مشتق

derivative

اوایل قرن ۱۷ میلادی ← فرما (ریاضیدان فرانسوی)

ماکزیمم و می نیمم توابع ← مشتق

ایده اصلی حساب دیفرانسیل ← مشتق

y', f' ← لاگرانژ ۱۸۱۳-۱۷۳۶

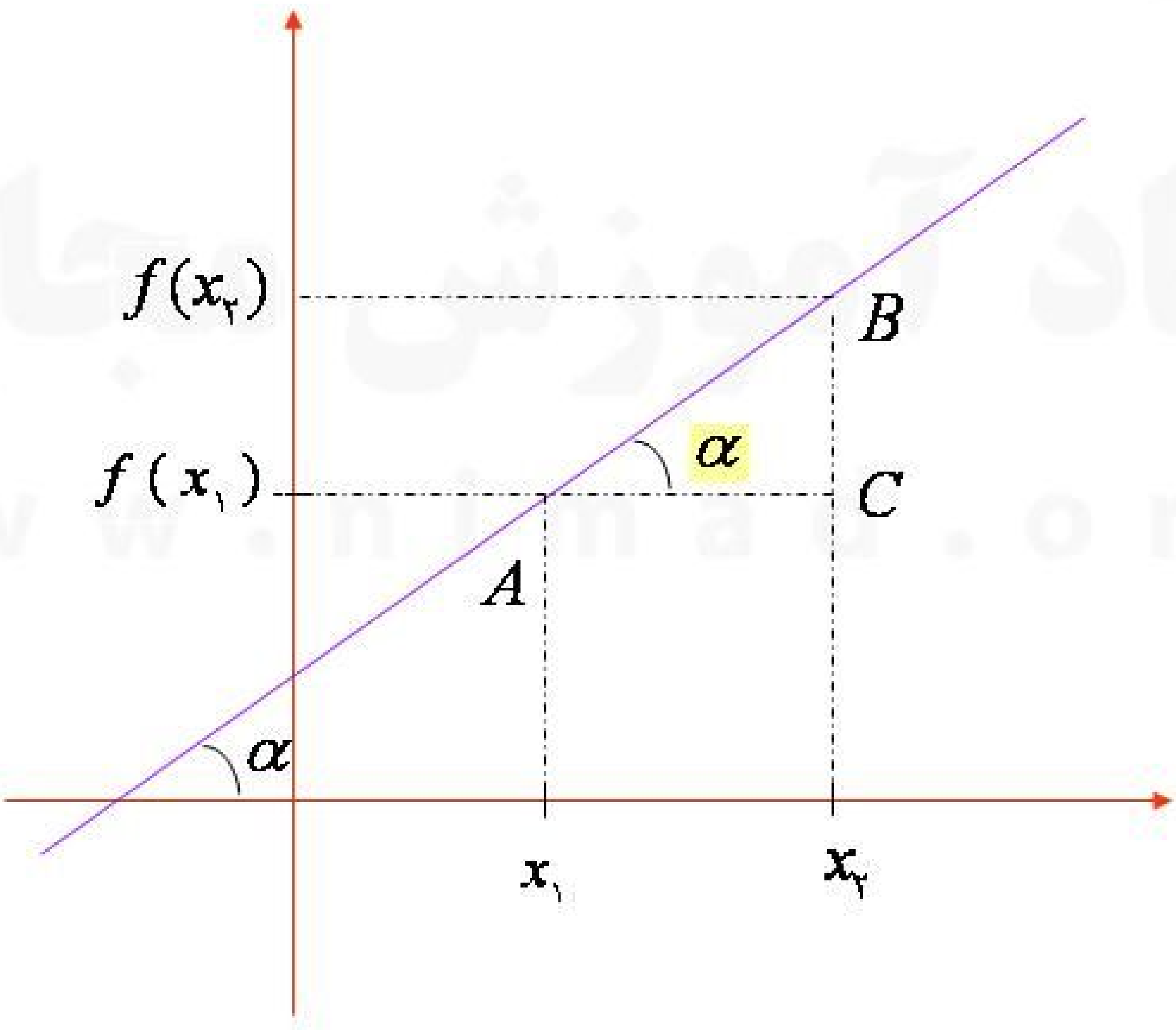
Df ← آربوگاست ۱۸۰۳-۱۷۵۹

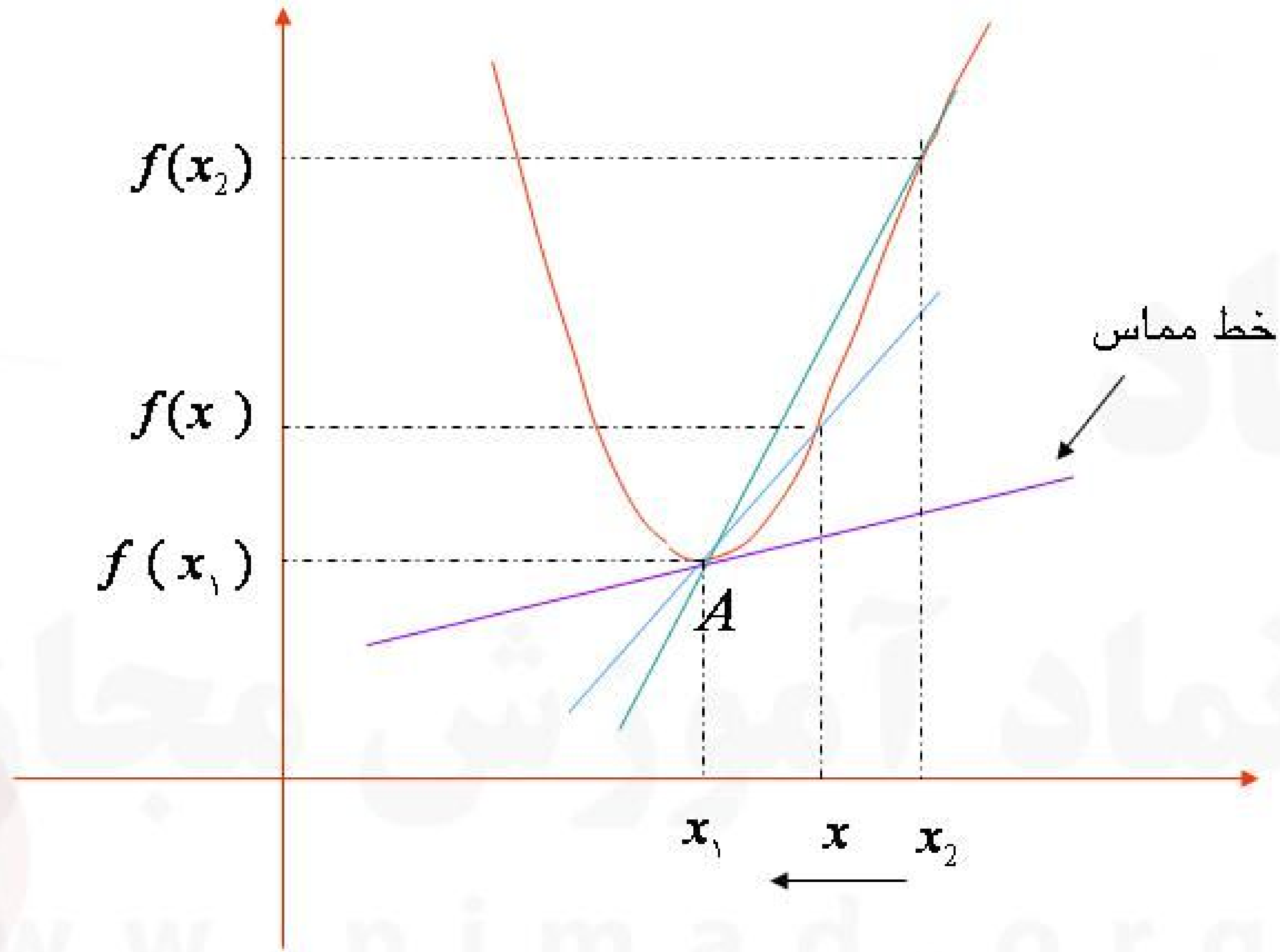
$\frac{\Delta f}{\Delta x}, \frac{df}{dx}$ ← لایب نیتز ۱۷۱۶-۱۶۴۶

بیان کنایه آمیز جورج بارکلی ← اشباح کمیتهای محو شده

۱۷۵۳-۱۶۸۵

$$\text{شیب خط} = m = \tan\alpha = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } \alpha}{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } \alpha} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$





شیب خط مماس بر تابع f در نقطه A $= \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$

تعریف مشتق

مشتق تابع f

در نقطه $x=a$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

توجه:

حد فوق موجود نباشد $\xleftrightarrow{\text{تعریف}}$ تابع در نقطه $x=a$ مشتق پذیر نیست

تعریف:

مشتق راست تابع f
در نقطه $x=a$

$$f'_{+}(a)=\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تعریف:

مشتق چپ تابع f
در نقطه $x=a$

$$f'_{-}(a)=\lim_{x\to a^{-}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

توجه:

f در نقطه $x=a$ مشتق پذیر	$\longleftrightarrow$	$f'_+(a)=f'_-(a)$ و متناهی

تعریف معادل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

توجه: برای بدست آوردن ضابطه $f'(x)$ از رابطه فوق استفاده می کنیم.

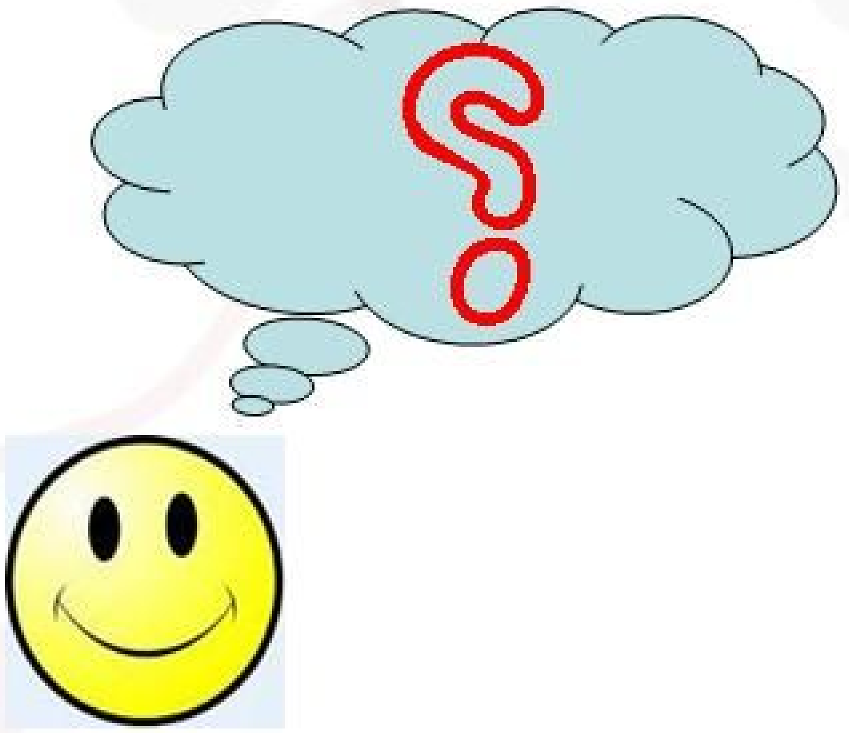
توجه: مشتق در نقطه $x=a$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال:

مشتق تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$



راه حل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+2}-\sqrt{x+2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h+2)-(x+2)}{h\left(\sqrt{x+h+2}+\sqrt{x+2}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h+2}+\sqrt{x+2}}=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

مثال:

مشتق تابع زیر را در نقطه $x=2$ به دست آورید.

$$f(x)=\left|x^{2}-2x\right|$$

راه حل:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left|x^2-2x\right|-0}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{|x|\,|x-2|}{x-2}$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x|\,|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x\,(x-2)}{x-2}=2$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x|\,|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x(2-x)}{x-2}=-2$$

$f'_+(2)\neq f'_-(2)$ تابع در نقطه $x=2$ مشتق پذیر نیست.

مثال:

مشتق تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x)=\sin x$$

راه حل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)+\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\sin x\,\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\,\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$=(\sin x)(0)+(\cos x)(1)=\cos x$$

قضیه:

$\boxed{f : x = a \text{ مشتق پذیر}} \Longrightarrow \boxed{f : x = a \text{ پیوسته}}$

توجه: عکس قضیه فوق برقرار نیست.

مشتق پذیری $\Longrightarrow$ پیوستگی

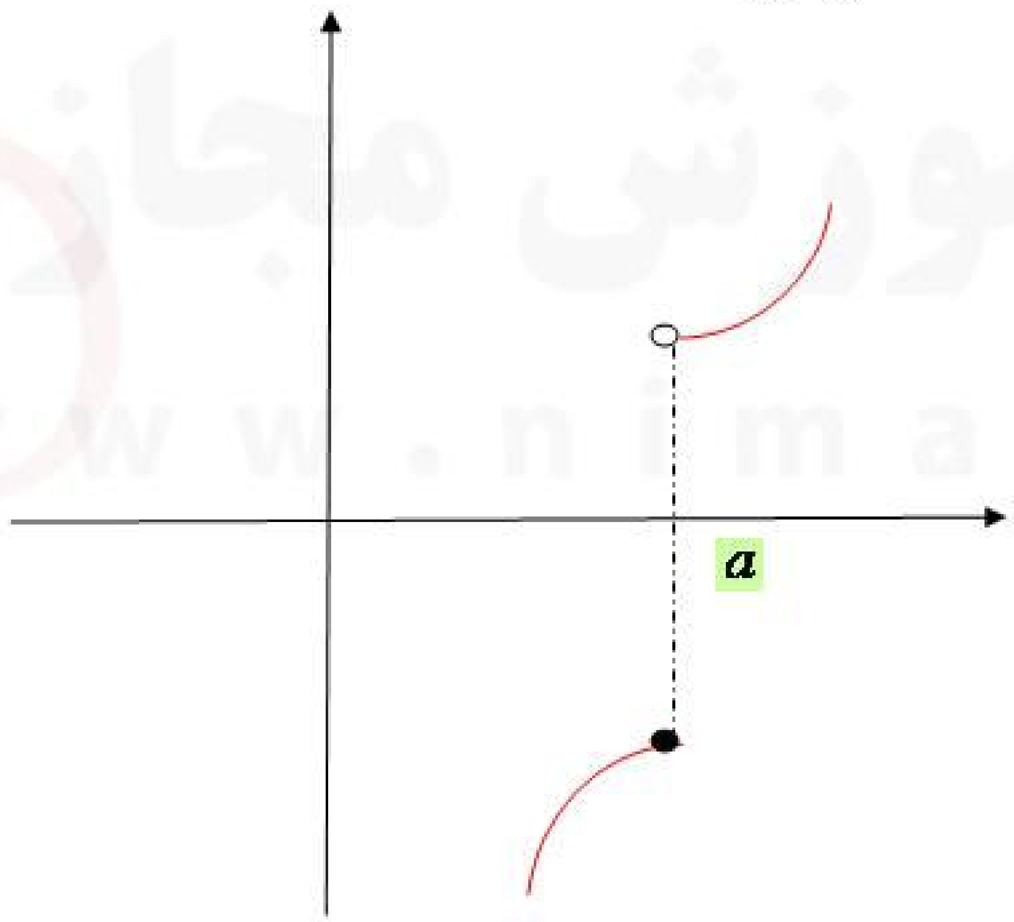
ناپیوستگی $\Longrightarrow$ مشتق ناپذیری

پیوستگی $\not\Longrightarrow$ مشتق پذیری

نقاط مشتق ناپذیر

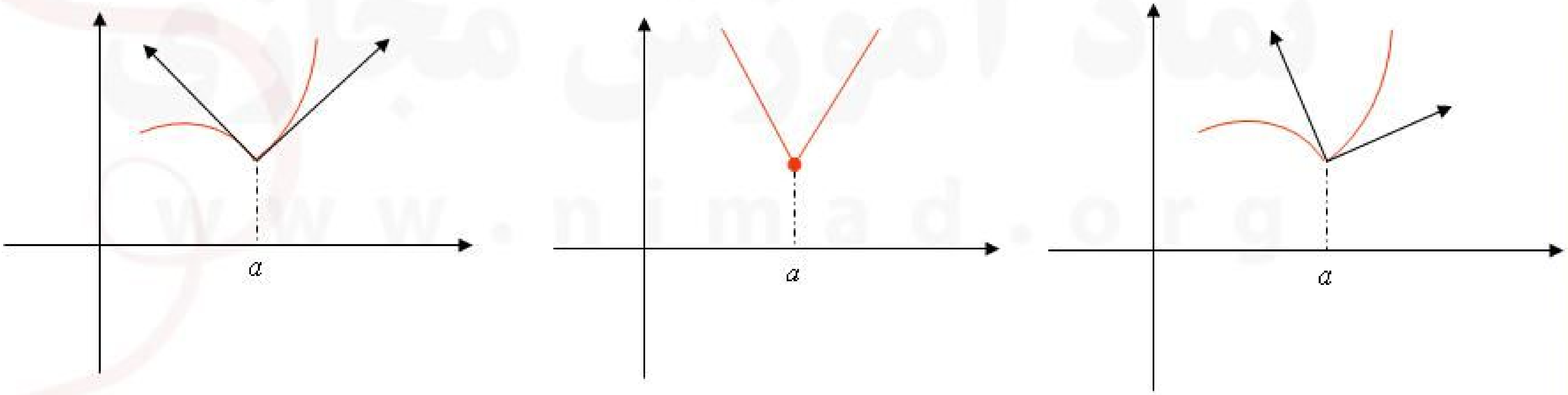
۱- نقاط ناپیوستگی یک تابع

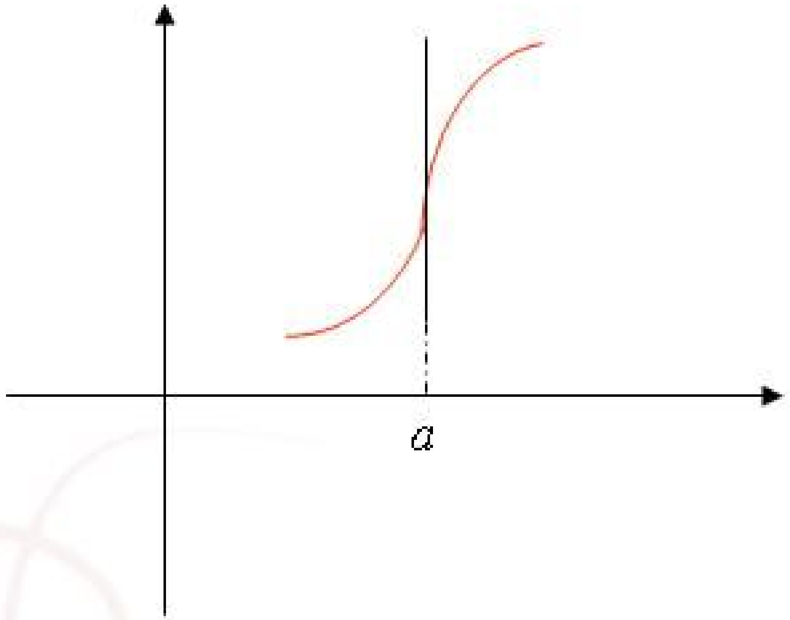
اگر تابع در نقطه ای ناپیوسته باشد، در آن نقطه مشتق ناپذیر نیز می باشد.



۲- نقاط زاویه دار:

نقاطی که مشتق چپ و راست در آن نقاط وجود دارند ولی با هم برابر نباشند (در این حالت دو نیم مماس می توان بر منحنی رسم کرد) یا حداکثر یکی از مشتق های چپ و راست نامتناهی باشد.



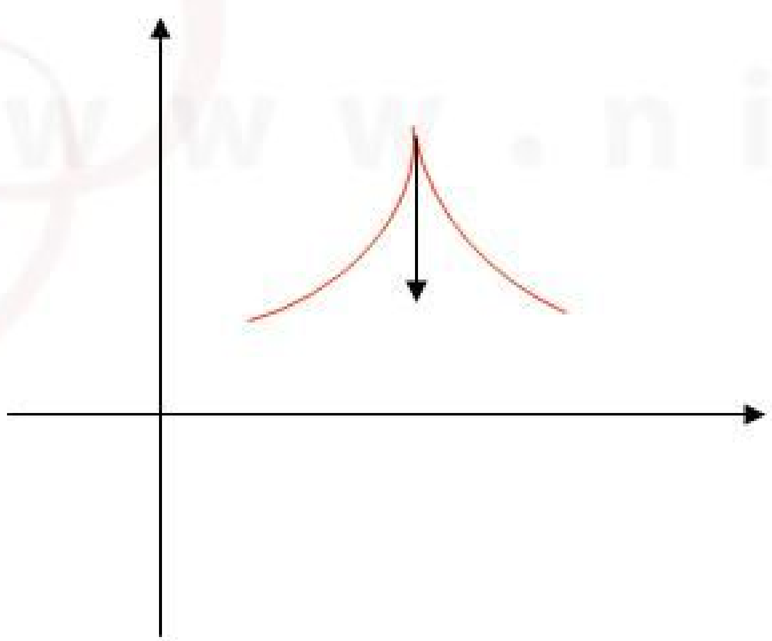


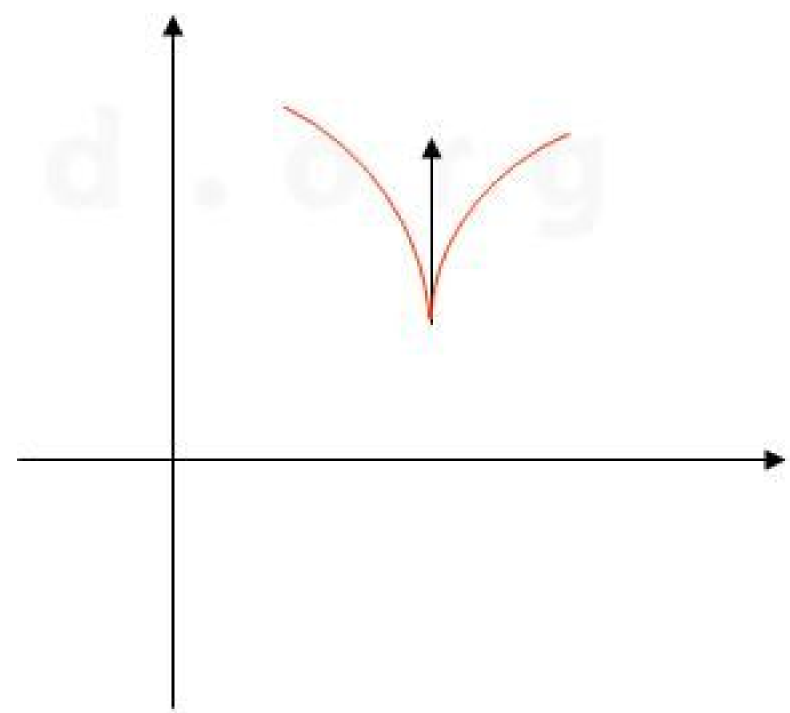
۳- نقاطی که مشتق در آنها بی نهایت است.

در این حالت خط مماس بر منحنی موازی محور y هاست.

٤- نقاط بازگشت: نقاطی که تابع در آن پیوسته است و

$f'_+(a)=+\infty$, $f'_-(a)=-\infty$ یا $f'_+(a)=-\infty$, $f'_-(a)=+\infty$





روش های

مشتق گیری

بازی

مهره ها: توابع و علامتی به نام پریم

هدف: حذف پریم طبق قوانین بازی

دسته اول : فرمول های اصلی

(۱) $(\sin ax)' = a\cos ax$ (a عدد)

(۲) $(\cos ax)' = -a\sin ax$ (a عدد)

(۳) $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$

(۴) $(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x)$

(۵) $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$

(۶) $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$

دسته اول : فرمول های اصلی

(۷) $$\left(Arc\sin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(۸) $$\left(Arc\cos x\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(۹) $$\left(Arc\tan x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

(۱۰) $$\left(Arc\cot x\right)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

دسته اول : فرمول های اصلی

(۱۱) $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

(۱۲) $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$ (عدد a)

(۱۳) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

(۱۴) $\left(\log_{a} x\right) = \dfrac{1}{x\ln a}$ (عدد a)

دسته اول : فرمول های اصلی

(۱۵) $\left(x^n\right)' = n\,x^{n-1} \Rightarrow$

(۱۶) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(۱۷) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$

(۱۸) $(x)' = 1$

(n عدد)

(۱۹) $\left(|x|\right)' = \dfrac{x}{|x|}$

(۲۰) $(c)' = 0$ (c عدد ثابت)

دسته اول : فرمول های اصلی

(۲۱) $$(\sinh x)' = \cosh x$$

(۲۲) $$(\cosh x)' = \sinh x$$

(۲۳) $$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$$

(۲۴) $$(\coth x)' = -(\coth^2 x - 1)$$

(۲۵) $$(\sec h\,x)' = -\tanh x \cdot \sec h\,x$$

(۲۶) $$(\csc h\,x)' = -\coth x \cdot \csc h\,x$$

توجه:

توابع بیان شده فوق در مجموعه نقاط دامنه شان مشتق پذیر می باشند.

مثال: مشتق تابع زیر را به دست آورید.

$$\left(\pi^{e}\right)' = 0$$

بنا به فرمول (۲۰) فرمول های اصلی

$$\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)' = 0$$

بنا به فرمول (۲۰) فرمول های اصلی

$$\left(\sqrt[5]{x^{2}}\right)' = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$$

بنا به فرمول (۱۵) فرمول های اصلی

$$\left(3^{x}\right)' = 3^{x}.\ln 3$$

بنا به فرمول (۱۲) فرمول های اصلی

دسته دوم: چهار عمل اصلی

فرض کنید U و V توابعی بر حسب x باشند.

$$(U+V)' = U' + V'$$

$$(U-V)' = U' - V'$$

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + V' \cdot U$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - V' \cdot U}{V^2}$$

$$(CU)' = CU'$$ (C عدد)

توجه: مشتقات جمع، ضرب و تفریق برای حالت سه تابع و بیشتر نیز برقرار هستند و می توان آن ها را تعمیم داد.

فرض کنید U و V و W توابعی بر حسب x باشند.

$$(U+V+W)' = U' + V' + W'$$

$$(U-V-W)' = U' - V' - W'$$

$$(U \cdot V \cdot W)' = U' \cdot V \cdot W + V' \cdot U \cdot W + W' \cdot U \cdot V$$

نکته طلایی ۱: آخرین عمل جبری اولین عمل مشتق گیری است.

نکته طلایی ۲: استفاده از الگوها و جایگذاری در الگوها .

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y = 5x^4 - 3x^3 + 7x^2$$

راه حل:

$$y = \underbrace{5x^4}_{U} - \underbrace{3x^3}_{V} + \underbrace{7x^2}_{W}$$

بنا به قاعده جمع وتفریق مشتق

$$y' = \left(5x^4\right)' - \left(3x^3\right)' + \left(7x^2\right)'$$

بنا به خاصیت مشتق ضرب یک عدد در عبارت

$$y' = 5\left(x^4\right)' - 3\left(x^3\right)' + 7\left(x^2\right)'$$

بنا به فرمول (۱۵)

$$y' = 5 \times 4x^3 - 3 \times 3x^2 + 7 \times 2x$$

$$y' = 5 \times 4x^3 - 3 \times 3x^2 + 7 \times 2x$$

$$y' = 20x^3 - 9x^2 + 14x$$

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y=\left(x^2+5\right)\left(x^6-3x+1\right)$$

راه حل:

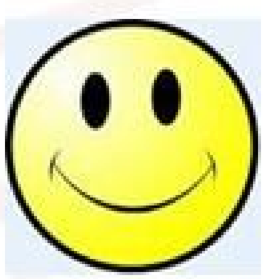
$$y = \underbrace{\left(x^2 + 5\right)}_{U}\underbrace{\left(x^6 - 3x + 1\right)}_{V}$$

بنا به الگوی مشتق حاصل ضرب

$$y' = \left(x^2 + 5\right)'\left(x^6 - 3x + 1\right) + \left(x^6 - 3x + 1\right)'\left(x^2 + 5\right)$$

بنا به فرمول مشتق حاصل جمع و فرمول (۱۵) و (۲۰)

$$y' = (2x + 0)\left(x^6 - 3x + 1\right) + \left(6x^5 - 3 + 0\right)\left(x^2 + 5\right)$$



مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y = \frac{\sin x}{\ln x}$$

راه حل:

$$y=\frac{\overbrace{\sin x}^{u}}{\underbrace{\ln x}_{v}}$$

بنا به الگوی
مشتق تقسیم

$$y'=\frac{(\sin x)'\cdot\ln x-(\ln x)'\sin x}{(\ln x)^2}$$

بنا به فرمول (۱) و (۱۳)
فرمول های اصلی مشتق

$$y'=\frac{(\cos x)\cdot\ln x-\frac{1}{x}\sin x}{\ln^2 x}$$

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y = e^{x} \cdot \tan x \cdot Arc\sin x$$

راه حل:

$$y = \underbrace{e^{x}}_{U} \cdot \underbrace{\tan x}_{V} \cdot \underbrace{Arc\sin x}_{W}$$

$$y' = \left(e^{x}\right)' \cdot \tan x \cdot Arc\sin x + (\tan x)' \cdot e^{x} \cdot Arc\sin x + (Arc\sin x)' \cdot e^{x} \cdot \tan x$$

بنا به فرمول های
(۳)و (۱۱) و (۷)

$$y' = e^{x} \cdot \tan x \cdot Arc\sin x + \left(1 + \tan^{2} x\right) \cdot e^{x} \cdot Arc\sin x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}} \cdot e^{x} . \tan x$$

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y = x^2 . \sec x + \tanh x$$

راه حل:

$$y = \underbrace{x^2.\sec x}_{U} + \underbrace{\tanh x}_{V}$$

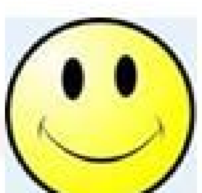
مشتق حاصل ضرب

$$y' = (\underbrace{x^2}_{U}.\underbrace{\sec x}_{V})' + (\tanh x)'$$

$$= (x^2)'.(\sec x) + (\sec x)'(x^2) + (\tanh x)'$$

بنا به فرمول های(۵) و (۱۵)و (۲۵) اصلی

$$= 2x.(\sec x) + \sec x.\tan x.x^2 + 1 - \tanh^2 x$$



دسته سوم: عبارات توان دار

U و V دو تابع بر حسب x باشند . m و a دو عدد حقیقی

(۱) $$\left(U^{m}\right)' = m \cdot U' \cdot U^{m-1}$$

حالت خاص

(۲) $$\left(a^{U}\right)' = U' \cdot a^{U} \cdot \ln a \quad \Longrightarrow \quad \left(e^{U}\right)' = U' \cdot e^{U}$$

(۳) $$\left(U^{V}\right)' = V \cdot U' \cdot U^{V-1} + V' \cdot U^{V} \cdot \ln U$$

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y = \pi^{\tan x}$$

راه حل:

$$y = \underbrace{\pi}_{a}^{\overbrace{\tan x}^{U}}$$

$$y' = (\tan x)' \cdot \pi^{\tan x} \cdot \ln \pi$$

بنا به فرمول (۲) عبارات توان دار

$$y' = (1 + \tan^2 x) \cdot \pi^{\tan x} \cdot \ln \pi$$

بنا به فرمول (۳) اصلی

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y = \left(\frac{3x^2 + 1}{x^3 + 2} \right)^4$$

راه حل:

$$y=\Bigg(\underbrace{\boxed{\frac{3x^2+1}{x^3+2}}}_{U}\Bigg)^{\overset{m}{4}}$$

بنا به فرمول (۱) عبارات توان دار

$$y'=4\left(\frac{3x^2+1}{x^3+2}\right)'\cdot\left(\frac{3x^2+1}{x^3+2}\right)^3$$

بنا به مشتق تقسیم

$$\left(\frac{\overbrace{3x^2+1}^{U}}{\underbrace{x^3+2}_{V}}\right)'=\frac{(3x^2+1)'(x^3+2)-(x^3+2)'(3x^2+1)}{(x^3+2)^2}$$

$$=\frac{6x\cdot(x^3+2)-3x^2\cdot(3x^2+1)}{(x^3+2)^2}=\frac{6x^4+12x-9x^4-3x^2}{(x^3+2)^2}$$

جایگذاری

$$\Rightarrow\quad y'=4\frac{-3x^4-3x^2+12x}{(x^3+2)^2}\cdot\left(\frac{3x^2+1}{x^3+2}\right)^3$$

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y = \left(Arc\tan x\right)^{\ln x}$$

راه حل:

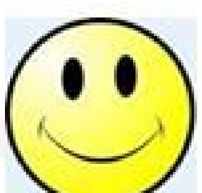
$$y = \left(\underbrace{Arc\tan x}_{U}\right)^{\overset{V}{\ln x}}$$

فرمول (۳) عبارات توان دار

$$y' = \ln x \cdot (Arc\tan x)' \cdot (Arc\tan x)^{\ln x - 1} + (\ln x)' \cdot (Arc\tan x)^{\ln x} \ln(Arc\tan x)$$

فرمول (۹) و (۱۳)

$$y' = \ln x \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot (Arc\tan x)^{\ln x - 1} + \frac{1}{x} \cdot (Arc\tan x)^{\ln x} \ln(Arc\tan x)$$



مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y = 3x^2 \cdot (\sinh x)^2$$

راه حل:

$$y = \underbrace{3x^2}_{U} \cdot \underbrace{(\sinh x)^2}_{V}$$

بنا به مشتق ضرب

$$y' = (3x^2)' \cdot (\sinh x)^2 + \left((\underbrace{\sinh x}_{U})^{\overset{n}{2}}\right)' \cdot 3x^2$$

فرمول (۱۵) اصلی ،

فرمول (۱) عبارات توان دار ،

$$y' = 6x \cdot (\sinh x)^2 + 2(\sinh x)' \cdot \sinh x \cdot 3x^2$$

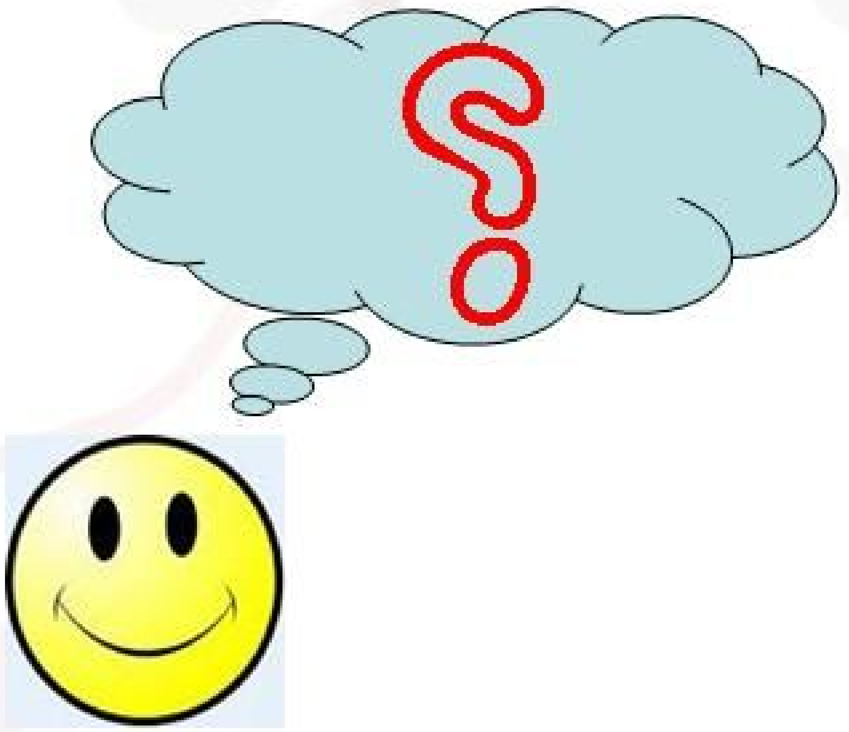
فرمول (۲۱) اصلی

$$y' = 6x \cdot (\sinh x)^2 + 2\cosh x \cdot \sinh x \cdot 3x^2$$

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{2}\left(x-e^{x}\right)^{3}$$



راه حل:

$$y=\underbrace{\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{2}}_{U}\underbrace{\left(x-e^{x}\right)^{3}}_{V}$$

$$y'=\left(\Big(\underbrace{\sqrt{x}+\frac{1}{x}}_{U}\Big)^{\overset{n}{2}}\right)'\left(x-e^{x}\right)^{3}+\left(\big(\underbrace{x-e^{x}}_{U}\big)^{\overset{n}{3}}\right)'\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{2}$$

$$y'=2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)'\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)\left(x-e^{x}\right)^{3}+3\left(x-e^{x}\right)'\left(x-e^{x}\right)^{2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{2}$$

$$y'=2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^{2}}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)\left(x-e^{x}\right)^{3}+3\left(1-e^{x}\right)\left(x-e^{x}\right)^{2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{2}$$

دسته چهارم: عبارات رادیکالی

U تابعی بر حسب x باشد. m و n عدد

$$\left(\sqrt[n]{U^m}\right)' = \frac{mU'}{n\sqrt[n]{U^{n-m}}}$$

$$\left(\sqrt{U}\right)' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$$ (حالت خاص)

توجه: در فرمول فوق توان m مربوط به کل عبارت زیر رادیکال می باشد.

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y = \sqrt[4]{\sin^3 x}$$

راه حل:

n

$$y = \sqrt[4]{\underbrace{\sin^{3} x}_{U}} \quad m$$

$$y' = \frac{3(\sin x)'}{4\sqrt[4]{(\sin x)^{4-3}}} = \frac{3\cos x}{4\sqrt[4]{\sin x}}$$

مثال:

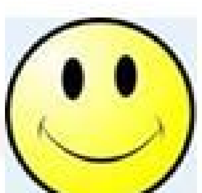
مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y = \sqrt{\tan x}$$

راه حل:

$$y=\sqrt{\tan\ x}$$

$$y'=\frac{(\tan\ x)'}{2\sqrt{\tan\ x}}=\frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan\ x}}$$



مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y = \sqrt[5]{x.\sin^3 x}$$

راه حل:

$$y=\sqrt[5]{x\sin^3 x}$$

n

$$y=\sqrt[5]{(\underbrace{x.\sin^3 x}_{U})^1}$$

$$y'=\frac{(x.\sin^3 x)'}{5\sqrt[5]{(x.\sin^3 x)^{5-1}}}=\frac{\sin^3 x+3x\cos x.\sin^2 x}{5\sqrt[5]{(x.\sin^3 x)^4}}$$

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y = \sqrt[3]{\cosh^2 x + x^3}$$

راه حل:

$$y = \sqrt[3]{\cosh^2 x + x^3}$$

$$y = \sqrt[\overset{n}{3}]{\left(\underbrace{\cosh^2 x + x^3}_{U}\right)^{\overset{m}{1}}}$$

$$y' = \frac{\left(\cosh^2 x + x^3\right)'}{3\sqrt[3]{\left(\cosh^2 x + x^3\right)^{3-1}}} = \frac{2\sinh x \cosh x + 3x^2}{3\sqrt[3]{\left(\cosh^2 x + x^3\right)^{2}}}$$

دسته پنجم: توابع مرکب

قاعده زنجیره ای:

$$\frac{d}{dx} f\left(g\left(x\right)\right) = g'\left(x\right) \cdot f'\left(g\left(x\right)\right)$$

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$h(x)=\sin^2\left(x^3+2x\right)$$

راه حل:

$$h(x) = \sin^2(x^3 + 2x)$$

$$g(x) = x^3 + 2x$$

$$f(x) = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \quad h(x) = f(g(x))$$

$$g(x) = x^3 + 2x \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 2$$

$$f(x) = \sin^2 x \Rightarrow f'(x) = 2\sin x \cos x$$

قاعده زنجیره ای

$$\Rightarrow$$

$$h'(x) = g'(x)\cdot f'(g(x)) = (3x^2 + 2)(2\sin(x^3 + 2x)\cdot \cos(x^3 + 2x))$$

مثال:

با فرض $g(x)=x^2-1$ و $f'(x)=\sqrt{3x+4}$ و $h(x)=fog(x)$

$h'(x)$ را به دست آورید.

راه حل:

$$h(x) = fog(x)$$

$$g(x) = x^2 - 1$$

$$f'(x) = \sqrt{3x+4}$$

$$g(x) = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 2x$$

$$h(x) = fog(x) = f(g(x))$$

$$\Rightarrow \quad h'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

$$h'(x) = 2x \cdot \sqrt{3(x^2-1)+4} = 2x\sqrt{3x^2+1}$$

مثال:

با فرض $f\left(x^3+6x\right)=g(\sin 4x+\sin 2x)$ و $f'(0)=5$

$g'(0)$ را به دست آورید.

راه حل:

$$f\left(x^3+6x\right)=g\left(\sin 4x+\sin 2x\right),\quad f'(0)=5$$

از طرفین مشتق می گیریم

$$\left(3x^2+6\right)f'\left(x^3+6x\right)=\left(4\cos 4x+2\cos 2x\right)g'\left(\sin 4x+\sin 2x\right)$$

$$x=0\quad\Rightarrow\quad 6f'(0)=(4+2)g'(0)$$

$$\Rightarrow\quad f'(0)=g'(0)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{g'(0)=5}$$

نکته :

$y = f(u)$: y تابعی از u

$u = g(x)$: u تابعی از x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

مثال:

با فرض $f(U)=U^2+5U+5$ و $g(x)=\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$

$(fog)'$ را به دست آورید.

راه حل:

$$f(U)=U^2+5U+5 \quad , \quad g(x)=\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$$

$$y=f(U)=U^2+5U+5 \qquad U=g(x)=\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$$

$$\frac{dy}{dU}=2U+5=2\left(\frac{x+2}{x-2}\right)+5=\frac{7x-6}{x-2}$$

$$\frac{dU}{dx}=\frac{1(x-2)-1(x+2)}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x-2}{(x-2)^2}=\frac{-4}{(x-2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dU}\times\frac{du}{dx}=\frac{7x-6}{x-2}\times\frac{-4}{(x-2)^2}=\frac{-28x+24}{(x-2)^3}$$

اگر U تابعی از x باشد.

(۱) $$(\sin U)' = U'\cos U$$

(۲) $$(\cos U)' = -U'\sin U$$

(۳) $$(\tan U)' = U'\left(1+\tan^2 U\right)$$

(۴) $$(\cot U)' = -U'\left(1+\cot^2 U\right)$$

(۵) $$\left(Arc\sin U\right)' = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$$

(۶) $$\left(Arc\cos U\right)' = \frac{-U'}{\sqrt{1-U^2}}$$

(۷) $$\left(Arc\tan U\right)' = \frac{U'}{1+U^2}$$

(۸) $$\left(Arc\cot U\right)' = \frac{-U'}{1+U^2}$$

(۹) $$\left(e^{U}\right)' = U' \cdot e^{U}$$

(۱۰) $$\left(\ln U\right)' = \frac{U'}{U}$$

(۱۱) $$\left(\log_{a} U\right)' = \frac{U'}{U \cdot \ln a}$$

(۱۲) $$\left(|U|\right)' = \frac{U' \cdot U}{|U|}$$

(۱۳) $$\left(\sec U\right)' = U' \cdot \sec U \cdot \tan U$$

(۱۴) $$\left(\csc U\right)' = -U' \csc U \cdot \cot U$$

(۱۵) $$(\sinh U)' = U' \cosh U$$

(۱۶) $$(\cosh U)' = U' \sinh U$$

(۱۷) $$(\tanh U)' = U'\left(1 - \tanh^2 U\right)$$

(۱۸) $$(\coth U)' = -U'\left(\coth^2 U - 1\right)$$

(۱۹) $$(\sec hU)' = -U' \sec hU \cdot \tanh U$$

(۲۰) $$(\csc hU)' = -U' \csc hU \cdot \coth U$$

نکته:

(قانون فلش) هنگامی که تعداد توابع مرکب زیاد می شود از قانون فلش استفاده می کنیم که شبیه قاعده زنجیره ای است.

$$\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = g'\left(x\right)\cdot f'\left(g\left(x\right)\right)$$

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \cos \ln \sin x^3$$

راه حل:

$$\left(\cos \ln \sin x^{3}\right)' = 3x^{2}\left(\cos x^{3}\right)\left(\frac{1}{\sin x^{3}}\right)\left(-\sin \ln \sin x^{3}\right)$$

$$\cos \boxed{\ln \boxed{\sin \boxed{x^{3}}}}$$

$$\boxed{3x^{2}}\ \boxed{\cos x^{3}}\ \boxed{\frac{1}{\sin x^{3}}}\ \left(-\sin \ln \sin x^{3}\right)$$

مثال:

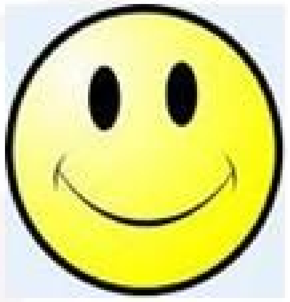
مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y = \tan^3 \arcsin \ln x$$

راه حل:

$$y = \tan^3 \arcsin \ln x$$

$$y' = (1)\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}\right)\left(3(1+\tan^2(\arcsin\ln x))(\tan^2(\arcsin\ln x))\right)$$



استفاده از لگاریتم

برای مشتق گیری

یوهان برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۸)

یادآوری

$$Ln\,(xy) = Ln\,x + Ln\,y$$

$$Ln\,(\frac{x}{y}) = Ln\,x - Ln\,y$$

$$Ln\,x^{m} = m\,Ln\,x$$

$$(Ln U)' = \frac{U'}{U}$$

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y=\frac{\left(x^{2}+3\right)^{3}\sqrt{x+1}\cdot\sin^{3}x}{\left(x^{2}+4\right)^{2}}$$

راه حل:

$$y=\frac{\left(x^2+3\right)^3\sqrt{x+1}\cdot\sin^3 x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

از طرفین Ln می گیریم.

$$\Longrightarrow \quad Lny=Ln\left(\frac{\left(x^2+3\right)^3\sqrt{x+1}\cdot\sin^3 x}{\left(x^2+4\right)^2}\right)$$

خاصیت ضرب و تقسیم Ln

$$\Longrightarrow \quad Lny=Ln\left(x^2+3\right)^3+Ln\sqrt{x+1}+Ln\sin^3 x-Ln\left(x^2+4\right)^2$$

خاصیت توان Ln

$$\Longrightarrow \quad Lny=3Ln\left(x^2+3\right)+\frac{1}{2}Ln(x+1)+3Ln\sin x-2Ln\left(x^2+4\right)$$

مشتق از طرفین

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 3\cdot\frac{(x^2+3)'}{x^2+3} + \frac{1}{2}\frac{(x+1)'}{(x+1)} + 3\frac{(\sin x)'}{\sin x} - 2\frac{(x^2+4)'}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \underbrace{3\cdot\frac{2x}{x^2+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)} + 3\frac{\cos x}{\sin x} - 2\frac{2x}{x^2+4}}_{A}$$

$$\Rightarrow \quad y' = y\cdot A$$

مثال:

اگر U و V توابعی بر حسب x باشند، مشتق

$$y = U^{V}$$

را محاسبه کنید.

راه حل:

$$y = U^V$$

$$\ln y = \ln U^V \quad \Rightarrow \quad \ln y = V \ln U$$

مشتق از طرفین

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = V' \cdot \ln U + (\ln U)' \cdot V$$

$$= V' \cdot \ln U + \frac{U'}{U} \cdot V$$

$$\Rightarrow \quad y' = y\left(V' \cdot \ln U + \frac{U'}{U} \cdot V\right) = U^V\left(V' \cdot \ln U + \frac{U'}{U} \cdot V\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' = V' \cdot U^V \cdot \ln U + U' \cdot V \cdot U^{V-1}}$$

مشتق توابع پارامتری

مشتق توابع پارامتری:

فرض کنیم $f(t)$ و $g(t)$ توابع حقیقی و یک مقداری از متغیر مستقل t باشند.

همچنین فرض کنید دامنه مشترک $f(t)$ و $g(t)$ را I بنامیم.

در این صورت اگر معادله منحنی C را به صورت

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases} \quad t \in I$$

نمایش دهیم، آن را **معادلات پارامتری** منحنی می گوییم.

و مشتق آن به صورت زیر محاسبه می شود.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dx}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

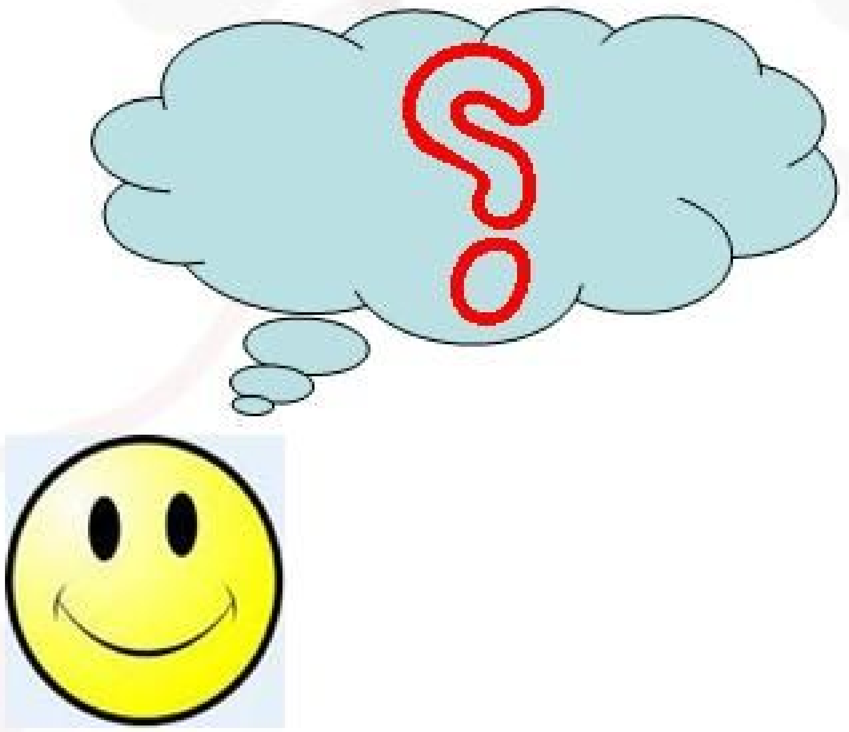
راه حل:

$$\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

$$y' = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{-1}{t^2}}{6t + 2}$$

مثال:

با فرض
$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$$
مشتق
$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}}$$
را به دست آورید.



راه حل:

$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1-3t^2}{1-2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \times \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \times y' = \frac{dy'}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-6t(1-2t)-(-2)(1-3t^2)}{(1-2t)^2}}{1-2t}$$

با ساده کردن:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6t^2-6t+2}{(1-2t)^3}}$$

مشتق گیری

ضمنی

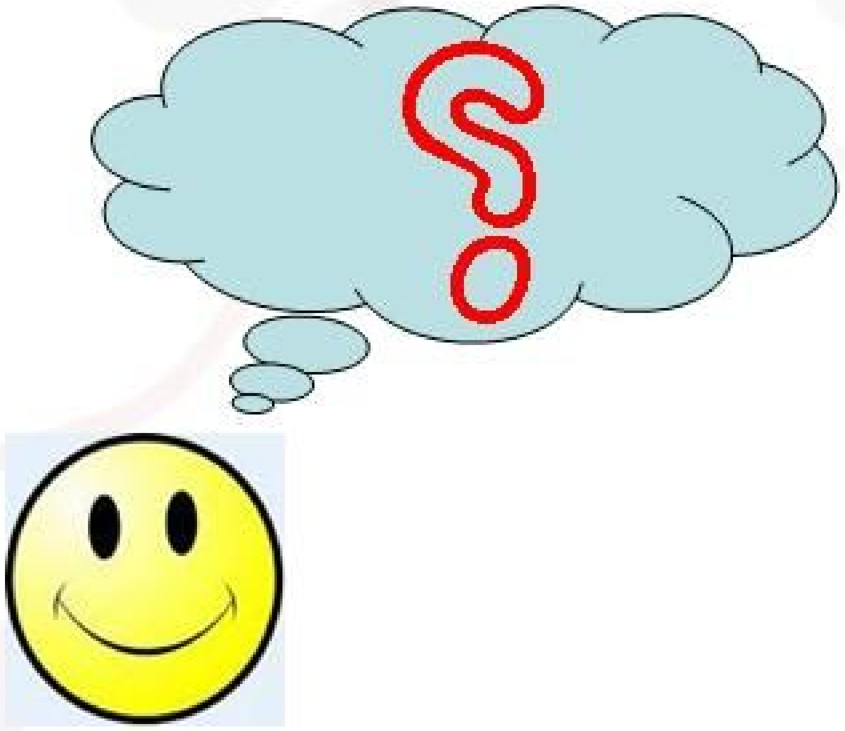
تابعی که در آن نتوانیم y را به طور صریح برحسب x بیان نمود، تابع ضمنی می گوییم و آن را به صورت $f(x, y) = c$ نمایش می دهیم. برای محاسبه مشتق از فرمول زیر استفاده می کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{\text{مشتق جملات نسبت به } x \text{ (} y \text{ را عدد ثابت فرض می کنیم)}}{\text{مشتق جملات نسبت به } y \text{ (} x \text{ را عدد ثابت فرض می کنیم)}}$$

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$x^2y + xy^2 + y^4 - 7x + y = 0$$



راه حل:

$$x^2 y + xy^2 + y^4 - 7x + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + y^2 - 7}{x^2 + 2xy + 4y^3 + 1}$$

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$x^2 + xy + y^2 - 3yx^2 = 10x^4$$

راه حل:

$$x^2 + xy + y^2 - 3yx^2 = 10x^4$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + xy + y^2 - 3yx^2 - 10x^4 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y - 6yx - 40x^3}{x + 2y - 3x^2}$$

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$3x^3y^4+\cos\left(x^2y^3\right)-x=0$$

راه حل:

$$3x^3y^4+\cos\left(x^2y^3\right)-x=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x^2y^4-2xy^3\sin\left(x^2y^3\right)-1}{12x^3y^3-3x^2y^2\sin\left(x^2y^3\right)}$$

مثال:

مشتق عبارت زیر را به دست آورید.

$$y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\cdots}}}}\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

راه حل:

$$y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\cdots}}}}\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

طرفین به توان ۲

$$\Rightarrow\quad y^{2}=\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\cdots}}}=\sin x+y$$

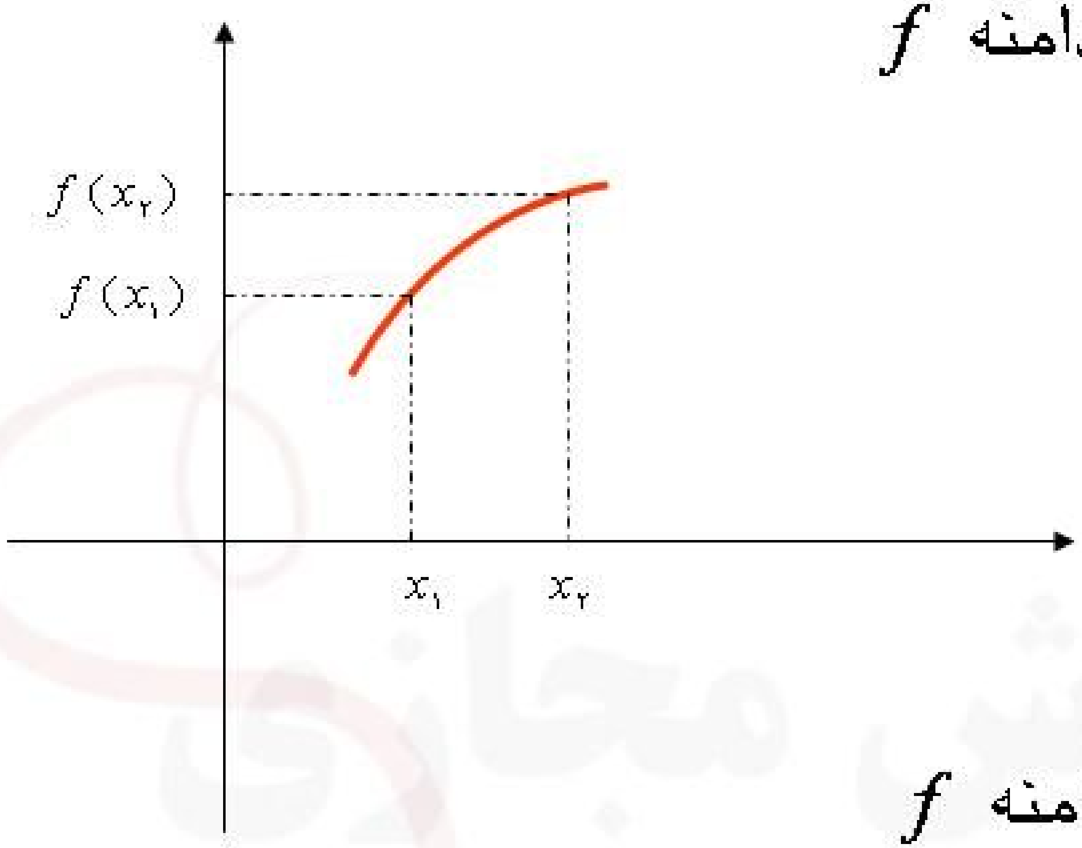
$$\Rightarrow\quad y^{2}-y-\sin x=0$$

مشتق ضمنی

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{-\cos x}{2y-1}=\frac{\cos x}{2y-1}$$

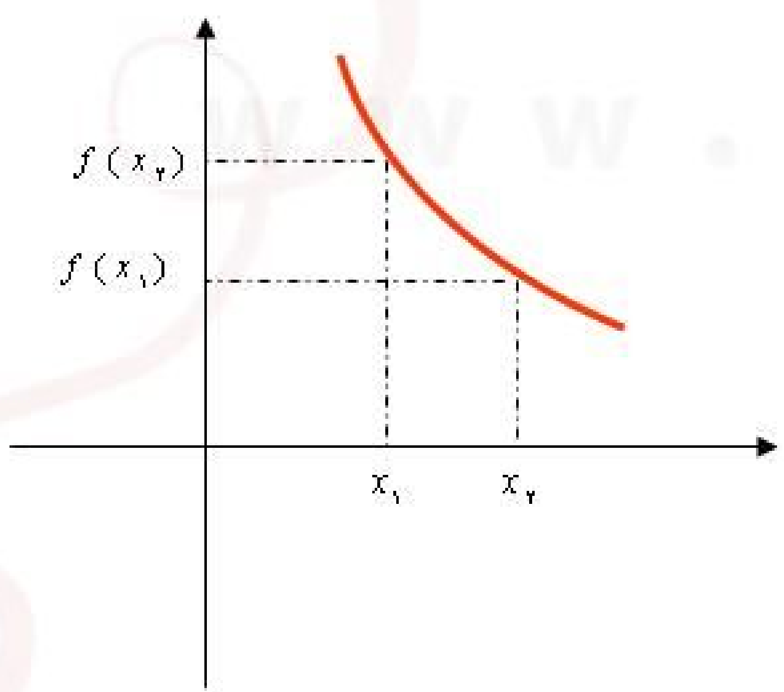
کاربرد مشتق

تابع صعودی: به ازای هر x_1 و x_2 از دامنه f

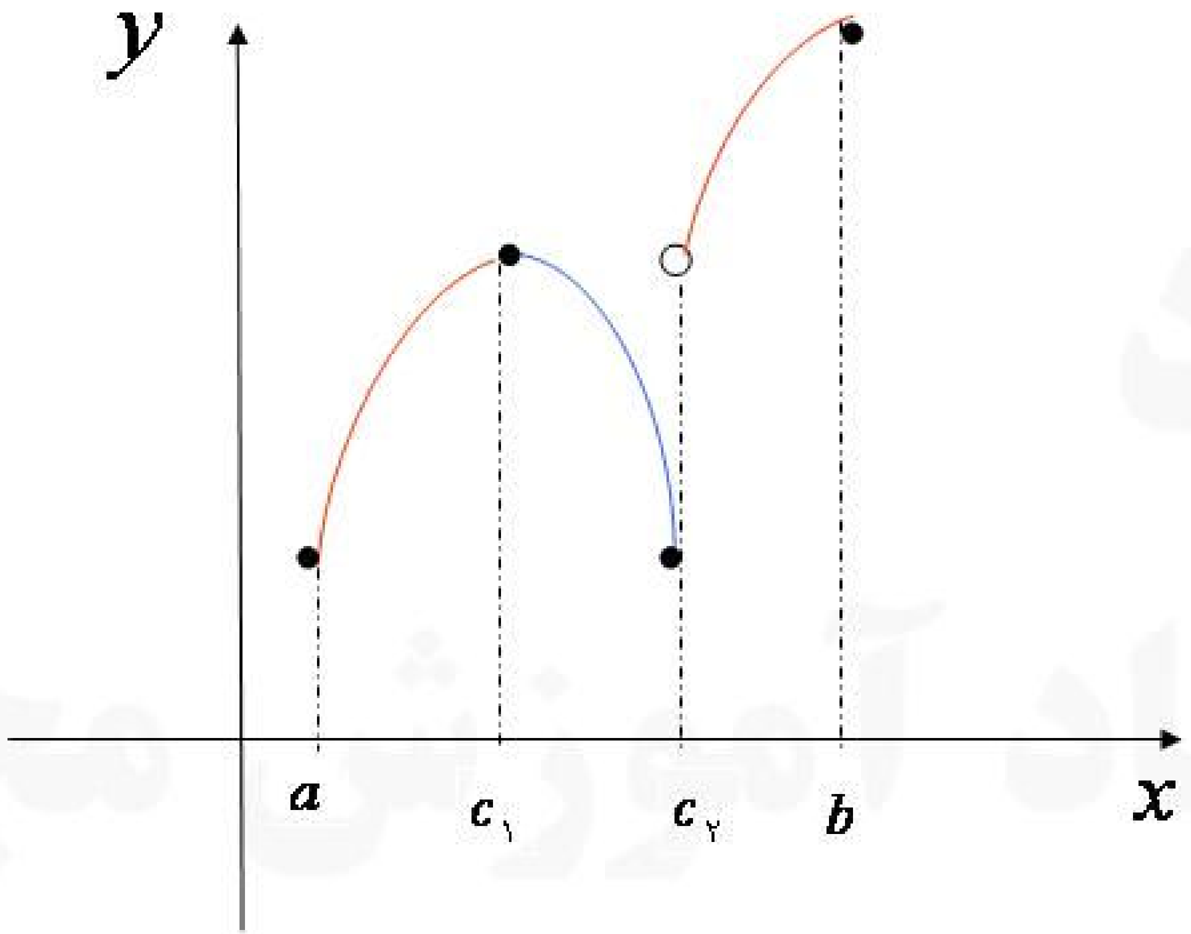


$$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) \le f(x_2)$$

تابع نزولی: به ازای هر x_1 و x_2 از دامنه f



$$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) \ge f(x_2)$$



هدف:

مشخص کردن فواصلی که تابع در آن فاصله صعودی یا نزولی است.

قضیه آزمون یکنوایی:

f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر

f روی $[a,b]$ اکیدا صعودی $\Longrightarrow$ $\forall x \in (a,b) \quad , \quad f'(x) > 0$

f روی $[a,b]$ اکیدا نزولی $\Longrightarrow$ $\forall x \in (a,b) \quad , \quad f'(x) < 0$

توجه:

علامت مشتق در فاصله ای مثبت ← تابع صعودی

علامت مشتق در فاصله ای منفی ← تابع نزولی

روش تعیین فواصل صعودی یا نزولی

مشتق گیری از تابع

⇓

تعیین علامت مشتق ⇐

مشتق مثبت ⇐ تابع صعودی

مشتق منفی ⇐ تابع نزولی

مثال:

ثابت کنید به ازای هر x در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$x \ge \sin x$$

راه حل:

تابع $f(x)=x-\sin x$ را در نظر بگیرید. در بازه $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ داریم

$$f'(x)=1-\cos x\ge 0 \quad\Rightarrow$$ f صعودی

$$x\ge 0 \quad\Rightarrow\quad f(x)\ge f(0) \quad\Rightarrow\quad x-\sin x\ge 0 \quad\Rightarrow\quad x\ge \sin x$$

مثال:

نشان دهید معادله زیر دقیقاً یک ریشه در R دارد.

$$x^5+x^3+x+1=0$$

راه حل:

$$f(x)=x^5+x^3+x+1 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=1>0 \\ f(-1)=-2<0 \end{cases} \Rightarrow f(0)f(-1)=-2<0$$

بنا به مقدار میانی

$$\Rightarrow \exists x \in (-1,0), \quad f(x)=0$$

از طرفی

$$f'(x)=5x^4+3x^2+1>0 \Rightarrow$$ صعودی f $\Rightarrow$ محور x ها را حداکثر در یک نقطه قطع می کند

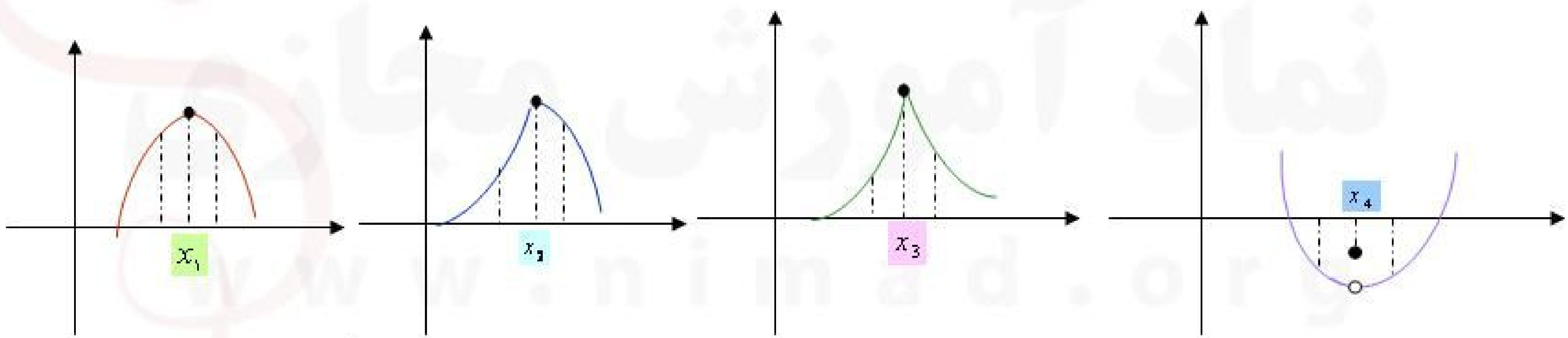
$$\Rightarrow f(x)=0$$ فقط یک ریشه دارد.

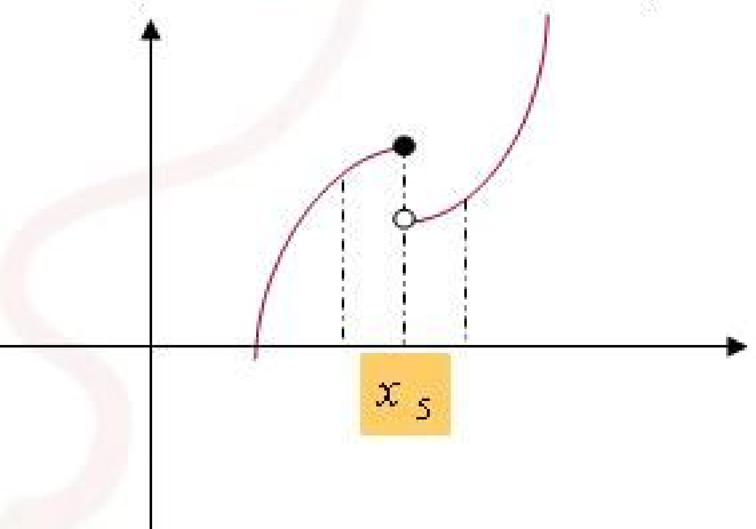
اکسترمم های نسبی

relative extremum

تعریف ماکزیمم نسبی: تابع f در نقطه $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد هرگاه یک همسایگی باز به مرکز نقطه c موجود باشد به طوری که $f(c)$ از تمام مقادیر $f(x)$ (x متعلق به این همسایگی) بزرگتر باشد.

$$\exists\delta \qquad \forall x\in N_{\delta}(c) \qquad f(x)\le f(c)$$



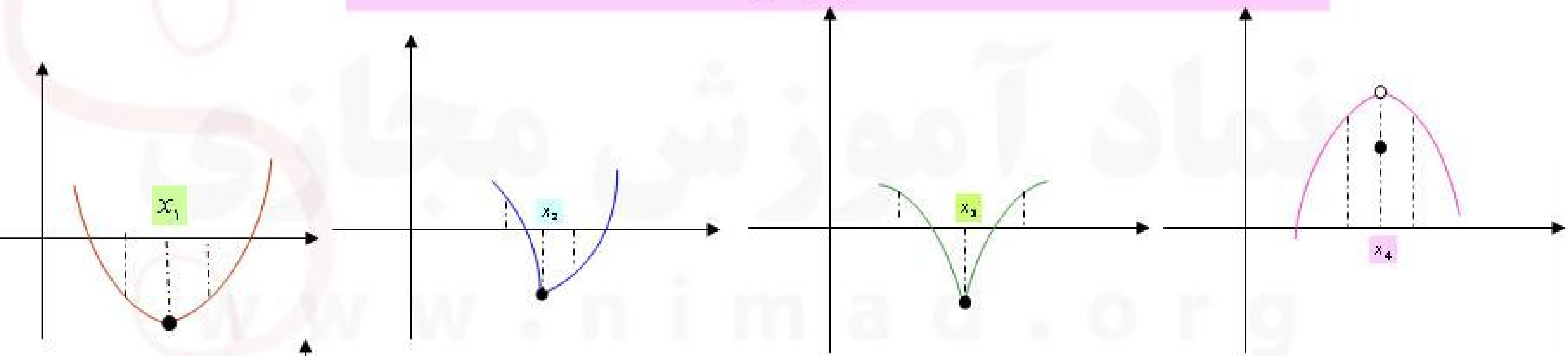


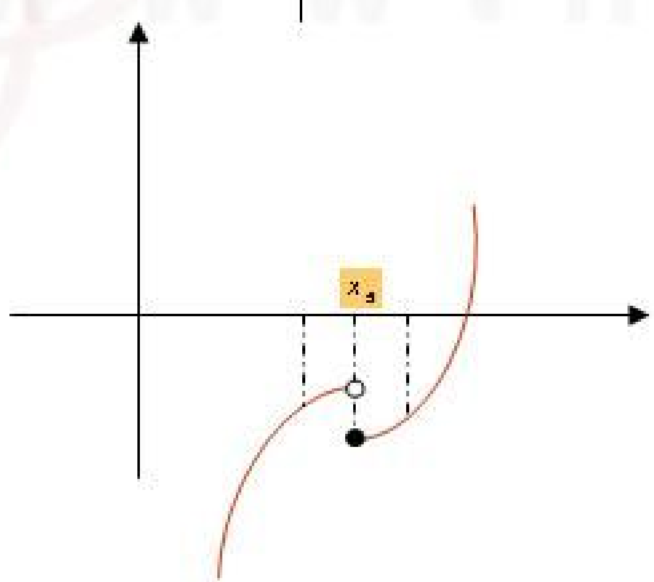
$x_5\,,x_4\,,x_3\,,x_2\,,x_1$: طول های ماکزیمم نسبی

$f'(x_1)=0$ و مشتق سایر نقاط وجود ندارد.

تعریف می نیمم نسبی: تابع f در نقطه $x=c$ می نیمم نسبی دارد هرگاه یک همسایگی باز به مرکز نقطه c موجود باشد به طوری که $f(c)$ از تمام مقادیر $f(x)$ (x متعلق به این همسایگی) کوچکتر باشد.

$$\exists\delta \qquad \forall x\in N_{\delta}(c) \qquad f(x)\ge f(c)$$





$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4\ ,\ x_5$: طول های می نیمم نسبی

$f'(x_1)=0$ و مشتق سایر نقاط وجود ندارد.

تعریف اکسترمم نسبی: اگر تابع f در c دارای ماکزیمم نسبی یا می نیمم نسبی باشد، می گوییم f در c دارای اکسترمم نسبی است و $x = c$ را نقطه اکسترمم نسبی f می نامند و $f(c)$ را مقداراکسترمم نسبی تابع f می نامیم.

تذکر:

۱) اگر تابع f در c دارای اکسترمم نسبی باشد، لزومی ندارد که تابع f در c پیوسته و مشتق پذیر باشد.

۲) اگر تابع f فقط دربازه $[a,b]$ تعریف شده باشد، آن گاه چون f در همسایگی نقاط a و b تعریف نشده است، لذا a و b نمی توانند نقاط اکسترمم نسبی تابع f باشند.

هدف

چگونه می توان نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ را به دست آورد؟

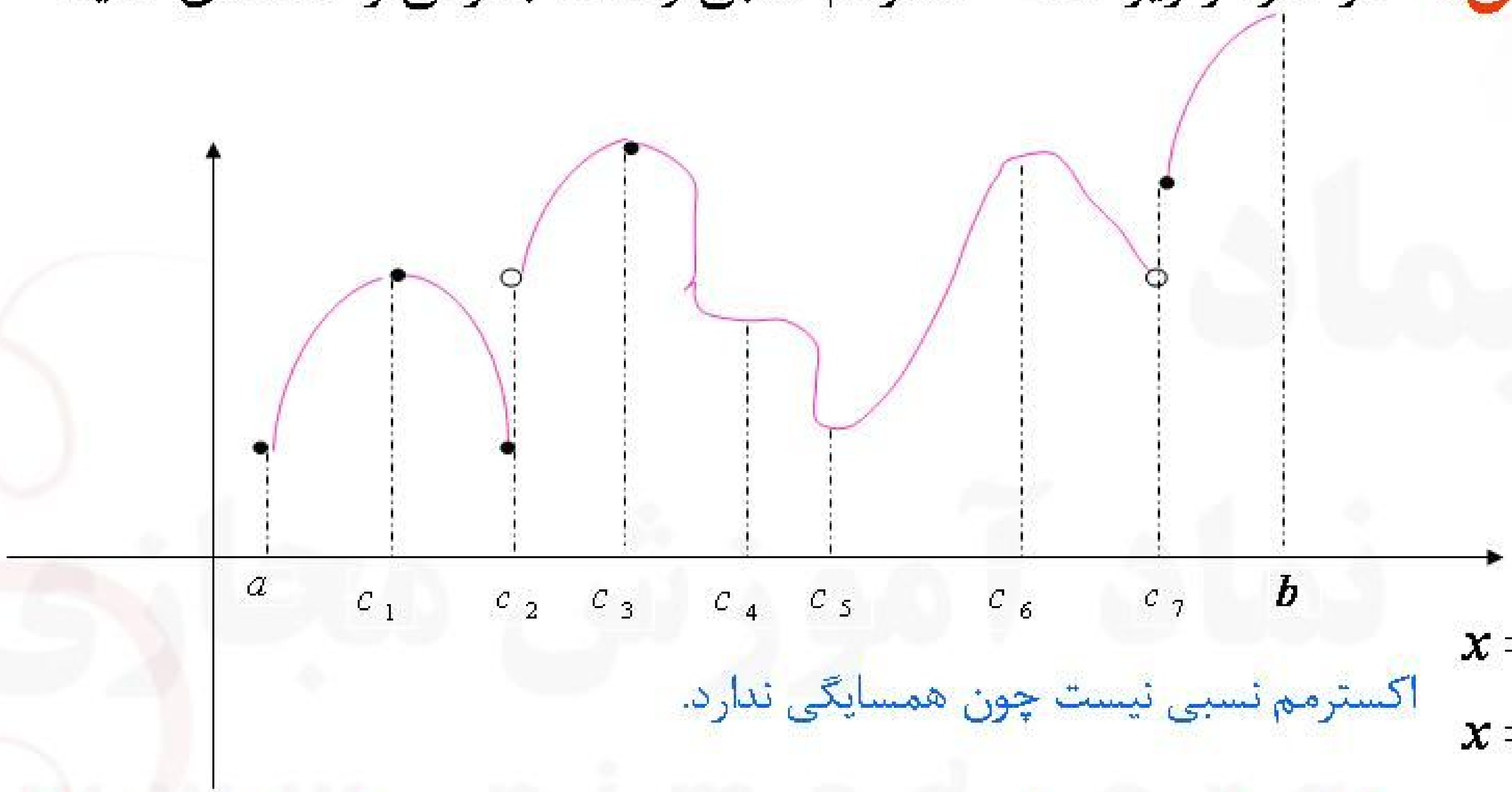
تعریف: نقطه $x=c$ متعلق به دامنه ی تابع f را یک نقطه بحرانی تابع می نامیم، اگر $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

قضیه: اگر $x=c$ یک نقطه اکسترمم نسبی تابع باشد، آنگاه $x=c$ یک نقطه بحرانی است.

سوال:

آیا هر نقطه بحرانی حتماً یک نقطه اکسترمم نسبی است؟

مثال: در نمودار زیر نقاط اکسترمم نسبی و نقاط بحرانی را مشخص کنید



$x=a$

$x=b$

اکسترمم نسبی نیست چون همسایگی ندارد.

$x=c_1$ ماکزیمم نسبی و بحرانی

$x=c_3$ ماکزیمم نسبی و بحرانی

$x=c_7$ بحرانی اما اکسترمم نسبی نیست

$x=c_6$ ماکزیمم نسبی و بحرانی

$x=c_2$ می نیمم نسبی و بحرانی

$x=c_5$ می نیمم نسبی و بحرانی

$x=c_4$ بحرانی اما اکسترمم نسبی نیست

نحوه تعیین نقاط اکسترمم نسبی

روش اول) رسم نمودار

روش دوم) آزمون مشتق اول (تعیین علامت مشتق تابع)

روش سوم) آزمون مشتق دوم

رسم نمودار

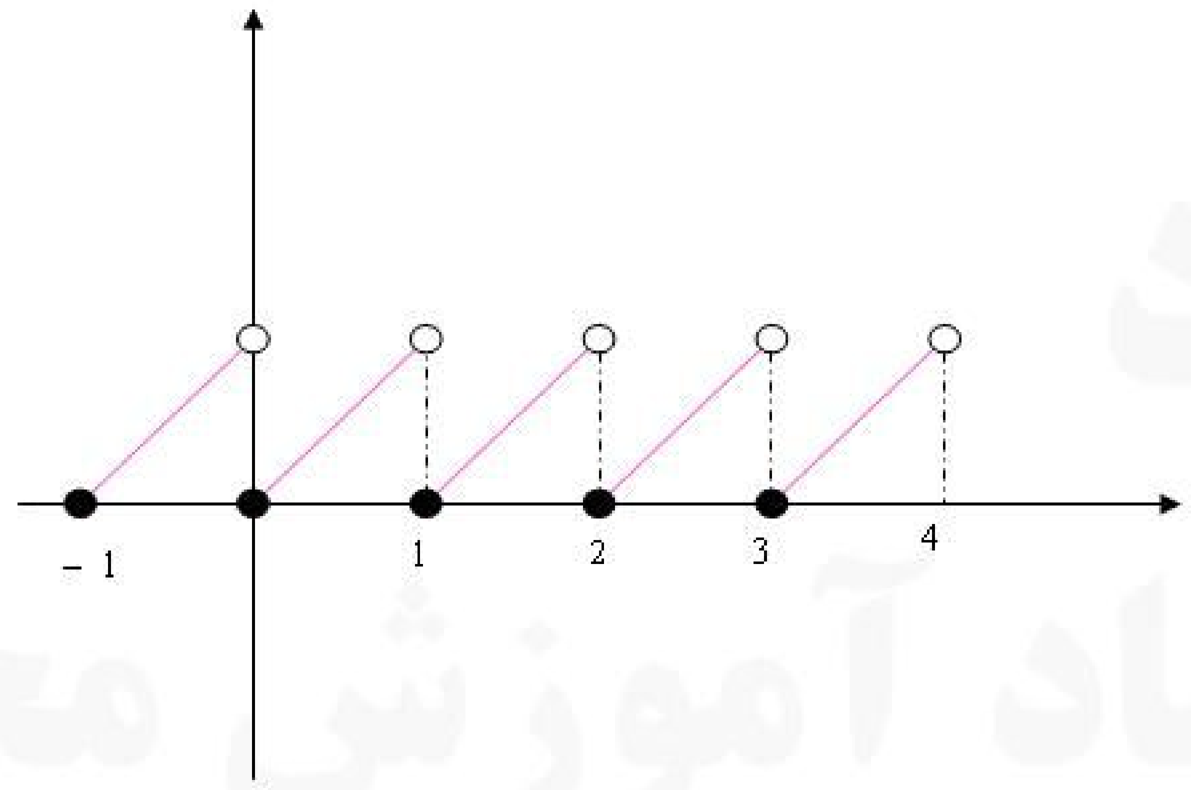
مثال:

نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=x-[x]$$

راه حل:

$D_f = R$



این تابع در همسایگی ۲ تعریف شده است از روی شکل

$\forall x \in (1/8, 2/2) \quad , \quad f(2) \le f(x) \quad \Rightarrow \quad x = 2$ نقطه می نیمم نسبی

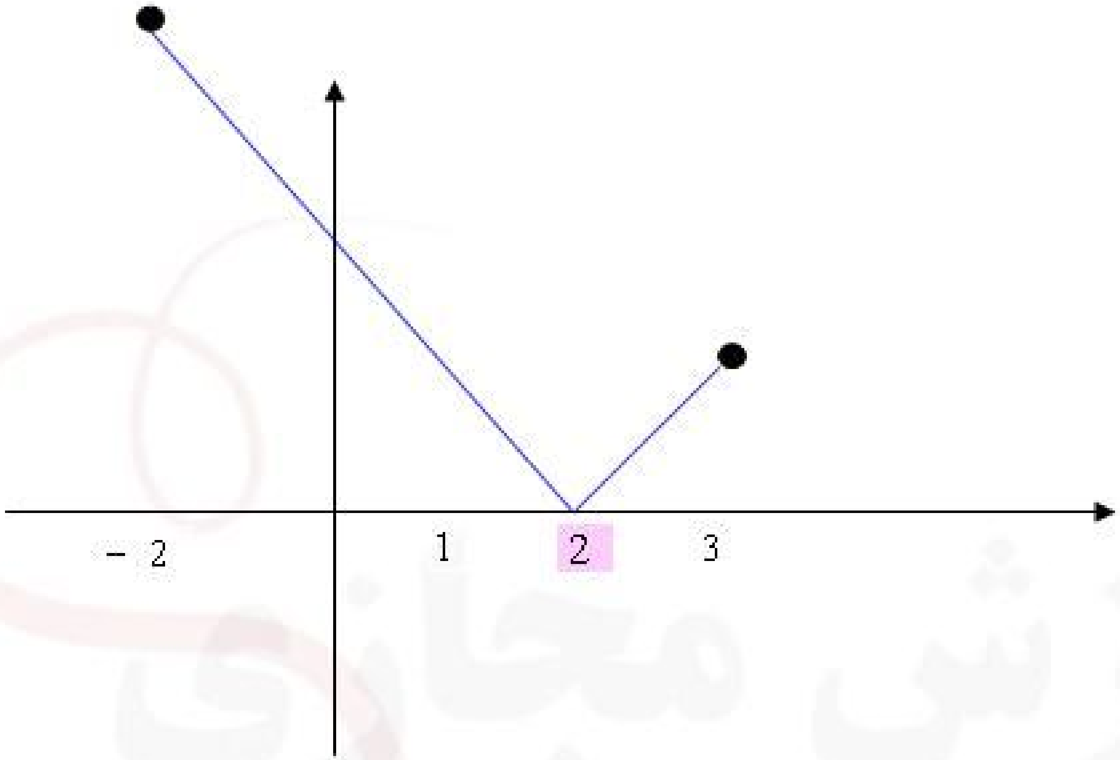
نتیجه: در نقاط $x_0 \in Z$ تابع می نیمم نسبی دارد.

مثال:

نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را در بازه $[-2,3]$ تعیین کنید.

$$f(x)=|x-2|$$

راه حل:



$$\forall x \in (1/8, 2/2) \quad , \quad f(2) \le f(x) \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

نقطه می نیمم نسبی

آزمون مشتق اول

روش دوم) آزمون مشتق اول (تعیین علامت مشتق تابع)

فرض کنید عدد حقیقی c، $a<c<b$ نقطه بحرانی تابع f باشد، روی بازه (a,b) پیوسته و در تمام نقاط به جز c مشتق پذیر

الف) اگر f' از + به − تغییر علامت دهد $\Leftarrow$ c نقطه ماکزیمم نسبی

ب) اگر f' از − به + تغییر علامت دهد $\Leftarrow$ c نقطه می نیمم نسبی

ج) اگر f' تغییر علامت ندهد $\Leftarrow$ c نقطه اکسترمم نسبی نیست

برای تعیین نقاط ماکزیمم نسبی چنانچه تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد

روش زیر پیشنهاد می شود.

گام اول: نقاط بحرانی تابع را به دست می آوریم

گام دوم: مشتق تابع را تعیین علامت می کنیم.

گام سوم: نقاطی که در آن ها مشتق تغییر علامت دهد، نقاط اکسترمم نسبی است.

مثال:

نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1} \qquad D_f=R$$

راه حل:

$$f'(x)=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=1 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
			min نسبی		max نسبی		

می نیمم نسبی : $\left(-1,\frac{-1}{2}\right)$

ماکزیمم نسبی : $\left(1,\frac{1}{2}\right)$

مثال:

نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{x}{x^2-5x+4} \qquad D_f=R-\{1,4\}$$

راه حل:

$$f(x)=\frac{x}{x^2-5x+4} \qquad D_f=R-\{1,4\}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2+4}{\left(x^2-5x+4\right)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 2$$ نقاط بحرانی

$$x=1,4$$

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	‖	$+$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{9}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0
			min				max				
			نسبی				نسبی				

می نیمم نسبی : $\left(-2,\frac{-1}{9}\right)$

ماکزیمم نسبی : $(2,-1)$

مثال:

نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$y = x^3$$

راه حل:

$y = x^3$

$y' = 3x^2 \qquad 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ نقطه بحرانی

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

y' تغییر علامت نمی دهد. اکسترمم نسبی ندارد.

مثال:

نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$y = \left| x^2 - 2x \right|$$

راه حل:

$$y = |x^2 - 2x|$$

$$x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \;,\; x = 2$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x^2 - 2x$		+	0	−	0	+	

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x > 2 \text{ or } x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$0 \le x \le 2 \;:\; f(x) = 2x - x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$x > 2 \text{ or } x < 0 \;:\; f(x) = x^2 - 2x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$ قابل قبول نیست

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		−		+	0	−		+	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$
			min		max		min		

می نیمم نسبی : $(2,0)$, $(0,0)$

ماکزیمم نسبی : $(1,1)$

آزمون مشتق دوم

آزمون مشتق دوم:

فرض کنید x_0 نقطه بحرانی تابع $f(x)$ باشد و $f'(x)$ ، $f''(x)$ در یک همسایگی x_0 موجود باشند و $f'(x_0)=0$

۱) اگر $f''(x_0)<0$ آنگاه تابع $f(x)$ در $x=x_0$ ماکزیمم نسبی دارد.

۲) اگر $f''(x_0)>0$ آنگاه تابع $f(x)$ در $x=x_0$ می نیمم نسبی دارد.

مثال:

نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$$

راه حل:

$$f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2$$

$f'(x)=4x^3+4x^2-8x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,1,-2$ (نقاط بحرانی)

$$f''(x)=12x^2+8x-8$$

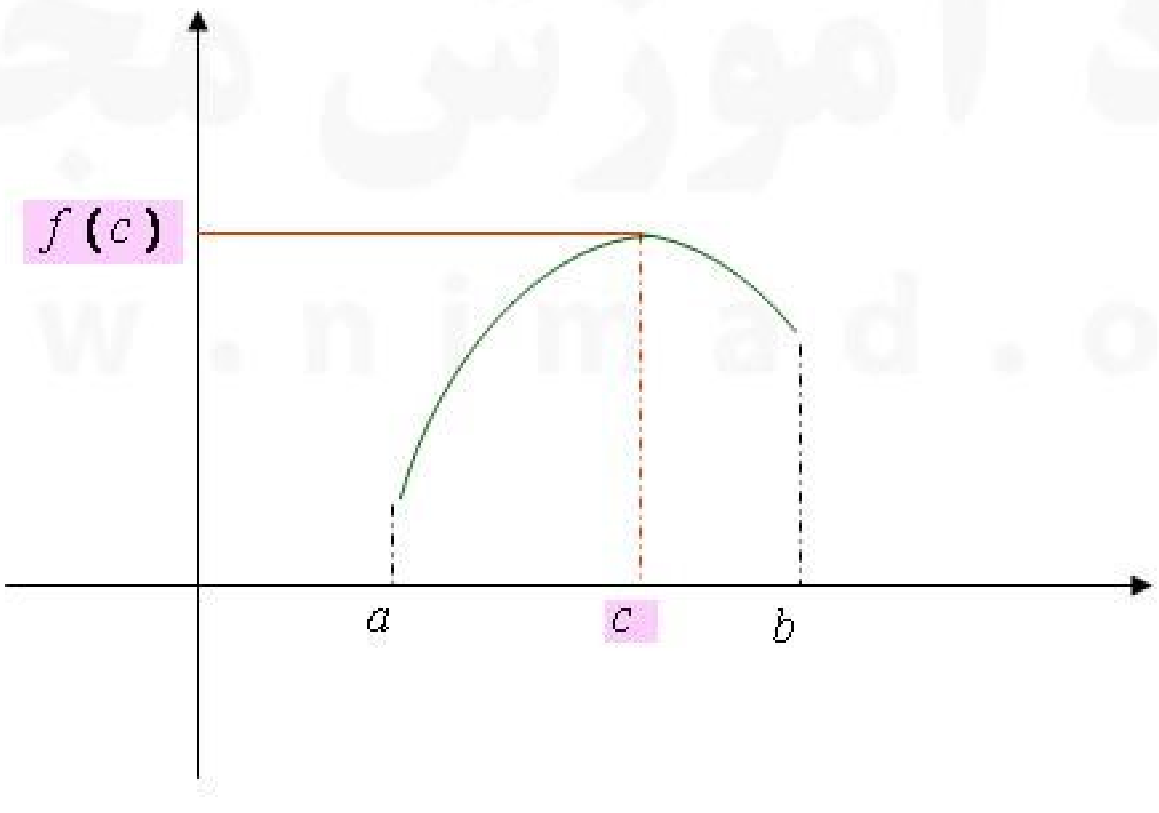
$f''(0)=-8<0 \quad \Rightarrow$ ماکزیمم نسبی $x=0$

$f''(1)=12+8-8=12>0 \quad \Rightarrow$ می نیمم نسبی $x=1$

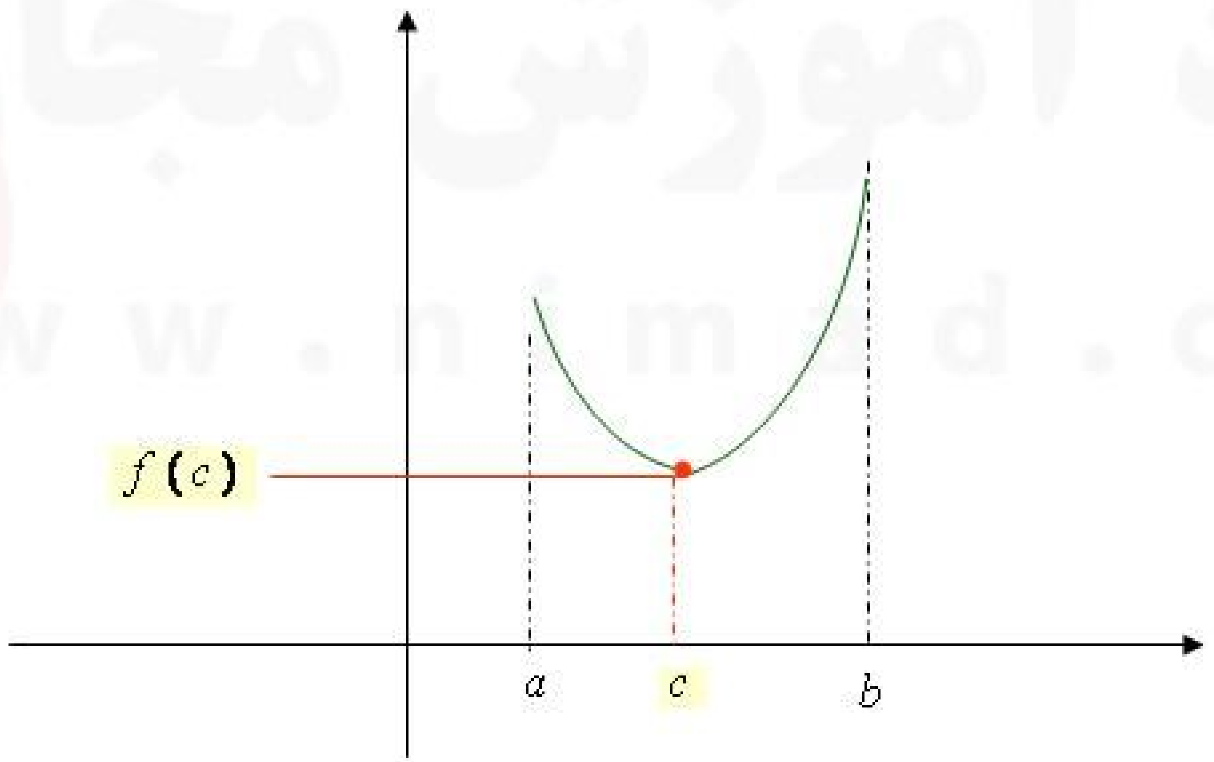
$f''(-2)=48-16-8=24>0 \quad \Rightarrow$ می نیمم نسبی $x=-2$

اکسترمم های مطلق

تعریف: فرض کنید تابع f در بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد. نقطه $x=c$ متعلق به این بازه را یک نقطه ماکزیمم مطلق برای تابع f نامند هرگاه به ازای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $f(c)\geq f(x)$



تعریف: فرض کنید تابع f در بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد. نقطه $x=c$ متعلق به این بازه را یک نقطه می نیمم مطلق برای تابع f نامند هرگاه به ازای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $f(c)\leq f(x)$



توجه: اگر تابع در نقطه $x=c$ دارای ماکزیمم یا می نیمم مطلق باشد، گوییم تابع در $x=c$ دارای اکسترمم مطلق است.

توجه: نقاط ابتدایی و انتهایی بازه می توانند جزء نقاط اکسترمم مطلق باشند.

توجه: اگر $x=c$ یک نقطه اکسترمم مطلق باشد، $f(c)$ را مقدار آن اکسترمم مطلق می نامند.

روش تعیین نقاط اکسترمم مطلق تابع f در بازه $[a,b]$

گام اول: نقاط بحرانی تابع را تعیین می کنیم.

گام دوم: اگر $x = c$ نقطه بحرانی باشد که تابع در آن نقطه پیوسته نباشد، آنگاه $\lim_{x \to c^-} f(x)$ و $\lim_{x \to c^+} f(x)$ را بدست می آوریم.

گام سوم: $f(a)$ و $f(b)$ را محاسبه می کنیم.

گام چهارم: مقادیر تابع را به ازای نقاط بحرانی به دست می آوریم.

گام پنجم: مقادیر به دست آمده در گام دوم، سوم و چهارم را مقایسه می کنیم. اگر یکی از حد های گام دوم ماکزیمم یا می نیمم باشد، تابع فاقد ماکزیمم یا می نیمم مطلق است، در غیر این صورت بزرگترین مقدار به دست آمده ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار به دست آمده می نیمم مطلق است.

مثال:

مقادیر ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع زیر را روی بازه $[-1,2]$ تعیین کنید.

$$f(x)=3x^4-4x^3$$

راه حل:

f روی $[-1,2]$ پیوسته است.

$f'(x)=12x^3-12x^2$

$f'(x)=0 \Rightarrow 12x^3-12x^2=0 \Rightarrow x=0, \quad x=1$

(نقاط بحرانی)

$x=-1 \quad , \quad x=2$ ابتدا و انتهای بازه

$f(0)=0$

$f(-1)=7$

$f(1)=-1 \rightarrow (1,-1)$ می نیمم مطلق

$f(2)=16 \rightarrow (2,16)$ ماکزیمم مطلق

مثال:

نقاط ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=|x|\,(x-2) \qquad [-1,2]$$

راه حل:

$f(x) = |x|(x-2)$ $[-1,2]$

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2) & 0 < x \le 2 \\ -x(x-2) & -1 \le x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & 0 < x < 2 \\ -2x+2 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_{+}(0) = -2 \\ f'_{-}(0) = +2 \end{cases} \Rightarrow$$ وجود ندارد $f'(0)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ نقطه بحرانی

$f(-1) = -3 \to (-1,-3)$ می نیمم مطلق

$f(1) = -1$

$$\left.\begin{matrix} f(2) = 0 \\ f(0) = 0 \end{matrix}\right\} \to (2,0)\ ,\ (0,0)$$ ماکزیمم مطلق

مشتق توابع معکوس

تعریف :

هرگاه تابع $y=f(x)$ بر فاصله $[a,b]$ معکوس پذیر باشد و به ازای هر $x\in[a,b]$، $f'(x)\neq 0$ آنگاه تابع $x=f^{-1}(y)$ بر فاصله $[f(a),f(b)]$ یا $[f(b),f(a)]$ مشتق پذیر است.

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}}$$

مثال:

اگر $f(x)=x^3+2x-1$ در این صورت

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(-1)=?}$$

راه حل:

$$x^3+2x-1=-1 \Rightarrow x^3+2x=0 \quad \Rightarrow \quad x\left(x^2+2\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

اما $f'(x)=3x^2+2$

$$\left(f^{-1}\right)'(-1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{3(0)^2+2}=\frac{1}{2}$$

مثال:

فرض کنید f تابعی وارون پذیر و مشتق پذیر باشد و داشته باشیم

$$f'(x)=1+\left(f(x)\right)^7$$

آنگاه $\left(f^{-1}\right)'(x)$ را بیابید .

راه حل:

اگر $f(a)=b$ ، می دانیم:

$$\left(f^{-1}\right)'(b)=\frac{1}{f'(a)} \quad , \quad f^{-1}(b)=a$$

در حالت کلی

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x))=\frac{1}{f'(x)} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(x))=\frac{1}{1+(f(x))^7}$$

با تبدیل $f(x)$ به x داریم

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{1+x^7}$$

مشتق مراتب

بالاتر

هرگاه $f'(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد یعنی $(f')'$ موجود باشد

آن را مشتق دوم تابع می گوییم و با f'' یا $f^{(2)}$ نشان می دهیم.

به همین ترتیب اگر $\left(f^{(n-1)}\right)'$ موجود باشد به آن مشتق nام تابع

f می گوییم و به یکی از صورت های زیر نمایش می دهیم

$$D_x^n f(x) \quad \text{یا} \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad \text{یا} \quad f^{(n)}(x)$$

مثال:

اگر $f(x)=\cos x$ باشد، مطلوب است محاسبه

$$f^{(3)}(x)=?$$

راه حل:

$$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$$

$$\Rightarrow f''(x)=-\cos x$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(x)=\sin x$$

مثال:

اگر $f(x)=\frac{2}{x-1}$ باشد ، مطلوب است محاسبه

$$f^{(4)}(x)$$

راه حل:

$$f(x)=\frac{2}{(x-1)}=2(x-1)^{-1}$$

$$f'(x)=2(-1)(x-1)^{-2}=-2(x-1)^{-2}$$

$$f''(x)=-2(-2)(x-1)^{-3}=4(x-1)^{-3}$$

$$f^{(3)}(x)=4(-3)(x-1)^{-4}=-12(x-1)^{-4}$$

$$f^{(4)}(x)=(12)(-4)(x-1)^{-5}=48(x-1)^{-5}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f^{(4)}(x)=\frac{48}{(x-1)^{5}}}$$

مثال:

مشتق n ام تابع زیر را به دست آورید.

$$\boxed{f\left(x\right)= e^{ax}}$$

راه حل:

$$f(x)=e^{ax}$$

$$f'(x)=ae^{ax}$$

$$f''(x)=a^2e^{ax}$$

$$f^{(3)}(x)=a^3e^{ax}$$

به همین ترتیب به استقرا $\Rightarrow$ $\boxed{f^{(n)}(x)=a^n e^{ax}}$

یادآوری:

معادله خط با ضریب زاویه m و گذرنده از نقطه (x_0 , y_0) برابر است با

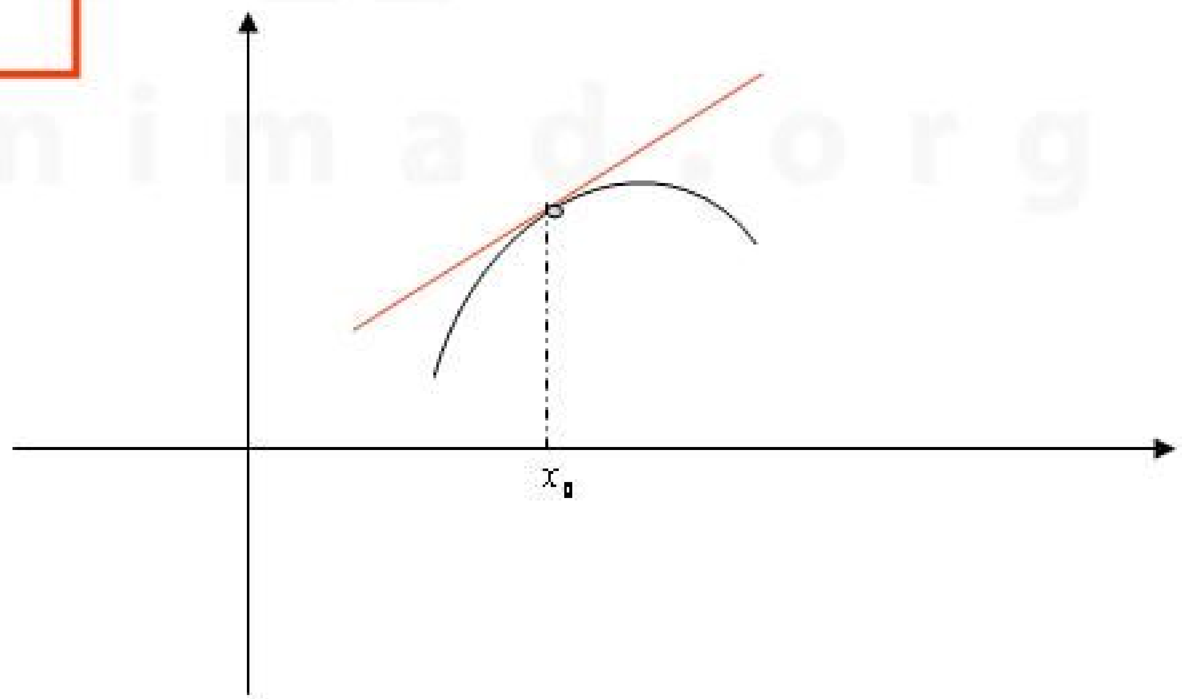
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

قضیه :

تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر

$$m = f'(x_0)$$

m ضریب زاویه خط مماس



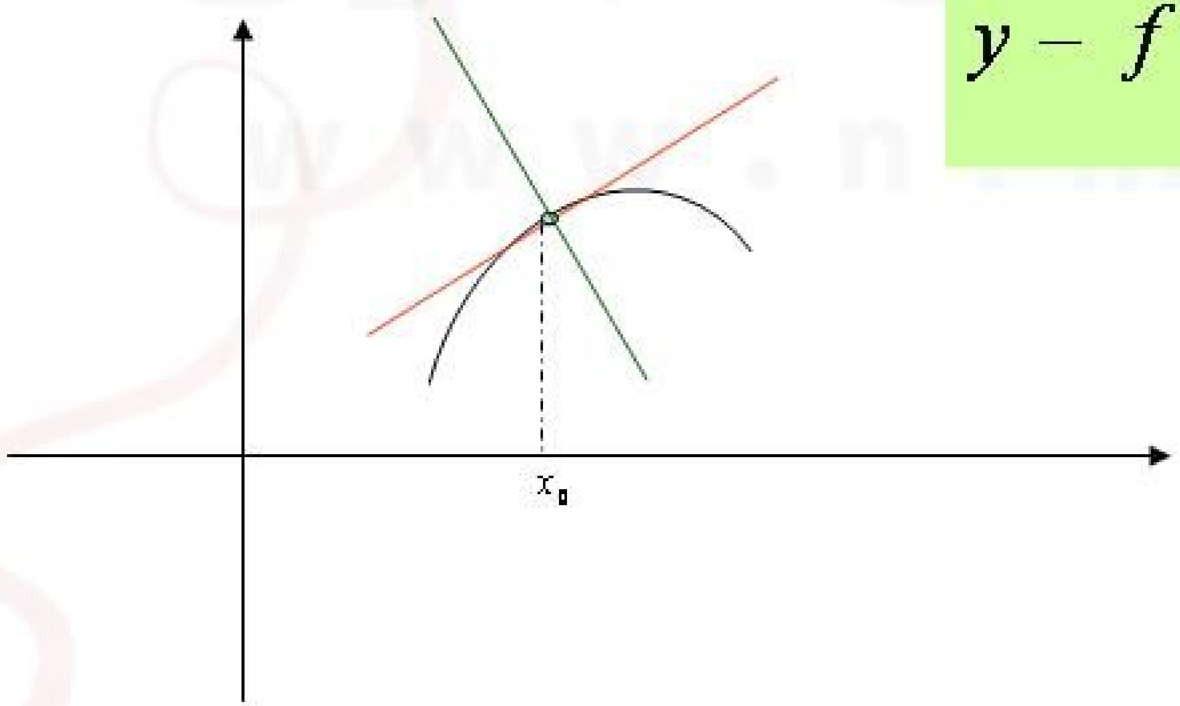
نتیجه : تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = f(x)$ در نقطه $(x_0, f(x_0))$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

معادله خط قائم بر منحنی تابع $y = f(x)$ در نقطه $(x_0, f(x_0))$

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$



مثال:

معادله خط مماس و قائم بر منحنی $2xy^3+3x^2y-4x-1=0$

و گذرنده از نقطه $x=1$ واقع بر منحنی را به دست آورید.

راه حل:

$$x=1 \Rightarrow \quad 2y^3+3y-4-1=0 \Rightarrow$$

$$2y^3+3y-5=0 \Rightarrow y=1$$

مجموع ضرایب 0 و 1 ریشه معادله است.

نقطه مورد نظر (۱،۱)

$$m=f'(1,1) \Rightarrow f'(x)=-\frac{2y^3+6xy-4}{6xy^2+3x^2}$$

$$m=f'(1,1)=-\frac{2+6-4}{6+3}=-\frac{4}{9}$$

خط مماس $y-1=\frac{-4}{9}(x-1)$

خط قائم $y-1=\frac{9}{4}(x-1)$

مثال:

در نقطه $A\left|\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}\right.$ واقع بر منحنی به معادله $y^3 = \sin\left(x-y\right)$ مماس بر آن را رسم کرده ایم. معادله خط مماس را بنویسید .

راه حل:

$$y^3 - \sin(x-y) = 0$$

$$y' = \frac{-\cos(x-y)}{3y^2+\cos(x-y)} \Rightarrow$$

$$m_{\text{مماس}} = y'\Big|_A = \frac{\cos\pi}{3(0)^2+\cos\pi} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y - 0 = 1(x-\pi)$$

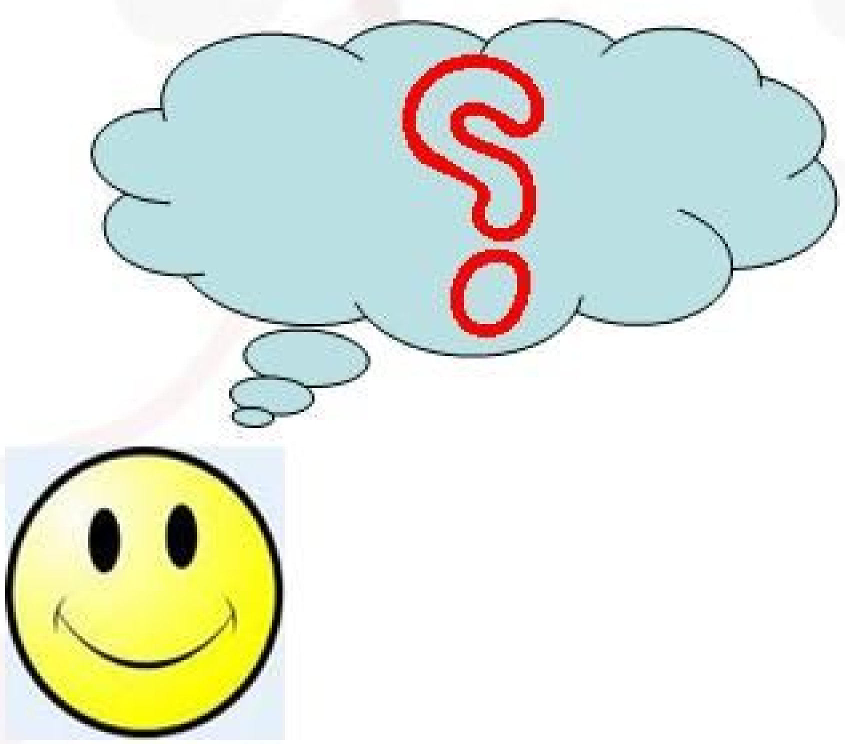
$$\Rightarrow \quad \boxed{y = x-\pi}$$ معادله خط مماس

مثال:

معادله های خط های مماس بر منحنی به معادله

$$4x^2 - y^2 + 16x + 2y + 11 = 0$$

را بنویسید که موازی محور عرضها باشد .



راه حل: اگر خط مماس موازی محور y ها باشد، شیب خط مماس تعریف نشده است یعنی ∞

$$y' = -\frac{8x+16}{-2y+2} = \infty \xrightarrow{\text{مخرج کسر = صفر}} -2y+2=0 \Rightarrow y=1$$

$$y=1 \Rightarrow 4x^2-1+16x+2+11=0 \Rightarrow 4x^2+16x+12=0$$

$$\Rightarrow x^2+4x+3=0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$$

معادله های
خط مماس

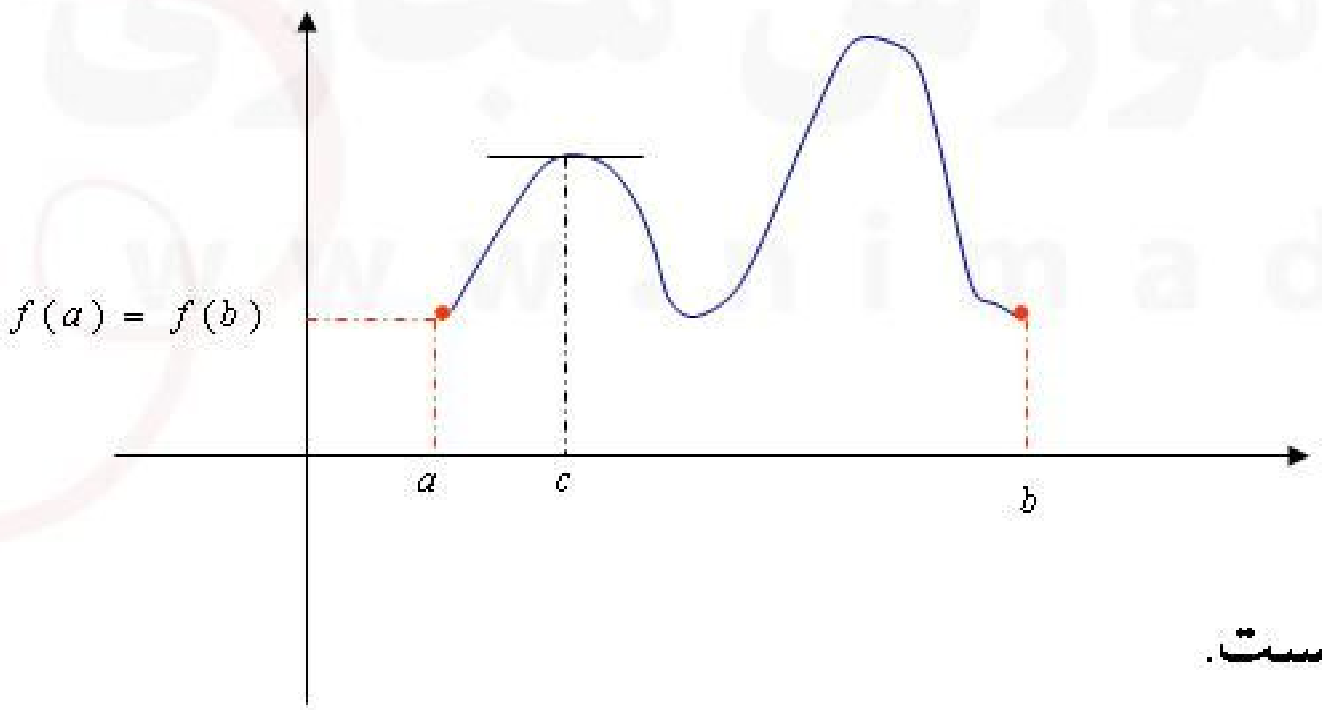
قضیه رُل:

$f:[a,b]$ پیوسته

$f:(a,b)$ مشتق پذیر

$f(a)=f(b)$

$\Longrightarrow \quad \exists c\in(a,b) \quad s.t. \quad f'(c)=0$



توجه: وجود c منحصر بفرد نیست.

مثال:

با استفاده از قضیه رل نشان می دهید معادله زیر در بازه $(0,1)$ دارای جواب است.

$$\tan x = ۱ - x$$

راه حل:

$$f(x)=(x-1)\sin x$$

f روی R پیوسته و مشتق پذیر

$\Downarrow$

f روی [۰،۱] پیوسته و روی (۰،۱) مشتق پذیر

$$f(0)=f(1)=0 \xrightarrow{\text{بنا به قضیه رل}} \exists c\in(0,1),\ f'(c)=0$$

$$f'(x)=\sin x+(x-1)\cos x \quad\Rightarrow\quad f'(c)=\sin c+(c-1)\cos c=0$$

$$\overset{c\in(0,1)}{}\quad \overset{\cos c\neq 0}{\Rightarrow}\quad \frac{\sin c}{\cos c}+(c-1)=0$$

$$\Rightarrow\quad \tan c+(c-1)=0$$

$$\Rightarrow\quad \tan c=c-1$$

لذا c در فاصله (۰،۱) یک جواب معادله $\tan x=۱-x$ می باشد.

مثال:

ثابت کنید بین هر دو ریشه معادله $e^x \cos x = 1$ ریشه ای

از معادله $e^x \sin x - 1 = 0$ قرار دارد.

راه حل:

$$x_1 \neq x_2 \quad , \quad x_1 < x_2 \quad s.t. \quad e^{x_1}\cos x_1 = e^{x_2}\cos x_2 = 1$$

تابع f را روی $[x_1, x_2]$ با ضابطه $f(x) = e^{-x} - \cos x$ در نظر می گیریم.

$$f(x_1) = f(x_2) = 0$$

چون

$$e^{x_1}\cos x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{e^{x_1}} = \cos x_1 \quad \Rightarrow \quad e^{-x_1} - \cos x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = 0$$

$$e^{x_2}\cos x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{e^{x_2}} = \cos x_2 \quad \Rightarrow \quad e^{-x_2} - \cos x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = 0$$

بنا به قضیه رل

$$\exists c \in (x_1, x_2) \quad s.t. \quad f'(c) = 0$$

$$f'(c) = -e^{-c} + \sin c = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin c = \frac{1}{e^{c}} \quad \Rightarrow \quad e^{c}\sin c = 1$$

مثال:

فرض کنید $f:R\to R$ تابعی مشتق پذیر و $f'(x)\neq 1$ ثابت کنید معادله $f(x)=x$ حداکثر یک ریشه دارد.

راه حل:

$x_1 \neq x_2 \;,\quad x_1 < x_2 \qquad f(x_1) = x_1 \;,\; f(x_2) = x_2$

تابع g را روی $[x_1, x_2]$ با ضابطه $g(x) = f(x) - x$ تعریف می کنیم.

g روی $[x_1, x_2]$ پیوسته و روی (x_1, x_2) مشتق پذیر است و

$$g(x_1) = g(x_2) = 0$$

بنا به قضیه رل

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2)\ s.t.\ g'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) - 1 = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 1$$

و این یک تناقض است. بنابراین معادله $f(x) = x$ حداکثر یک ریشه دارد.

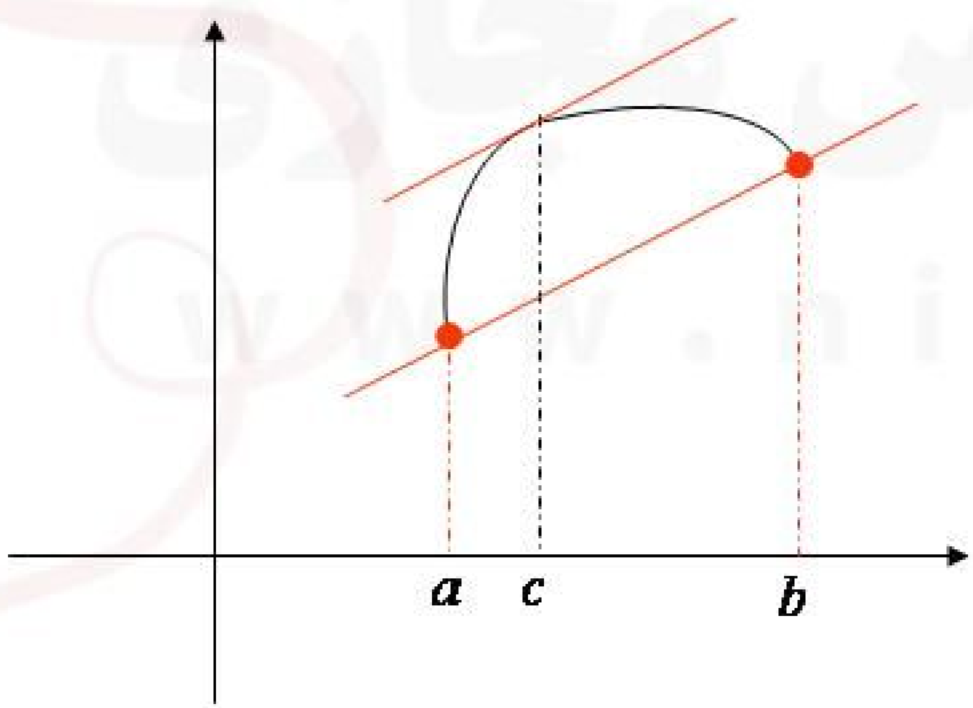
قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ)

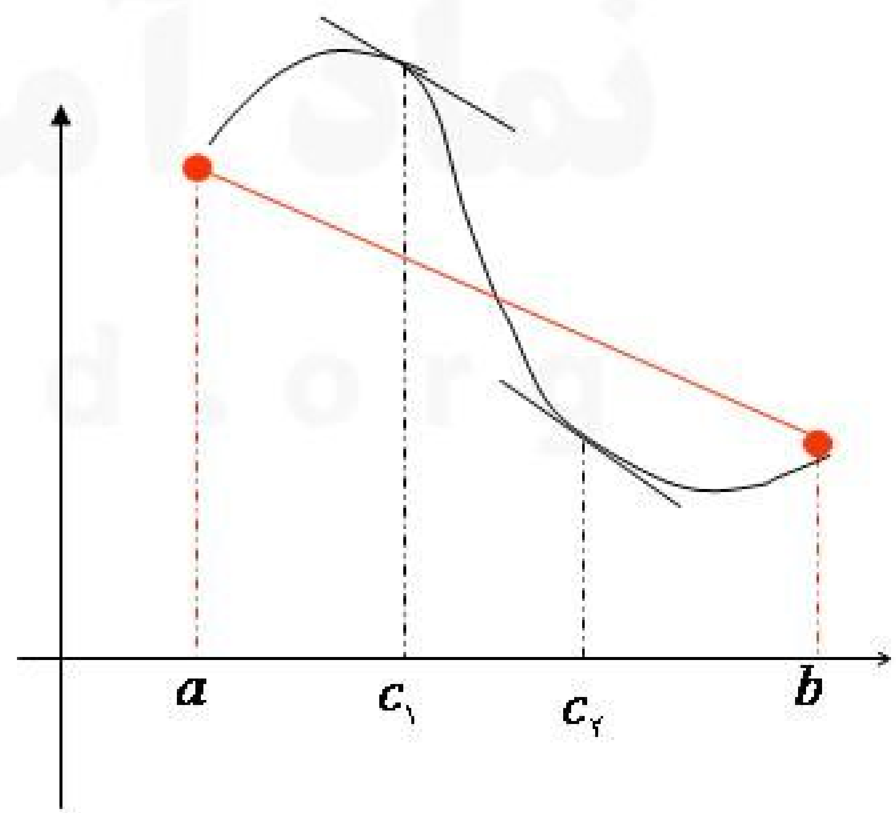
$f:[a,b]$ پیوسته

$f:(a,b)$ مشتق پذیر

$\Longleftrightarrow$

$$\exists c \in (a,b) \quad s.t. \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$





قضیه کشی (تعمیم قضیه مقدار میانگین)

پیوسته $f\,,g:[a,b]$

مشتق پذیر $f\,,g:(a,b)$

$g'(x) \neq 0 \quad , \quad x \in (a,b)$

$\Longrightarrow$

$$\exists c \in (a,b)\ s.t.\ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

مثال:

نامساوی زیر را اثبات کنید.

$$\frac{b-a}{1+b^2} < Arctg\, b - Arctg\, a < \frac{b-a}{1+a^2} \qquad (a<b)$$

راه حل:

$f(x)=Arctgx$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق پذیر است.

شرایط قضیه مقدار میانگین بر قرار و $a<c<b$ $\qquad$ $a<b$

$$f(x)=Arc\tan x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(c)=\frac{1}{1+c^2}$$

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c) \Rightarrow Arc\tan b - Arc\tan a=\frac{b-a}{1+c^2}$$

$$a<c<b \Rightarrow a^2<c^2<b^2 \Rightarrow 1+a^2<1+c^2<1+b^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a^2}>\frac{1}{1+c^2}>\frac{1}{1+b^2}$$

$$\xrightarrow{\times(b-a)>0} \frac{b-a}{1+a^2}>\frac{b-a}{1+c^2}>\frac{b-a}{1+b^2}$$

$$\frac{b-a}{1+a^2}>Arc\tan b-Arc\tan a>\frac{b-a}{1+b^2}$$

مثال:

نامساوی زیر را اثبات کنید.

$$(a-b)\tan b < Ln\frac{\cos b}{\cos a} < (a-b)\tan a \qquad (0 < a < b < \frac{\pi}{2})$$

راه حل:

تابع $f(x)=Ln(\cos x)$ را در نظر می گیریم

که شرایط قضیه مقدار میانگین برای آن بر قرار است وداریم

$$f(x)=Ln(\cos x) \Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x \Rightarrow f'(c)=-\tan c$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

$$\Rightarrow Ln\cos b-Ln\cos a=(b-a)(-\tan c)=(a-b)\tan c \qquad (1)$$

$$0<a<c<b \quad \Rightarrow \quad \tan a<\tan c<\tan b$$

$$a-b<0 \quad \xrightarrow{\times(a-b)\ \Rightarrow} \quad (a-b)\tan a>(a-b)\tan c>(a-b)\tan b$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} \quad (a-b)\tan b<Ln\cos b-Ln\cos a<(a-b)\tan a$$

$$(a-b)\tan b<Ln\frac{\cos b}{\cos a}<(a-b)\tan a$$

مثال:

نامساوی زیر را اثبات کنید.

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cot x \le Ln\sin x \le 0 \qquad \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right)$$

راه حل:

تابع $f(x)=Ln(\sin x)$ را در نظر می گیریم

که شرایط قضیه مقدار میانگین برای آن بر قرار است وداریم

$$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad f'(c)=\cot c$$

$$\exists c\in(\frac{\pi}{2},x)\ \ s.t.\ \ f(x)-f(\frac{\pi}{2})=f'(c)(x-\frac{\pi}{2})$$

$$Ln\sin x-Ln\sin\frac{\pi}{2}=(x-\frac{\pi}{2})\cot c$$

$$\Rightarrow Ln\sin x=(x-\frac{\pi}{2})\cot c$$

$$\frac{\pi}{2}<c<x \quad \Rightarrow \quad \cot x<\cot c<\cot\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (x-\frac{\pi}{2})\cot x\le(x-\frac{\pi}{2})\cot c\le(x-\frac{\pi}{2})(0)$$

$$\Rightarrow \quad (x-\frac{\pi}{2})\cot x\le Ln(\sin x)\le 0$$

قضیه:

$f:[a,b]$ پیوسته

$f:(a,b)$ مشتق پذیر

$\forall x \in (a,b)\ ;\ f'(x)=0$

$\Leftarrow$

f روی $[a,b]$ یک تابع ثابت است.

اثبات قضیه: برای هر $x \in (a,b)$ قضیه مقدار میانگین را برای تابع f در بازه $[a,x]$ می نویسیم.

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a) \qquad a<c<x$$

$$f'(c)=0 \;\Rightarrow\; f(x)=f(a) \quad \forall x\in[a,b] \;\Rightarrow$$ f در بازه $[a,b]$ ثابت است

مثال:

ثابت کنید

$$Arc\tan x + Arc\cot x = \frac{\pi}{2}$$

راه حل:

$f(x) = Arc\tan x + Arc\cot x$ را روی R در نظر بگیرید.

f روی R پیوسته و مشتق پذیر است

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = k \quad \text{ثابت}$$

دلخواه

$$\xrightarrow{x=1} \quad f(1) = Arc\tan 1 + Arc\cot 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = k$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$Arc\tan x + Arc\cot x = \frac{\pi}{2}$$

قاعده هوپیتال: (روشی برای رفع ابهام $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$

بازه باز I و $a \in I$ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید:

(۱) $f, g : I$ (به جز شاید در a)مشتق پذیر

(۲) $g'(x) \neq 0$

(۳) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ (یا $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

به زبان ساده تر:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\frac{0}{0} or \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

توجهات:

۱- به شرایط حاکم بر f و g توجه شود

۲- قاعده هوپیتال برای حدود یک طرفه و حدود در $+\infty$ یا $-\infty$ نیز معتبر است.

۳- قاعده هوپیتال را برای یک مساله می توان چندین بار به کار برد.

مثال:

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{2^{x} - 1}{x}$$

راه حل:

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \frac{0}{0}$$

$$A \overset{HOP}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2^x Ln2}{1} = Ln2$$

مثال:

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$$

راه حل:

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{0}{0}$$

$$A \overset{HOP}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \underset{HOP}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

توجه: هنگام محاسبه هر حدی، بهتر است قبل از کاربرد قاعده هوپیتال روش های دیگر را امتحان کرد.

مثال:

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

رفع ابهام: $0^0, \infty^0, 1^\infty$

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} g(x) Ln f(x)} \qquad f(x) > 0$$

رفع ابهام: 1^{∞}

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} g(x)(f(x)-1)}$$

مثال: حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$A = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$$

راه حل:

$$A = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$A \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\frac{1}{x}+1-1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x}} = e$$

تعریف)

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$$

مثال:

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$A=\lim_{x\to 0^{+}}(1+\sin 4x)^{\cot x}$$

راه حل:

$$A \overset{1^{\infty}}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0^{+}} (\cot x \sin 4x)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^{+}} \frac{\sin 4x}{\tan x}} = e^{4}$$

مثال:

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$A = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$$

راه حل:

$$A \overset{\infty^0}{=} e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \sin x Ln\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} (\sin x \, Ln\frac{1}{x}) \overset{0\times\infty}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{Ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} \overset{Hop}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= 1 \times 0 = 0$$

$$A = e^0 = 1$$

ماکزیمم و می نیمم های شرطی (بهینه سازی)

روش حل مسائل:

گام اول) نوشتن تابع کمیتی که می خواهیم ماکزیمم یا می نیمم شود (معادله اولیه $f(x,y)=c$)

گام دوم) پیدا کردن رابطه بین متغیرهای معادله اولیه ($f(x,y)=c$) با توجه به شرایط بیان شده در مساله (معادله شرطی $g(x,y)=0$)

گام سوم) نوشتن معادله اولیه ($f(x,y)=c$) بر حسب یک متغیر با کمک معادلات شرطی (معادله اصلی $h(x)$)

گام چهارم) اکسترمم های معادله اصلی ($h(x)$) را طبق روش های بیان شده به دست می آوریم.

توجهات:

۱- برای حل این گونه مسائل رسم شکل بسیار ثمربخش می باشد.

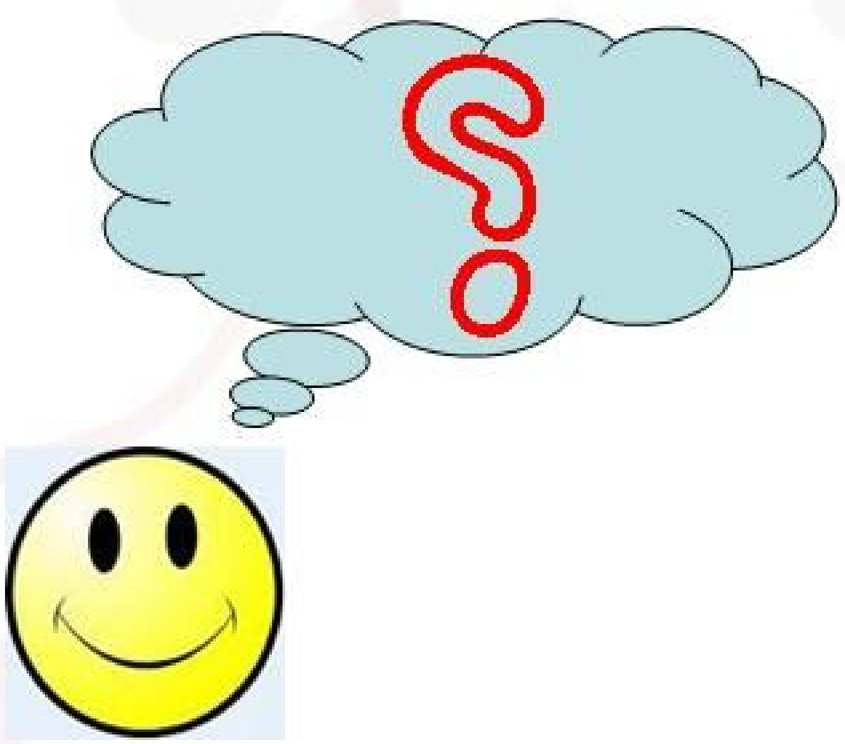
۲- معادله ی اولیه ممکن است بیش از دو متغیر (مثلا n تا) داشته باشد. در این صورت باید $(n-۱)$ معادله شرطی را بیابیم.

۳- جواب های به دست آمده باید منطقی و قابل قبول باشند.

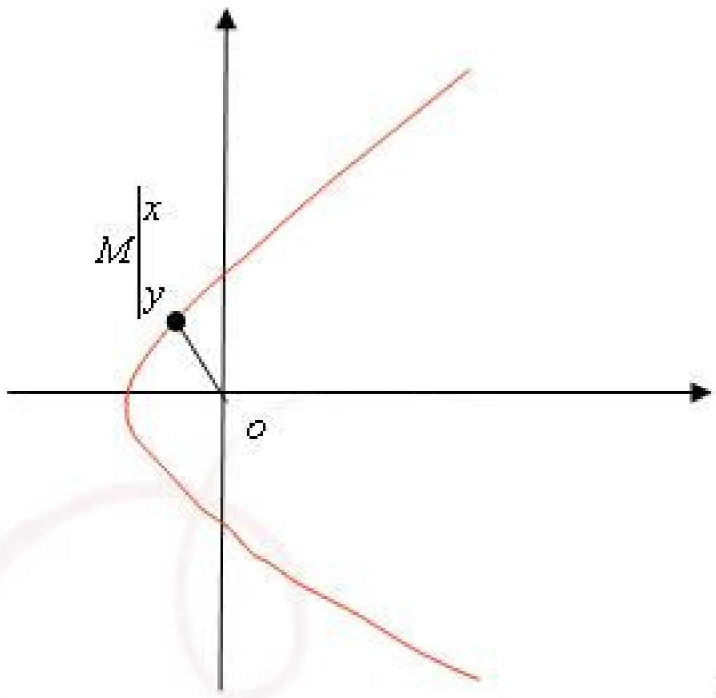
٤- در بعضی مسایل برای راحتی در حل، ممکن است از متغیرهای جدید استفاده کنیم.

مثال:

کمترین فاصله مبدأ مختصات را از نقاط منحنی به معادله $y^2 = 4x + 9$ تعیین کنید.



راه حل:



گام اول) نوشتن معادله اولیه $oM = \sqrt{x^2 + y^2}$

گام دوم) نوشتن معادله شرطی $y^2 = 4x + 9$

گام سوم) به دست آوردن معادله اصلی $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 9}$

گام چهارم) به دست آوردن اکسترمم

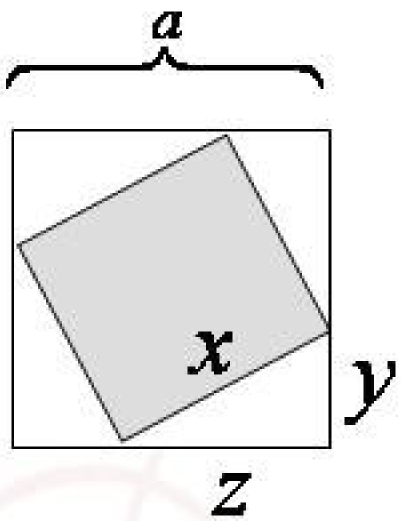
$$h'(x) = \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+9}} = 0 \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow x=-2$$

$$h(-2) = \sqrt{4-8+9} = \sqrt{5}$$

مثال:

مربعی با اضلاعی به طول a در نظر بگیرید. طول ضلع مربعی که محاط در این مربع و دارای کمترین مساحت می باشد، را به دست آورید.

راه حل:



گام اول) نوشتن معادله اولیه

$$s = x^2 = y^2 + z^2$$

گام دوم) نوشتن معادله شرطی

$$y + z = a$$

گام سوم) به دست آوردن معادله اصلی

$$h(y) = y^2 + (a - y)^2 = 2y^2 - 2ay + a^2$$

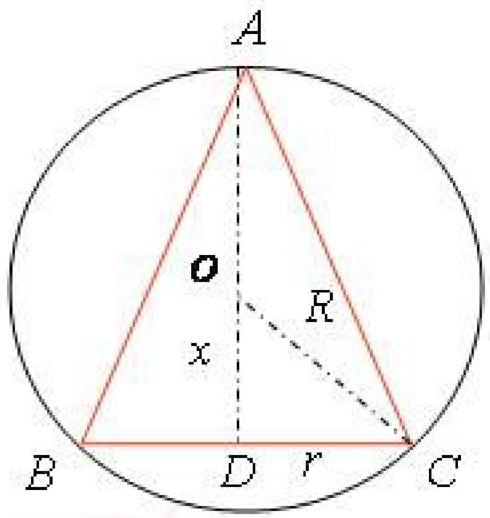
گام چهارم) به دست آوردن اکسترمم

$$h'(y) = 4y - 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \quad z = y = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

مثال:

اگر در داخل کره ای به شعاع معلوم R مخروطی با حجم ماکزیمم محاط کنیم. ارتفاع مخروط را حساب کنید.



راه حل:

گام اول) نوشتن معادله اولیه

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \quad , \quad AD=h \quad , \quad CD=r$$

گام دوم) نوشتن معادله شرطی

$$x^2+r^2=R^2 \quad , \quad R+x=h$$

گام سوم) به دست آوردن معادله اصلی

$$h(x)=\frac{1}{3}\pi(R^2-x^2)(x+R)$$

گام چهارم) به دست آوردن اکسترمم

$$h'(x)=\frac{1}{3}\pi(-2x(x+R)+(R^2-x^2))=0$$

$$\Rightarrow \quad -2x^2-2Rx+R^2-x^2=0$$

$$\Rightarrow \quad -2x(x+R)+(R^2-x^2)=0 \quad \Rightarrow \quad (x+R)[(-2x)+(R-x)]=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+R=0 \;\Rightarrow\; x=-R & \text{غ ق ق} \\ -2x+R-x=0 \;\Rightarrow\; \boxed{x=\dfrac{R}{3} \quad \text{ق ق}} \end{cases}$$

$$h=R+x=R+\frac{R}{3}=\frac{4R}{3}$$

مشتق

derivative