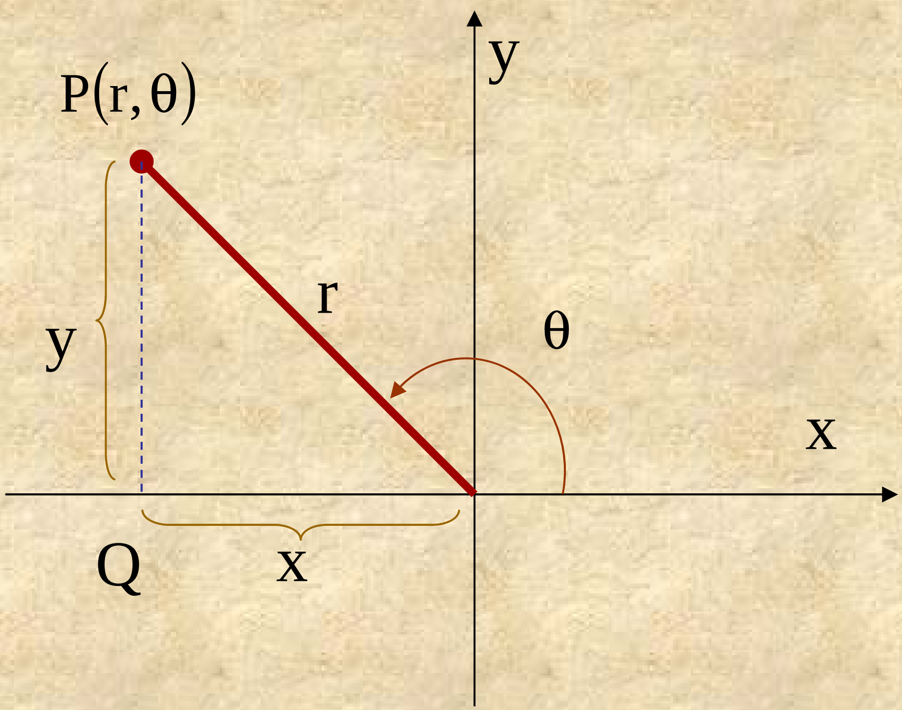
فرض می کنیم محورxها منطبق بر محور قطبی و o،مبدا دستگاه مختصات دکارتی روی قطب واقع باشد.محور yها را منطبق بر شعاع $\theta = \frac{\pi}{2}$ اختیار می کنیم.

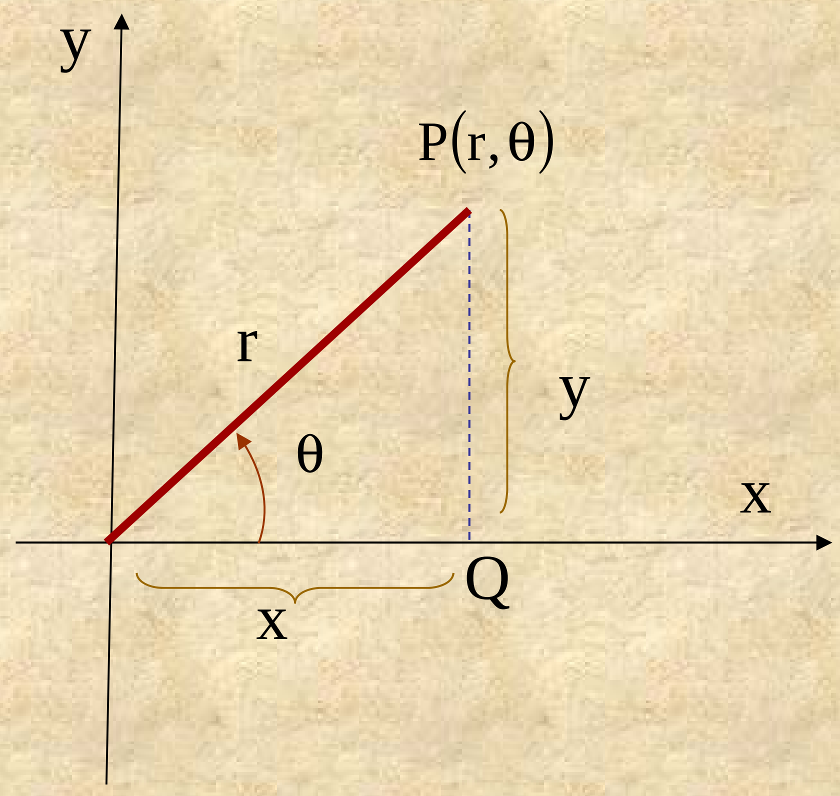
فرض می کنیم مختصات قطبی نقطه Pنسبت به محور ox وقطب o،زوج مرتب (r,θ) و مختصات دکارتی این نقطه نسبت به دستگاه مختصات دکارتـی xoy، زوج مرتب (z,y)باشد.در تعیین رابطه بین r, y, x وθ بسته به علامت rدو حالت تشخیص می دهیم:

1)اگر $r>0$،نقطه P رویشعاع نهایی زاویه θواقع لست.به طوری که درشکل های

زیر دیده می شود،در مثلث قائم ازاویه oPQداریم:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$





پس

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta$$

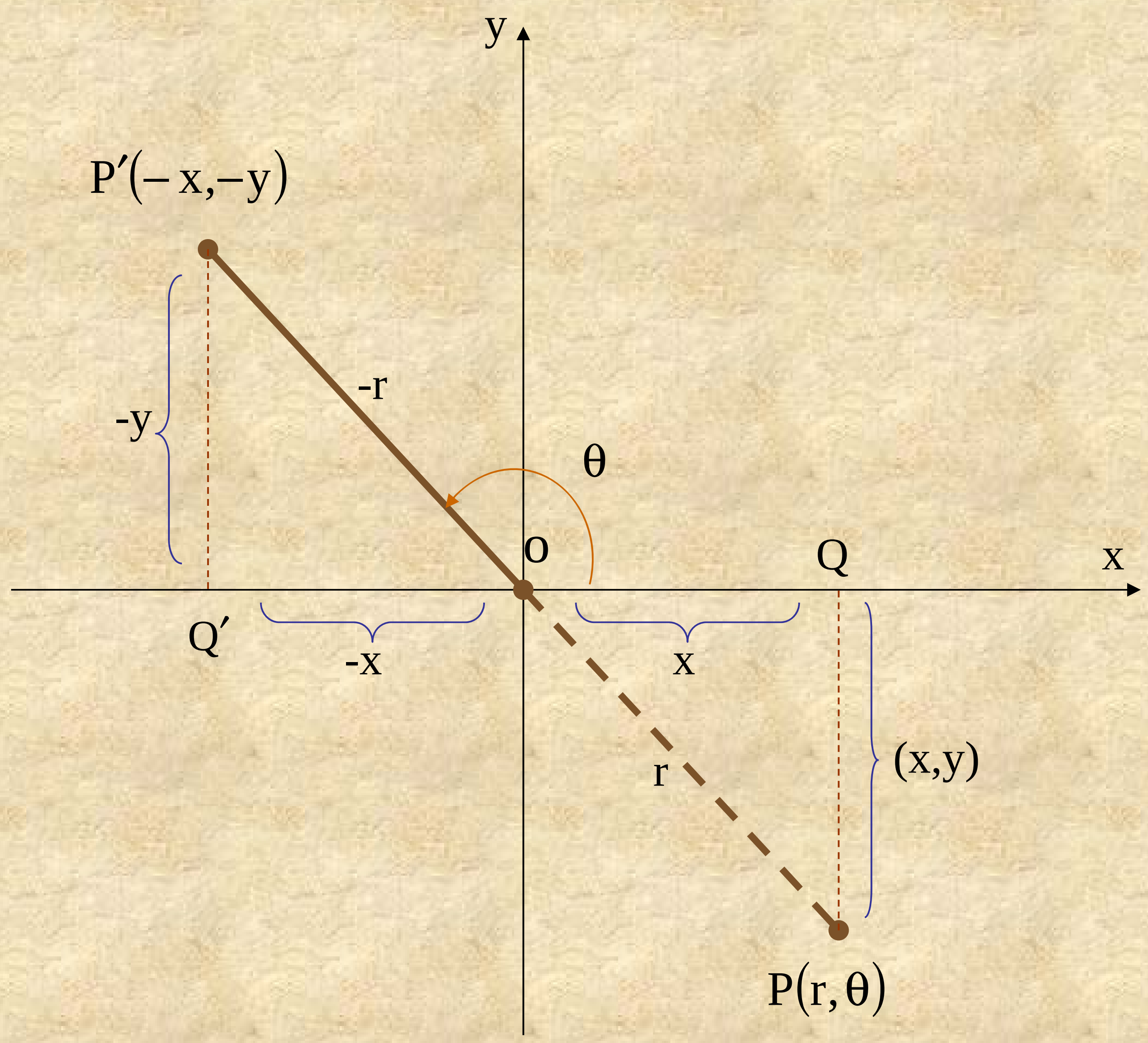
$$= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$$

بنابراین

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2) اگر $r<0$، نقطه P روی ادامه شعاع نهایی زاویه θ واقع است.

شکل اسلا ید بعدی راببینید.



y
$P'(-x, -y)$
-r
-y
θ
O
Q
x
Q'
-x
x
r
(x,y)
$P(r, \theta)$

در مثلث قائم الزاويه $oP'Q'$ داريم:

$$\cos\theta = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}$$

با توجه به حالت هاي (1)و(2) داريم:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

که از آن نتيجه می شود.

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

12-3-2مثال:

فرض کنید مختصات قطبی نقطه P،زوج مرتب $(-3, \frac{\pi}{6})$باشد،مختصات دکارتی P راتعیین کنید.

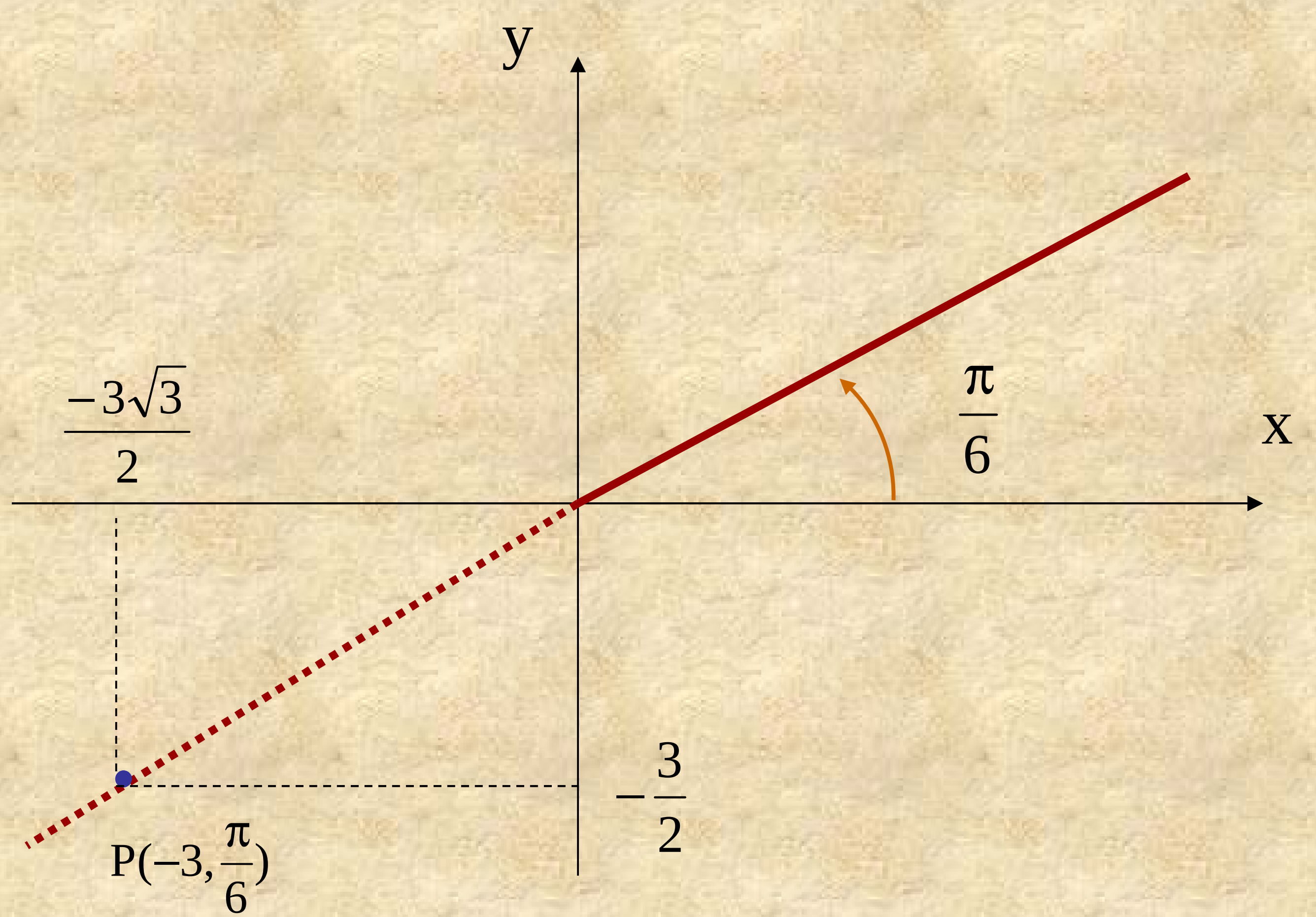
حل:

بنابر2-3-11 مختصات دکارتی Pعبارت است از

$$x = r\cos\theta = -3\cos\frac{\pi}{6} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

$$y = r\sin\theta = -3\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{3}{2}$$

بنابراین مختصات دکارتي P،زوج مرتب $(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$ است.


y
x
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{3}{2}$
$P(-3, \frac{\pi}{6})$

13-3-2 مثال:

فرض کنید مختصات دکارتی نقطه P،زوج مرتب $(1,\sqrt{3})$ باشد.بافرض $r>0$ و

$0 \le \theta \le 2\pi$ مختصات قطبی نقطه P راتعیین کنید.

حل:

بنابر روابط بین دستگاه های مختصات دکارتی و قطبی در 2-3-11 داریم

$$\begin{cases} 1 = r\cos\theta \\ \sqrt{3} = r\sin\theta \end{cases} \qquad , \qquad r = \pm\sqrt{1+3} = \pm 2$$

از $r>0$ نتیجه باشدکه $r=2$.برای تعیین θ ازمعادله های

$$\begin{cases} 1 = 2\cos\theta \\ \sqrt{3} = 2\sin\theta \end{cases}$$

به دست می آوریم

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

بنابراین مختصات قطبی نقطه P،زوج مرتب $(2, \frac{\pi}{3})$است.

16-3-2 تعریف:

فرض کنیم (r, θ)مختصات قطبی یک نقطه در صفحه باشد.معادله ای به

صورت $r = f(\theta)$را ***معادله قطبی*** می نامیم.

18-3-2مثال:

معادله قطبی $r^2 = \cos^2\theta + \sin 2\theta$ را در نظر می گیریم. می خواهیم معادله دکارتی آن را تعیین کنید.

حل:

باشرط $r \neq 0$ قرارمی دهیم

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$r^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta$$

پس

$$x^2 + y^2 = 2(\frac{y}{r})(\frac{x}{r}) + (\frac{x}{r})^2$$

$$= \frac{2xy + x^2}{x^2 + y^2}$$

در نتیجه بدست می آوریم.

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy + x^2$$

فصل سوم

رابطه وتابع

هدف کلی

هدف کلی فصل این است که با مفاهیم رابطه و تابع، انواع توابع ، توابع خاص ، اعمال جبری روی توابع، و وارون تابع آشنا شوید.

هدفهای رفتاری

از شما انتظار می رود که پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:

1) مفهوم رابطه را توضیح دهید.

2) تابع را تعریف کنید وتفاوت آن را با رابطه توضیح دهید.

3) دامنه تابعی را که ضابطه تعریف آن داده شده است ، تعیین کنید.

4)نمودار توابع را با روش نقطه یابی رسم کنید.

5) اعمال جبری روی توابع را تعریف کنید و در حل مسائل بکار ببرید.

6) انواع توابع جبری معرفی شده در کتاب را بشناسید ، ویژگیهای

هر یک را بشناسید و این ویژگیها را در حل مسائل به کار ببرید.

7) انواع توابع غیر جبری معرفی شده در کتاب را بشناسید ،

ویژگیهای هر یک را بشناسید و این ویژگیها را در حل مسائل به کار ببرید.

8) تعیین کنید که هر تابع معلوم زوج است یا فرد، یا هیچکدام.

9) تعیین کنید که تابع معلوم کراندار است یا بیکران.

10) تعیین کنید تابع پوشاست یا نه.

11) تعیین کنید تابع یک به یک است یا نه.

12) شرایط وارون پذیری تابع را توضیح دهید و وارون آن هر تابع معلوم

را ، در صورت وجود ، تعیین کنید.

13) نشان بدهید که توابع نمایی و لگاریتمی وارون همدیگرند.

14)وارون توابع مثلثاتی را توضیح بدهید.

مقدمه:

در علوم گوناگون ، مجموعه هایی که عضوهای آنها زوج مرتب اند اهمیت

خاصی دارند. در این فصل به معرفی و مطالعه این گونه مجموعه ها می
پردازیم.