فردریك س. هیلیر
جرالد ج. لیبرمن

تحقیق در عملیات

جلد دوم

برنامه‌ریزی ریاضی

ترجمهٔ محمد مدرس واردوان آصف وزیری

این کتاب ترجمه‌ای است از:

INTRODUCTION TO OPERATIONS RESEARCH
Third Edition

هیلیر، فردریک   **Hillier, Fredrich**

تحقیق در عملیات: برنامه‌ریزی ریاضی / فردریک س. هیلیر، جرالد لیبرمن؛ ترجمه محمد مدرس و اردوان آصف‌وزیری. ـ جوان ۱۳۸۱.

۳۲۰ ص.: جدول، نمودار.

ISBN 964 - 7112 - 02 - 5

فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا.

عنوان اصلی: Introduction to operation research , 3d. ed. 1980

واژه‌نامه.

کتابنامه.

۱. تحقیق عملیاتی. الف. لیبرمن، جرالد Liberman , Gerald j. مترجم. ب. آصف‌وزیری، اردوان ۱۳۲۹ ـ مترجم. ج. عنوان.

۳ت ۹ ه/۶/T ۵۷   ۰۰۳

۱۳۸۱

کتابخانه ملی ایران   م۸۱ـ ۲۶۴۲۱

نشر جوان

مقابل دانشگاه تهران، خیابان شهدای ژاندارمری، پلاک ۴۹

تلفن: ۶۶۴۶۰۳۴۵ - ۰۹۱۲_۱۲۱۳۰۸۳

فردریک س. هیلیر

جرالد ج. لیبرمن

تحقیق در عملیات جلد دوم

برنامه‌ریزی ریاضی

ترجمة: محمد مدرس ـ اردوان آصف وزیری

نوبت چاپ: ششم ـ پاییز ۱۳۹۴

شمارگان: ۳۰۰ نسخه

چاپ: دلارنگ

فهرست

فصل هفتم

تحلیل شبکه‌ها، شامل «سی‌پی‌ام» و «پرت»

تحلیل شبکه‌ها[1] از سالها قبل نقش مهمی در مهندسی برق داشته است. در چند دهه اخیر، به تدریج این شناخت به وجود آمد که برخی از مفاهیم و ابزارهای نظریه شبکه‌ها در زمینه‌های دیگر نیز کاربرد دارند. برای نمونه، مفهوم شبکه‌ها در نظریه اطلاعات[2]، سایبرنتیک[3]، حمل و نقل، برنامه‌ریزی و کنترل پروژه‌های تحقیقات و توسعه[4]، به طرز چشمگیری به کار گرفته شد. ازجمله کاربردهای دیگر آن، بررسی ساختار گروههای اجتماعی، سیستمهای مخابرات، برنامه زمان‌بندی تولید[5]، و ساختار زبان[6] است. در نتیجه، برخی از مفاهیم نظریه شبکه‌ها (که عموماً نظریه جریان در شبکه‌ها[7] خوانده می‌شود) به عنوان ابزاری کارآمد در تحقیق در عملیات توسعه یافت.

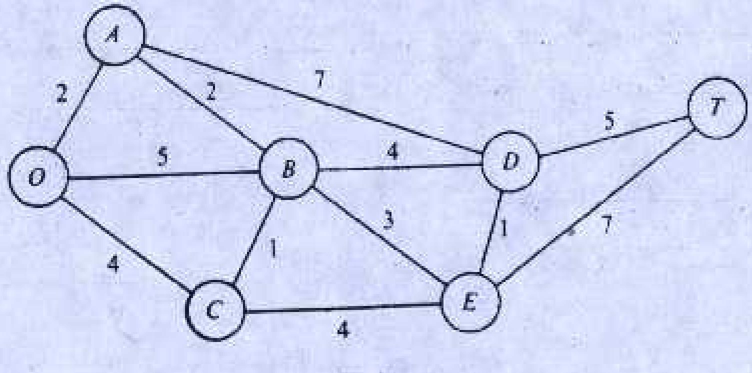
یکی از مسائل اصلی نظریه شبکه‌ها، که بخصوص در بررسی سیستمهای حمل ونقل مطرح می‌شود، بدست آوردن کوتاهترین فاصله[8] در یک شبکه است. مسئله دیگر، انتخاب مجموعه خطوط رابط بین نقاط شبکه است به طوری که ارتباط بین همه

1) Network Analysis
2) Information Theory
3) Cybernetics
4) Research & Developement
5) Production Scheduling
6) Language structure
7) Network Flow Theory
8) Shortest Route

نقاط برقرار گردد و در عین حال مجموع طول این خطوط رابط نیز حداقل باشد. مسئله دیگر به تخصیص جریان در شاخه‌های شبکه مربوط می‌گردد. به نحوی که مجموع جریانی که ازمبداء به مقصد انتقال می‌یابد حداکثر گردد. برنامه‌ریزی و کنترل پروژه‌ها چهارمین مضمونی است که در چارچوب نظریه شبکه‌ها بررسی می‌شود. در این رابطه، به ویژه پرت (فن ارزیابی و مرور برنامه)[1] و سی‌پی‌ام (روش مسیر بحرانی)[2] اهمیت زیادی دارند. در بخش ۱-۷، مثالی نوعی جهت پرداختن به سه مسئله اول ارائه می‌گردد. در بخش ۲-۷، پاره‌ای از واژه‌های اساسی شبکه معرفی می‌شوند. بقیه این فصل نیز به تشریح روش برخورد و حل چهار مسئله فوق اختصاص می‌یابد.

۱-۷ مثال نمونه

شبکه راههای یک گردشگاه بزرگ جنگلی که در آن رفت و آمد تنها با استفاده از وسائل نقلیه عمومی صورت می‌گیرد، درشکل ۱-۷ نشان داده شده است.



شکل ۱-۷ شبکه راههای گردشگاه جنگلی

1) *PERT (Program Evaluation and Review Technique)*

2) *C.P.M (Critical Path Method)*

ورودی گردشگاه بانقطه O و هر ایستگاه توقف وسائل نقلیه عمومی، با یک گره مشخص شده است. اعداد روی خطوط، معرف مسافت راههاست. وسائل حمل و نقل عمومی، مردم را از نقطه ورودی گردشگاه به آخرین نقطه، یعنی T ، می‌رسانند.

در حال حاضر، مدیریت گردشگاه با سه مسئله روبروست. مسئله اول تعیین کوتاهترین مسیری است که وسائط نقلیه می‌توانند مسافرین را از محل ورود به آخرین ایستگاه برسانند. (مثالی از تعیین کوتاهترین مسیر که در بخش ۳-۷ مورد بحث قرار می‌گیرد).

دومین مسئله این است که باید با نصب خطوط تلفن در زیر جاده‌ها، ارتباط تلفنی بین همه ایستگاه‌ها برقرار شود. از آنجا که چنین کاری، هم پرهزینه است و هم به محیط طبیعی آسیب می‌رساند، لذا میزان خطوط تلفن باید تنها به آن اندازه باشد که برای ایجاد ارتباط بین هر دو ایستگاه موجود کفایت کند. در واقع، این سوال مطرح است که خطوط تلفن در کدام مسیر نصب شوند تا هدف مورد نظر با کمترین طول سیم‌کشی حاصل شود. (این مسئله نمونه‌ای از مسئله کوچکترین درخت دربرگیرنده[1] است که در بخش ۴-۷ بررسی می‌شود).

مسئله سوم این است که در خلال فصل گردش، که رفت و آمد به حداکثر می‌رسد، تعداد زیادی از مراجعین می‌خواهند با استفاده از وسائل نقلیه عمومی بین نقطه ورودی و ایستگاه پایانی گردشگاه تردد نمایند. به منظور حفظ محیط زیست و زیبائی منطقه، تعداد دفعات حرکت روزانه وسائل نقلیه در هر یک از راهها نباید از میزان معینی تجاوز کند. این میزان برای راههای مختلف متفاوت است و مقادیر آن در بخش ۵-۷ خواهد آمد. بنابراین، در طول فصل گردش، برای آنکه مسافر بیشتری حمل شود، وسائل نقلیه ازمسیرهای مختلف عبور می‌کنند. مسئله این است که از چه مسیرهائی استفاده شود تا بدون زیرپا گذاشتن محدودیت مربوط به تعداد دفعات حرکت وسائل نقلیه در هر جاده، بتوان بیشترین نفرات را منتقل کرد. (این نمونه‌ای از مسئله

1) *Minimal Spanning Tree*

حداکثر جریان است که در بخش ۶-۷ بررسی می‌شود).

در ادامه این فصل، با نحوه حل مسائل فوق آشنا خواهیم شد.

۲-۷ واژه‌های نظریه شبکه‌ها

مجموعه‌ای از نقاط اتصال (موسوم به گره[1]) و همچنین مجموعه خطوطی که هر دو گره را به هم متصل می‌سازند (موسوم به شاخه[2]) یک گراف[3] خوانده می‌شود. بنابراین، شکل ۱-۷ معرف یک گراف است که در آن، ایستگاهها همان گره‌ها و راههای ارتباطی همان شاخه‌ها هستند. یک شبکه[4]، گرافی است که در شاخه‌های آن نوعی جریان برقرار باشد. سیستمهای زیادی را می‌توان نام برد که تعریف شبکه در مورد آنها صادق است. برخی از این نمونه‌ها در جدول ۱-۷ ارائه گردیده است.

جدول ۱-۷ اجزاء شبکه‌های نوعی

گره‌ها	شاخه‌ها	جریان
تقاطعها	جاده‌ها	وسائل نقلیه
فرود گاهها	خطوط هوائی	هواپیما
مراکز مخابرات	سیمها و کانالها	پیامهای مخابراتی
تلمبه‌خانه‌ها	لوله‌ها	سیالات
ایستگاه‌های کار	مسیرهای حرکت مواد	کارها

1) Node
2) Branch
3) Graph
4) Network

واژه‌های دیگری نیز برای تشریح بیشتر گراف توسعه یافته‌اند. رشته‌ای از شاخه‌ها که دو گره را به هم متصل می‌کنند یک زنجیره[1] نامیده می‌شوند. به عنوان نمونه، در شکل ۱-۷، یکی از زنجیره‌هائی که گره‌های O و T را به هم مرتبط می‌سازد رشته‌ای از شاخه‌های OB ، BD ، DT و یا معکوس آن است. مسیر[2] عبارت از زنجیره‌ای است که جهت حرکت درآن معلوم باشد. چرخه[3]، زنجیره‌ای است که گرهی را به خودش مرتبط می‌سازد. بدین ترتیب، شاخه‌های A به D ، D به B و B به A درشکل ۱-۷، یک چرخه را تشکیل می‌دهند.

هرگاه بتوان هر دو گره دلخواه یک گراف را با زنجیره‌ای به هم متصل ساخت، آنرا گراف متصل[4] می‌گویند. از این رو، گراف شکل ۱-۷، گرافی متصل است. اما درصورتی که شاخه‌های AD ، BD ، BE و CE حذف گردند، دیگر چنین گرافی متصل نخواهد بود. درخت[5]، گراف متصلی است که فاقد چرخه باشد. مثلاً درشکل ۱-۷ اگر فقط شاخه‌های OB ، BD ، DT ، BA ، BC ، DE در نظر گرفته شوند، گراف حاصل به یک درخت تبدیل می‌شود. بر اساس یکی ازقضایای نظریه گراف، گرافی با n گره در صورتی متصل است که دارای $(n-1)$ شاخه و فاقد هرگونه چرخه‌ای باشد (که در این صورت یک درخت است). گرافی با این مشخصات را درخت دربرگیرنده[6] می‌نامند.

یک شاخه گراف در صورتی جهت‌دار[7] خوانده می‌شود که مفهوم جهت را در بطن خود داشته باشد، به طوری که یک گره آنرا بتوان به عنوان مبداء و گره دیگر را به عنوان مقصد منظور نمود. یک گراف جهت‌دار، گرافی است که تمام شاخه‌های آن جهت‌دار باشد. اگر گراف جهت‌دار یک شبکه باشد، جهت شاخه‌ها نشان دهنده

1) Chain
2) Path
3) Cycle
4) Connected graph
5) Tree
6) Spanning Tree
7) Directed or Oriented

جهت موجه[1] جریان در شاخه است. لیکن، هر شبکه‌ای لزوماً یک گراف جهت‌دار نیست، زیرا ممکن است که جریان دو طرفه نیز در شاخه‌ها میسر باشد. ظرفیت جریان[2] یک شاخه در یک جهت معین، عبارت از بیشترین مقدار جریان یا نرخ جریانی[3] است که در آن شاخه و در همان جهت می‌تواند عبور کند. ظرفیت جریان یک شاخه می‌تواند هر عدد غیرمنفی، و ازجمله بینهایت باشد. شاخه‌ای را جهت‌دار می‌گویند که ظرفیت جریان در یک جهت آن برابر با صفر باشد. گاهی یک گره نیز ظرفیتی محدود دارد، ولی از بحث درباره آن صرفنظر می‌کنیم.

در یک شبکه، گرهی چشمه[4] خوانده می‌شود که در تمام شاخه‌های متصل به آن گره، جریان در جهت دور شدن باشد. به طریق مشابه، چنانچه جهت همه شاخه‌های متصل به گرهی به طرف آن گره باشد، آنرا چاه[5] می‌نامند. بنابراین، چشمه‌ها مولد جریان و چاهها جاذب آن هستند.

۳-۷ مسئله کوتاهترین مسیر

شبکه‌ای را در نظر بگیرید که طول شاخه‌های آن غیرمنفی و معلوم باشد. مسئله کوتاهترین مسیر در چنین شبکه‌ای به معنای یافتن کوتاهترین فاصله بین مبداء و مقصد است. هرچند روشها و الگوریتمهای متعددی برای حل این مسئله پیشنهاد شده، اما شاید روشی که در اینجا تشریح می‌شود از همه ساده‌تر باشد. در این روش، از مبداء شروع نموده، سپس به ترتیب، گرههایی که به مبداء نزدیکتر هستند مشخص می‌شوند. پس از رسیدن به گره مقصد، جواب مسئله به دست می‌آید. ابتدا خلاصه این روش ارائه می‌شود، وآنگاه با حل مسئله گردشگاه جنگلی، به تشریح آن می‌پردازیم.

1) *Feasible*
2) *Flow Capacity*
3) *Flow Rate*
4) *Source*
5) *Sink*

الگوریتم کوتاهترین مسیر

هدف ازتکرار شماره n   n امین گره نزدیک به مبداء را تعیین کنید (این عمل، بازاء n=1,2,... تکرار می‌شود تا به گره مقصد برسیم).

اطلاعات ورودی برای تکرار n ام   در n امین تکرار، اطلاعات مربوط به (n-1) گره که به مبداء نزدیکترند (و در تکرارهای قبلی بدست آمده‌اند) مورد نیاز است این اطلاعات مشتمل بر کوتاهترین مسیر و همچنین فاصله هرکدام از این گره‌ها تا مبداء است. (این گره‌ها، و مبداء را گره‌های حل شده و سایر گره‌ها را حل نشدهٔ می‌نامند).

گره‌هائی که می‌توانند به عنوان n امین گره نزدیک به مبداء انتخاب شوند   هر گره حل نشده‌ای که نزدیکترین گره به یکی از گره‌های حل شده باشد می‌تواند به عنوان n امین گره نزدیک به مبداء انتخاب گردد (در صورت مشابه بودن وضعیت دو گره، هر دو آنها منظور می شوند).

محاسبه n امین گره نزدیک به مبداء   فاصله هر گره که بتواند به عنوان n امین گره نزدیک به مبداء انتخاب شودعبارتست از مجموع فاصله آن گره تا نزدیکترین گره حل شده به اضافه کوتاهترین فاصله آن گره حل شده تا مبداء. از بین همه گره‌های قابل انتخاب، گرهی که فاصله آن تا مبداء از همه نزدیکتر باشد انتخاب می‌شود و مسیر آن نیز تعیین می گردد (درصورت مشابه بودن وضعیت دو گره، هر دو آنها منظور می‌شوند).

مثال   مدیریت گردشگاه جنگلی در نظر دارد کوتاهترین مسیری را بدست آورد که نقطه ورودی را به نقطه پایانی آن، شکل ۱-۷، متصل می‌نماید . جدول ۲-۷، نتایج الگوریتم فوق را برای حل این مسئله نشان می‌دهد. (شرایط مشابه در دومین گره نزدیک

سبب می‌شود که مستقیماً از این گره به گره چهارم برسیم).

اکنون می‌توان کوتاهترین مسیر را در جهت عکس و از مقصد به مبداء، با استفاده از آخرین ستون جدول ۲−۷ تعیین کرد، که عبارت است از $O \to A \to B \to E \to D \to T$ و یا $O \to A \to B \to D \to T$.

جدول ۲−۷ کاربرد الگوریتم کوتاهترین مسیر برای حل مثال گردشگاه جنگلی

n	Solved nodes directly connected to unsolved nodes	Closest connected unsolved node	Total distance involved	nth nearest node	Minimum distance	Last connection
1	O	A	2	A	2	OA
2	O A	C B	4 $2+2=4$	C B	4 4	OC AB
4	A B C	D E E	$2+7=9$ $4+3=7$ $4+4=8$	E	7	BE
5	A B E	D D D	$2+7=9$ $4+4=8$ $7+1=8$	D D	8 8	BD ED
6	D E	T T	$8+5=13$ $7+7=14$	T	13	DT

بنابراین دو مسیر، هر کدام با فاصله ۱۳ را می‌توان مشخص کرد

$$T \to D \to E \to B \to A \to O \quad \text{و} \quad T \to D \to B \to A \to O$$

سایر کاربردها

قبل از آنکه مبحث کوتاهترین مسیر را پایان دهیم لازم است که یک نکته مورد تاکید قرار گیرد. تا اینجا، حداقل کردن فاصله مبداء تا مقصد مطرح شد. لیکن، هدف مسائل واقعی شبکه، تعیین مسیری است که دو نقطه مشخص را به هم متصل کند به طوری که مجموع مقادیر مربوط به شاخه‌های آن مسیر نیز حداقل باشد. در عین حال، لزومی ندارد که این مقادیر صرفاً معرف مسافت باشند. مثلاً، هر شاخه می‌تواند نشان دهنده نوعی فعالیت، و مقدار آن معرف هزینه اجرای آن فعالیت باشد. در این صورت، مسئله عبارت از تعیین رشته‌ای از فعالیتهاست که با اجرای آنها، هدف خاصی با حداقل هزینه تحقق می‌یابد (به مسئله ۲ مراجعه شود). نمونه دیگر می‌تواند نشان دادن زمان اجرای یک فعالیت به عنوان مقدار مربوط به هر شاخه باشد. در این حالت، تعیین رشته‌ای از فعالیتها که اجرای آنها به تحقق هدفی منتهی شود و دارای حداقل زمان اجرا باشد مطرح می‌گردد (به مسئله ٤ مراجعه شود). به این ترتیب، بعضی از کاربردهای مهم مسئله کوتاهترین مسیر، هیچ ارتباطی با مفهوم لغوی مسیر ندارد.

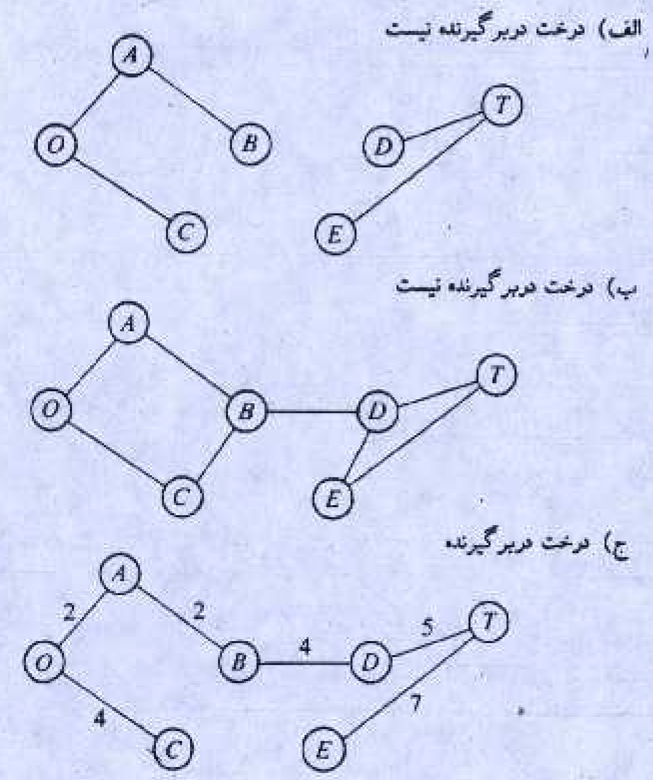
٤−۷ مسئله کوتاهترین درخت دربرگیرنده

اکنون شکل دیگری از مسئله کوتاهترین مسیر، موسوم به مسئله کوتاهترین درخت دربرگیرنده، را بررسی می‌کنیم. فرض می‌شود که مجموعه گره‌ها و مسافتهای[1] بین هر دو گره معلوم است، اما در اینجا مشخص نیست که چه شاخه‌هائی باید بین گره‌ها ایجاد شود. بنابراین، به جای پیدا کردن کوتاهترین مسیر در شبکه‌ای کاملاً مشخص، انتخاب شاخه‌هائی از شبکه مدنظر است، که با وجود آنها بین هر دو گره موجود، مسیری به وجود آید و در عین حال مجموع طول این شاخه‌ها نیز حداقل باشد. برای رسیدن به این منظور، شاخه‌ها باید طوری انتخاب شوند که شبکه حاصل به صورت درختی درآید (با توجه به تعریف درخت در بخش ۲−۷) که تمام گره‌ها را دربرگیرد. خلاصه کنیم، هدف مسئله پیدا کردن درخت دربرگیرنده‌ای است که

۱) مجدداً متذکر می‌شویم که به جای مسافت می‌توان هر عامل دیگری مانند هزینه، زمان و نظایر اینها را قرار داد.

مجموع طول شاخه‌های آن از همه کوتاهتر باشد.

شکل ۲–۷ مفهوم درخت دربرگیرنده مربوط به گردشگاه جنگلی را نشان می‌دهد. براساس تعریف بخش ۱–۷، شکل ۲–۷ الف معرف یک درخت دربرگیرنده نیست،



شکل ۲–۷ تشریح مفهوم درخت دربرگیرنده درمورد مثال گردشگاه جنگلی

زیرا گره‌های O، A، B و C به گره‌های (D، E، T) متصل نیستند برای ایجاد ارتباط بین این دو مجموعه گره‌ها، یک شاخه دیگر مورد نیاز هست. در واقع، این شبکه شامل دو درخت جداگانه است که هرکدام مربوط به یکی از این مجموعه گره‌ها می‌شود. شاخه‌های شبکه در شکل ۲–۷ ب، با هم مرتبط هستند اما یک درخت

تشکیل نمی‌دهند زیرا دو چرخه در آن ایجاد شده است (O-A-B-C-O ، D-T-E-D). تعداد شاخه‌های شبکه نیز بیش از میزان مورد نیاز است. چون گردشگاه دارای ۷ = n گره است، طبق آنچه که در بخش ۲–۷ گفته شد، درخت دربرگیرنده این شبکه باید دارای ۶ = n-1 شاخه باشد و هیچ چرخه‌ای را هم شامل نشود. شبکه شکل ۲–۷ ج که دارای چنین مشخصاتی است یک جواب موجه برای درخت دربرگیرنده (با کل طول شاخه‌ها برابر با ۲۴) است. بعداً خواهیم دید که این جواب بهینه نیست زیرا می‌توان درخت دربرگیرنده‌ای را ایجاد کرد که طول کل شاخه‌های آن فقط برابر با ۱۴ باشد.

این مسئله چند کاربرد مهم عملی دارد. برای نمونه، مسئله کوتاهترین درخت دربرگیرنده را، در طراحی شبکه حمل ونقلی می‌توان به کار گرفت که تردد در آن چندان زیاد نیست، ولی بین هر دو نقطه آن باید ارتباطی وجود داشته باشد (به مسئله ۶ مراجعه شود). در چنین شبکه‌ای، گره‌ها همان پایانه‌ها و شاخه‌ها خطوط ارتباطی (بزرگراه‌ها، خطوط راه‌آهن، خطوط هوائی و نظایر اینها) و مسافتها معرف هزینه‌های ایجاد چنین خطوطی است. به کمک مسئله کوتاهترین درخت دربرگیرنده می‌توان مشخص نمود که کدامیک از خطها باید انتخاب شوند تا ارتباط بین همه پایانه‌ها، با کمترین هزینه، برقرار گردد. نمونه‌های دیگری از این دست نیز در طراحی شبکه‌های عظیم مخابراتی و یا شبکه‌های توزیع وجود دارد.

مسئله کوتاهترین درخت دربرگیرنده را می‌توان با روشی ساده و سرراست حل کرد. برای حل این مسئله ازیکی از گره‌ها شروع می‌کنیم. در اولین قدم، کوتاهترین شاخه‌ای انتخاب می‌شود که این گره را به یکی دیگر از گره‌ها متصل می‌نماید. در هنگام انتخاب چنین شاخه‌ای، نباید از تاثیر این انتخاب بر تصمیمهای بعدی نگران بود، زیرا از هر کجا شروع کنیم، جواب بهینه تغییر نخواهد کرد. در قدم بعدی، یکی از گره‌هائی که هنوز مرتبط نشده و دارای نزدیکترین فاصله به یکی ازگره‌های مرتبط شده است را مشخص کرده، آنرا با افزودن شاخه‌ای به شبکه متصل می‌نمائیم. این عمل را به ترتیبی که در زیر خلاصه شده است، آنقدر تکرار می‌کنیم تا همه گره‌ها مرتبط

گردند. شبکه حاصل، یقیناً همان کوتاهترین درخت دربرگیرنده مورد نظر است.

خلاصه‌الگوریتم‌مسئله کوتاهترین درخت دربرگیرنده

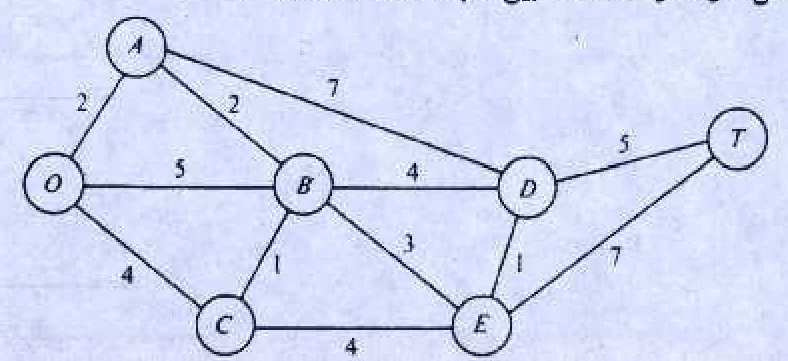
۱ – یک گره رابه طور دلخواه انتخاب و آنرا به نزدیکترین گره مجاورمتصل کنید.

۲ – از بین گره‌های غیرمرتبط، نزدیکترین آنها را به گره‌های مرتبط مشخص کرده و این دو گره را به هم متصل کنید. این عمل آنقدر تکرار می‌شود تا همه گره‌ها به هم مرتبط گردند.

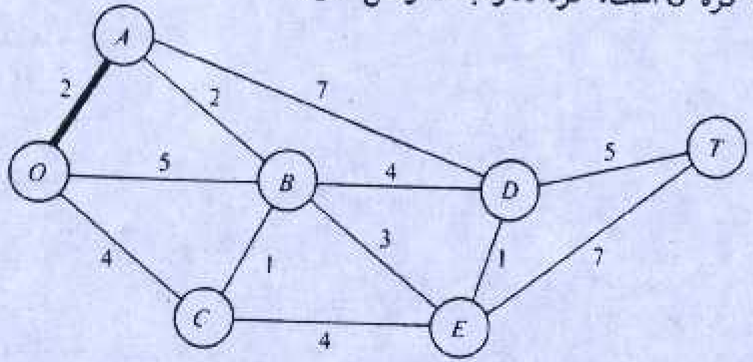
وضعیت مشابه چنانچه در هر یک از قدمهای ۱ و ۲، دو گره دارای وضعیت انتخابی یکسانی باشند، می‌توان به طور دلخواه یکی را برگزید. لیکن، در این موارد ممکن است به جوابهای بهینه چندگانه برسیم. (اگر چه لزوماً چنین نیست). با بررسی همه وضعیتهای مشابه، می‌توان تمام جوابهای بهینه را مشخص نمود.

سریعترین راه اجرای چنین الگوریتمی استفاده از روش ترسیمی است، که در زیر تشریح می‌شود.

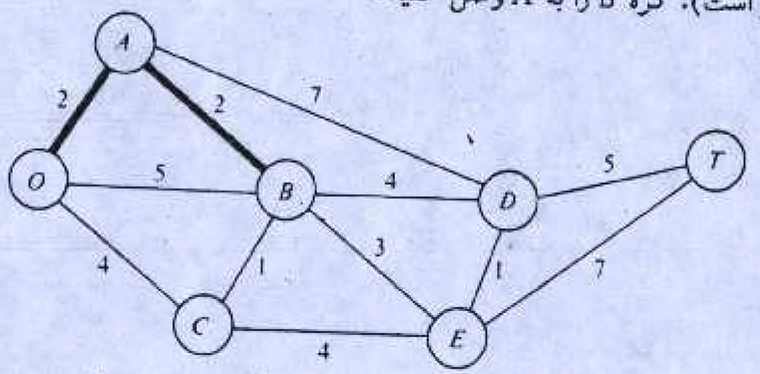
مثال مدیریت گردشگاه جنگلی، که شبکه راه‌های آن در شکل ۱–۷ نشان داده شده است، مایل است مشخص کند که خطوط تلفن را در کدامیک از راهها نصب کند، تا با کمترین طول خط بتوان کلیه ایستگاه‌ها را با یکدیگر ارتباط داد. در شکل زیر محل گره‌ها و فاصله‌های بین آنها نشان داده شده است.



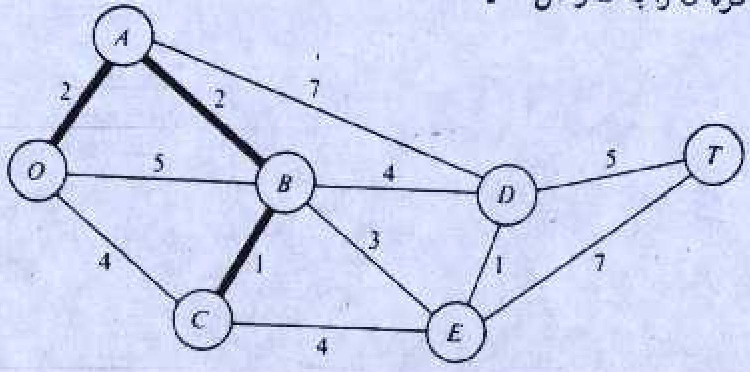
گره O ، بدلخواه، به عنوان نقطه شروع انتخاب می‌شود. گره A ، نزدیکترین گره غیر مرتبط به گره O است. گره A را به O وصل کنید.



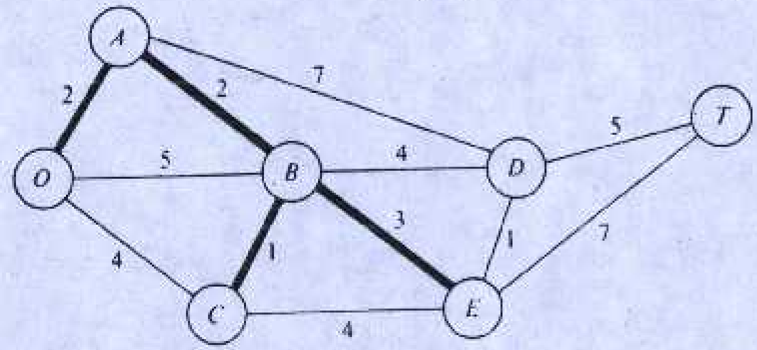
نزدیکترین گره غیر مرتبط به یکی از دو گره مرتبط O یا A گره B است (که به A نزدیکتر است). گره B را به A وصل کنید.



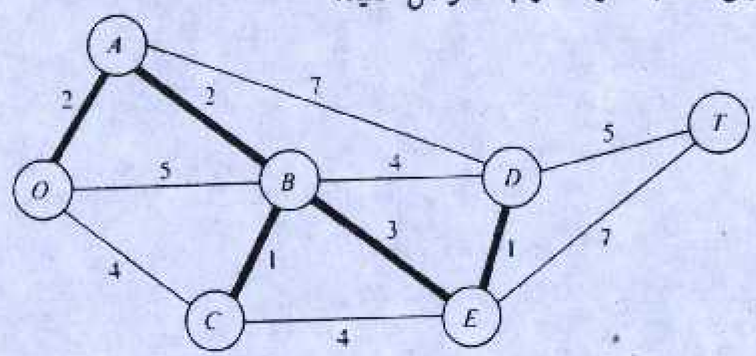
نزدیکترین گره غیرمرتبط به گره‌های O ، A یا B گره C است (که به B نزدیکتر است). گره C را به B وصل کنید.



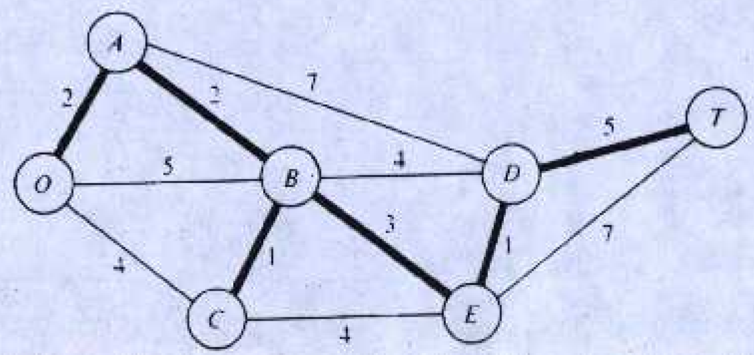
نزدیکترین گره غیرمرتبط به گره‌های O ، A ، B یا C گره E است (که به B نزدیکترین است). گره E را به B وصل کنید.



نزدیکترین گره غیرمرتبط به گره‌های O ، A ، B ، C و E گره D است (که به E نزدیکترین است). گره D را به E وصل کنید.



تنها گره مرتبط نشده، گره T است. نزدیکترین گره به T گره D است. گره T را به D وصل کنید.

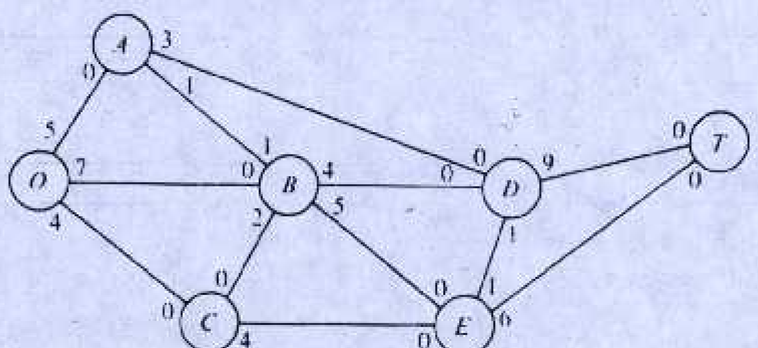


اکنون همه گره‌ها به یکدیگر مرتبط شده‌اند و جواب مسئله همین است. مجموع طول شاخه‌های بدست آمده برابر با ۱۴ است.

شاید تصور شود که جواب نهائی (و مجموع طول شاخه‌های بدست آمده) بستگی به انتخاب اولین گره دارد، اما چنین نیست. برای اطمینان از درستی این ادعا، با شروع از گرهی غیر از گره O این روش را تکرار کنید.

۵-۷ مسئله بیشترین جریان

گفتیم سومین مسئله‌ای که مدیریت گردشگاه با آن روبروست (به بخش ۱-۷ مراجعه شود)، تعیین مسیرهای عبور وسائل نقلیه عمومی است، به طوری که بیشترین تعداد سفرها از مبداء به مقصد میسر گردد، و حداکثر تعداد سفرهای مجاز هر جاده جداً رعایت شود. در شکل ۳-۷، روی هر شاخه و نزدیک به هر ایستگاه عددی نوشته شده است که معرف تعداد سفرهای مجاز این جاده است که می‌تواند از این گره شروع و به گره دیگر ختم شود. به عنوان نمونه، حداکثر یک سفر از A به B و به همین ترتیب یک سفر از B به A مجاز است. با در نظر گرفتن حدود مجاز جاده‌ها، به نظر می‌رسد که یک جواب موجه مسئله، هفت سفر در روز باشد، که پنج سفر آن در مسیر



شکل ۳-۷ حداکثر تعداد مجاز سفرهای روزانه در گردشگاه

$O \to B \to E \to T$ ، یک سفر در مسیر $O \to B \to C \to E \to T$ ، و سفر دیگر در مسیر $O \to B \to C \to E \to D \to T$ است،لیکن چنین جوابی‌امکان استفاده ازمسیرهائی که با $O \to C$ شروع می‌شود را از بین می‌برد (به علت تکمیل شدن ظرفیت $E \to T$ ، و $E \to D$) لذا به سهولت می‌توان جواب موجهی را بدست آورد که از جواب فوق بهتر باشد. برای این منظور انواع ترکیب مسیرها، (و همچنین تعداد سفرهائی که به هر کدام اختصاص می‌یابد) باید بررسی شوند. تا بتوان بیشترین تعداد سفرهای ممکن در روز را مشخص ساخت. چنین مسئله‌ای، بیشترین جریان[1] نامیده می‌شوند.

با بهره گیری از واژه‌هائی که در بخش دوم ارائه شد، مسئله بیشترین جریان را می‌توان به ترتیب زیر تشریح کرد. شبکه مرتبطی را در نظر بگیرید که در آن تنها یک چشمه و یک چاه وجود دارد. فرض کنید که بقای جریان[2] در همه گره‌ها به استثنای گرههای چشمه و چاه، برقرار باشد (یعنی مجموع جریان ورودی گره با مجموع جریان خروجی آن مساوی باشد). **مقدار جریان در شاخه (i,j) ، از گره i به گره j ، را مقداری غیرمنفی در نظر بگیرید که از ظرفیت مجاز این شاخه، c_{ij} ، بیشتر نباشد. هدف مسئله، تعیین الگوی عبور جریان از شبکه است به طوری که بیشترین جریان ممکن، ازمبداء به مقصد بگذرد.**

مسئله بیشترین جریان را می‌توان در قالب یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فرمول کرد (به مسئله ۹ مراجعه شود) و جواب آنرا به کمک روش سیمپلکس به دست آورد. لیکن، رویه حلی وجود دارد که کارآئی آن در مورد این مسئله بیش از روش سیمپلکس است. اجمالاً، در این رویه یک مسیر از مبداء به مقصد انتخاب می‌شود، و حداکثر جریان ممکن به آن اختصاص می‌یابد. این عمل تا آنجا ادامه پیدا می‌کند که دیگر **ظرفیت**مثبت برای هیچ مسیری باقی نماند. (ظرفیت جریان در هر مسیر، برابر است با **کمترین ظرفیت باقی مانده** در هر یک از شاخه‌های آن مسیر، و در واقع حداکثر جریان موجهی که می‌تواند به آن مسیر اختصاص یابد را نشان می‌دهد). از آنجا که این

1) The Maximal Flow problem   2) Conservation of Flow

نوع انتخاب مسیرها و تخصیص جریان به آنها، از ضابطه مشخصی پیروی نمی‌کند، ممکن است مانع رسیدن به جوابهای بهتر گردد، لذا باید اصلاحاتی در آن به عمل آورد، بدین معنی که بتوان در صورت لزوم، تخصیصهای قبلی را ملغی کرد تا برای تخصیصهای بهترجا باز شود. این عمل با فراهم آوردن امکان حرکت در جهت «غلط» شاخه‌ها (یعنی جهت‌هائی که ظرفیت جریانی آنها مساوی صفر است) انجام می‌گردد، و نتیجه این می‌شود که از قسمتی، یا تمام جریانی که قبلاً در جهت «صحیح» ایجاد شده است صرفنظر گردد. برای فراهم آوردن این امکان، هرگاه به شاخه‌ای مقداری جریان اختصاص داده شود (که ظرفیت باقیمانده جریان در آن جهت کاهش می‌یابد)، در همان حال ظرفیت جریان آن شاخه در جهت مخالف به همان مقدار افزایش داده می‌شود. بنابراین، رویه تکراری حل این مسئله شامل سه قدم است که در زیر خلاصه می‌گردد.

الگوریتم مسئله بیشترین جریان

۱ - مسیری را از مبداء به مقصد پیدا کنید که ظرفیت جریان در آن مثبت باشد. **چنانچه چنین مسیری وجود نداشته باشد، جریان خالص فعلی همان الگوی بهینه جریان است.**

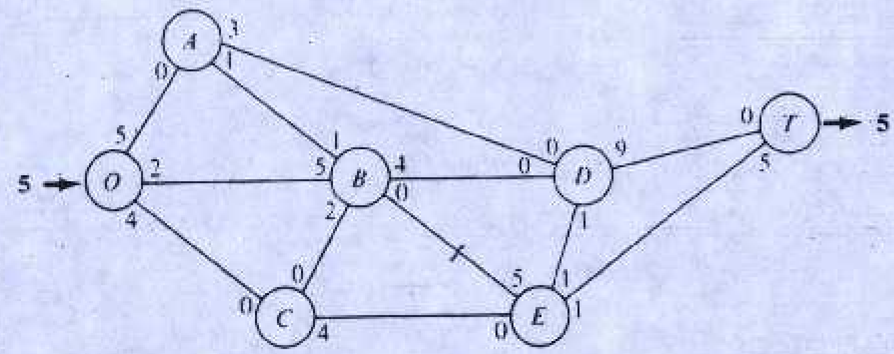
۲ - در طول این مسیر شاخه‌ای را بیابید که دارای حداقل ظرفیت باقیمانده باشد، این ظرفیت را با c^* مشخص کنید. میزان جریان در آن مسیر را باندازه c^* افزایش دهید.

۳ - از ظرفیت باقیمانده شاخه‌های آن‌مسیرباندازه c^* بکاهید و در مقابل، ظرفیت شاخه‌ها را در جهت مخالف به اندازه c^* افزایش دهید. به قدم ۱ بازگردید.

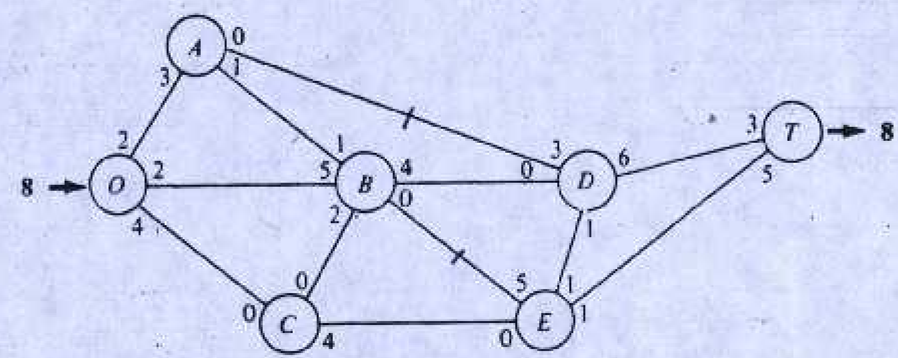
مثال چنانچه الگوریتم فوق را در مورد گردشگاه جنگلی به کار بگیریم، با انتخاب

دلخواه مسیرها نتایجی حاصل می‌شود که در زیر خلاصه شده است. اعداد روی شاخه‌ها معرف ظرفیت باقیمانده جریان در آن شاخه است.

تکرار ۱ به مسیر $O \to B \to E \to T$ جریانی برابر با ۵ اختصاص می‌یابد. شبکه حاصل به صورت زیر است

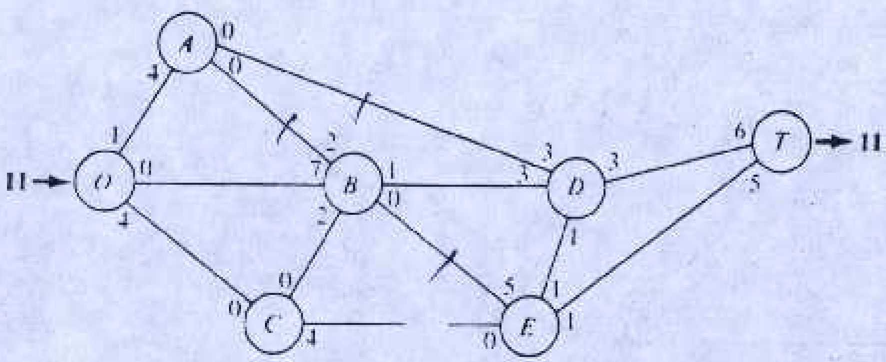


تکرار ۲ به مسیر $O \to A \to D \to T$ جریانی برابر با ۳ اختصاص می‌یابد. شبکه حاصل به صورت زیر است



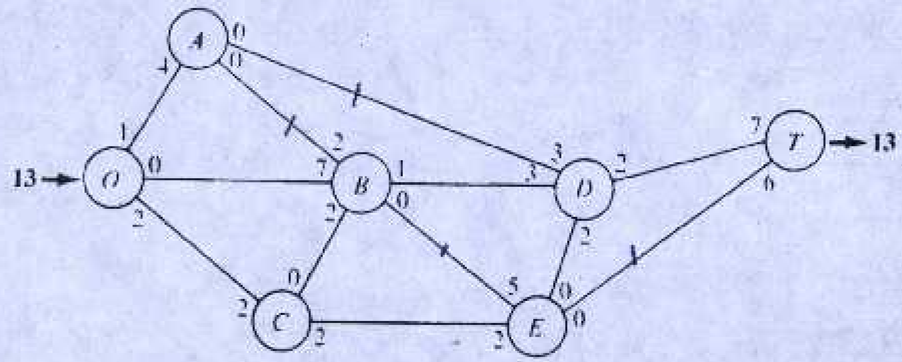
تکرار ۳ به مسیر $O \to A \to B \to D \to T$ جریانی برابر با ۱ اختصاص می‌یابد.

تکرار ٤ به مسیر $O \to B \to D \to T$ جریانی برابر با ۲ اختصاص می‌یابد. شبکه حاصل به صورت زیر است

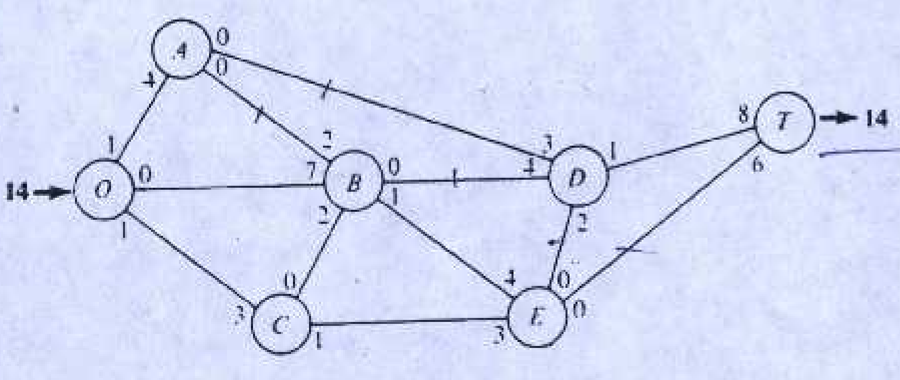


تکرار ۵ به مسیر $O \to C \to E \to D \to T$ جریانی برابر با ۱ اختصاص می‌یابد

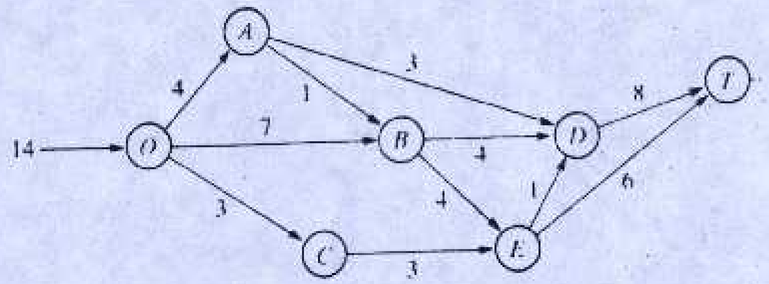
تکرار ٦ به مسیر $O \to C \to E \to T$ جریانی برابر با ۱ اختصاص می‌یابد. شبکه حاصل به صورت زیر است.



تکرار ۷ به مسیر $O \to C \to E \to B \to D \to T$ جریانی برابر با ۱ اختصاص می‌یابد. شبکه حاصل به صورت زیر است.



حال، دیگر هیچ مسیری که ظرفیت جریان باقیمانده در آن مثبت باشد یافت نمی‌شود. الگوی جریان فعلی بهینه است.



شکل ٤–۷ جواب بهینه مسئله بیشترین جریان درمثال گردشگاه

جواب نهائی را می‌توان از دو طریق مشخص ساخت، یا با در نظر گرفتن جمع جریانهای اختصاص یافته، یا مقایسه ظرفیتهای باقیمانده با ظرفیتهای اصلی. چنانچه روش دوم به کار گرفته شود، جهت جریان خالص در یک شاخه جهتی است که ظرفیت باقیمانده آن کمتر از ظرفیت اصلی باشد. مقدار مطلق این جریان مساوی با مقداری است که از ظرفیت اصلی کاسته شده است. اگر این روش در مورد این مثال به کار گرفته شود و شبکه شکل ۳–۷ با شبکه شکل ٤–۷ مقایسه گردد بهینه بودن جریان مشخص خواهد گردید.

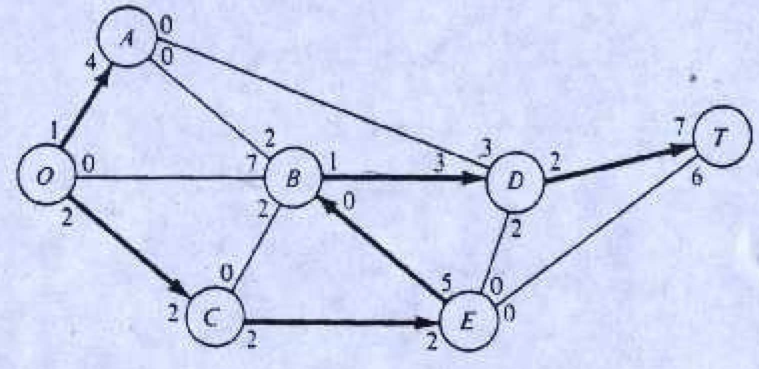
این مثال، به خوبی نقش اصلاح مورد بحث در الگوریتم را تشریح می‌کند. بدون این اصلاح، فقط انجام شش تکرار امکان‌پذیر بود. زیرا، بعد از آن، دیگر نمی‌شد مسیری را یافت که ظرفیت جریان باقیمانده در آن مثبت باشد (چون ظرفیت واقعی $E \to B$ برابر صفر است). از این رو، با توجه به اصطلاح فوق یک واحد افزایش جریان در مسیر $O \to C \to E \to B \to D \to T$ مجاز می‌گردد. در نتیجه، این جریان اضافی باعث می‌شود که یک واحد از جریانی که قبلاً به $O \to B \to E \to T$ اختصاص یافته بود کسر گردد و به جای آن، یک واحد به هر دو مسیر $O \to B \to D \to T$ و $O \to C \to E \to T$ اختصاص یابد.

در شبکه‌های بزرگ، مشکلترین قسمت الگوریتم، پیدا کردن مسیری با ظرفیت مثبت است که‌مبدأ رابه‌مقصدمتصل‌نماید. این مشکل به کمک رویه زیر آسان می‌گردد. ابتدا گره‌هائی را که تنها از طریق یک شاخه با ظرفیت مثبت به مبداء مرتبط هستند رامشخص کنید. آنگاه در مورد هر یک از گره‌هائی که به آنها رسیده‌اید، تمام گره‌های جدید (گره‌هائی که هنوز به آنها نرسیده‌اید) که تنها از طریق یک شاخه با ظرفیت مثبت به آنها مرتبط می‌شود را معین نمائید. این عمل را برای همه گره‌های جدیدی که بدست می‌آیند تکرار کنید. در نتیجه، درختی از کلیه گره‌هائی که می‌توان از مسیری با ظرفیت مثبت به آنها رسید مشخص می‌گردد. بدین ترتیب، همیشه می‌توان با این روش، در ضمن جستجو از مبداء به مقصد، مسیری را یافت که دارای ظرفیت مثبتی باشد، البته مشروط بر اینکه چنین مسیری وجود داشته باشد. این رویه، در شکل ۵–۷، برای شبکه‌ای که از تکرار ٦ بدست آمد به کار گرفته شده است.

هرچند روشی که در شکل ۵–۷ ارائه شد سرراست و ساده است، اما خیلی بهتر بود اگر می‌توانستیم بدون جستجوی بیشتر تشخیص دهیم که مسیرهای دیگری وجود ندارند، و به جواب بهینه رسیده‌ایم. گاهی می‌توان به کمک یک قضیه مهم شبکه‌ها، به نام قضیه بیشترین جریان– کوچکترین برش[1]، چنین کاری را انجام داد.

1) *Max-Flow Min-Cut*

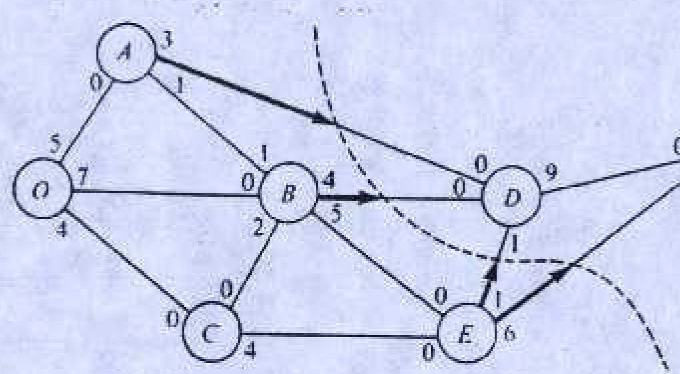
یک برش[1] را می‌توان مجموعه‌ای از شاخه‌های جهت‌دار دانست که حداقل، شامل یک شاخه از هر مسیر باشد. ظرفیت برش معادل مجموع ظرفیتهای شاخه‌های آن (در جهت مشخص) است. براساس قضیه بیشترین جریان- کوچکترین برش، هرشبکه که فقط یک مبداء و یک مقصد داشته باشد، حداکثر جریان موجهی که می‌تواند از مبداء به مقصد برسد برابر با حداقل ظرفیت تمام برشهای شبکه است. بدین ترتیب، چنانچه F معرف مقدار جریان موجه بین مبداء و مقصد باشد، در این صورت ظرفیت هر کدام از برشهای شبکه یک حدفوقانی برای F محسوب می‌شود و حداقل این ظرفیتها برابر با حداکثر مقدار F است. بنابراین، اگر در شبکه اصلی، برشی پیدا شود که ظرفیت آن برابر با F ، یعنی میزان جریان تکرار فعلی باشد، می‌توان نتیجه گرفت که این جواب بهینه است. به همین ترتیب، چنانچه بتوان در شبکه‌ای، پس از یک تکرار برشی را یافت که ظرفیت شاخه‌های باقیمانده آن برابر صفر باشد، باز هم می‌توان نتیجه گرفت که جواب بهینه بدست آمده است. برای روشن شدن این مطلب، برش شکل ۶-۷ را برای شبکه شکل ۳-۷ بررسی کنید.



شکل ۵-۷ روش پیداکردن مسیری با ظرفیت مثبت از مبدا[*] به مقصد برای تکرار ۷ در مثال گردشگاه جنگلی

1) Cut

باید توجه داشت که ظرفیت برش شکل ۶-۷ برابر با ۱۴ = (۶+۱+۴+۳) و مساوی حداکثر مقدار F است. پس این برش دارای حداقل ظرفیت است. همچنین توجه کنید که ظرفیتهای باقیمانده این برش، بعد از تکرار ۷ (که مقدار جریان در آن ۴ است) برحسب ظرفیتهای باقیمانده مساوی صفر است. اگر همان موقع به این موضوع توجه شده بود، دیگر به جستجوی بیشتر برای یافتن مسیر دیگری با ظرفیت مثبت لزومی نبود.



شکل ۶-۷ برش حداقل ،درمثال گردشگاه جنگلی

۶-۷ برنامه‌ریزی و کنترل پروژه‌با استفاده‌از«پرت» و«سی‌پی‌ام»

مدیریت صحیح پروژه‌های بزرگ مستلزم برنامه‌ریزی، زمان‌بندی و هماهنگی دقیق فعالیتهای متعددی است که با یکدیگر ارتباط دارند. در اواخر سالهای ۱۹۵۰، به منظور کمک به انجام این وظایف، رویه‌هائی براساس شبکه‌ها و فنون مربوط به آن توسعه یافتند. از بین گونه‌های متنوع این رویه‌ها و تحت نامهای مختلف، دو روش پرت (فن ارزیابی و مرور برنامه) و سی‌پی‌ام (روش مسیر بحرانی) بیش از همه معروفیت پیدا کردند، به طوری که خواهیم دید، این دو روش تفاوتهای اساسی چندانی با هم ندارند.

در سالهای اخیر، کوششهائی به منظور توسعه مدلی تلفیقی از این دو روش صورت گرفته است. این مدل تلفیقی عموماً سیستم پرت گونه[1] خوانده می‌شود.

هرچند کاربرد اولیه سیستمهای پرت گونه برای ارزیابی و زمان‌بندی برنامه‌های تحقیق و توسعه[2] بود، لیکن برای ارزیابی و کنترل پیشرفت انواع مختلف پروژه‌های دیگر نیز به کار گرفته شدند. در این زمینه می‌توان از کاربرد آنها در برنامه‌های ساختمانی، برنامه‌سازی کامپیوتری، برگزاری مزایده و مناقصه، برنامه‌ریزی تعمیر و نگهداری و نوسازی صنایع، نصب سیستمهای کامپیوتری و برنامه‌های فضائی نام برد. حتی در تهیه فیلمهای سینمائی، مبارزات انتخاباتی و جراحی‌های پیچیده نیز از این روشها استفاده شده است.

یک سیستم **پرت گونه** عمدتاً برای برنامه‌ریزی و کنترل طراحی می‌شود. از این رو، مستقیماً تاکید زیادی بر **بهینه‌سازی** ندارد. گاهی، یکی از هدفهای اصلی آن، محاسبه احتمال اتمام یک پروژه در موعد مقرر است. همچنین با استفاده از این رویکرد می‌توان فعالیتهائی را مشخص ساخت که احتمالاً گلوگاههای اصلی هستند. آنگاه، بیشترین کوشش را بر اجرای آنها متمرکز کرد تا باعث به تأخیر افتادن کل پروژه نشوند. هدف سوم، بررسی اثرات ناشی از تغییر برنامه است. برای نمونه، بااستناده از این روش می‌توان تأثیر جابجائی منابع، از فعالیتهایی که کمتر بحرانی هستند به فعالیت‌هایی که بنظر می‌رسد گلوگاههای احتمالی باشند را ارزیابی کرد. همچنین می‌توان مبادله سایر منابع و عملکردها را نیز بررسی کرد. یک کاربرد مهم دیگر آن ارزیابی انحراف از زمان‌بندی است.

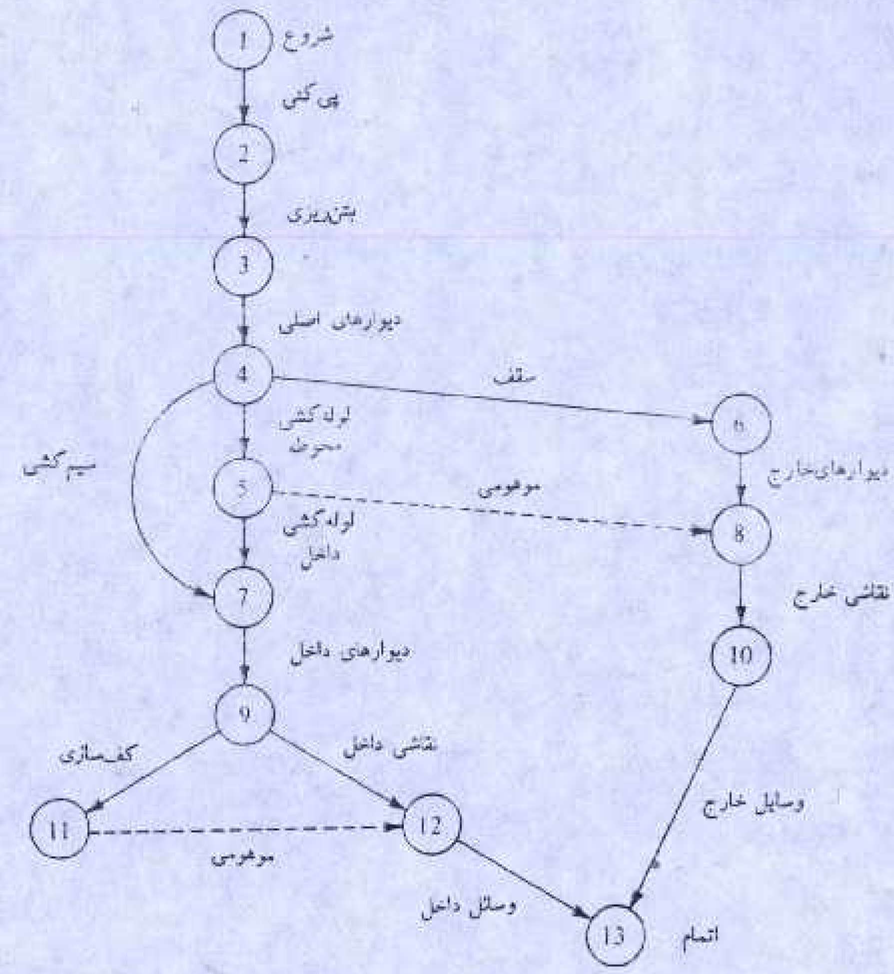
در تمام سیستمهای پرت گونه، روابط متقابل عناصر پروژه با استفاده از یک **شبکه** بیان می‌گردند. در این شبکه، کلیه روابط تقدم وتاخر مربوط به ترتیب انجام وظایف نشان داده می‌شوند. این موضوع در شکل ۷-۷ برای بیان شبکه ابتدایی پروژه ساختن یک خانه نمایش داده شده است.

1) PERT- type system
2) Research and Development

هر شاخه شبکه معرف یک **فعالیت**[1] است، و هر فعالیت یکی از کارهای لازم برای انجام پروژه را نشان می‌دهد. **هر گره** معرف یک **واقعه**[2] است، که معمولاً زمانی را نشان می‌دهد که کلیه فعالیتهای مختوم به گره تکمیل شوند. **پیکانها**[3] نشان می‌دهند که واقعه‌ها به چه ترتیب باید اتفاق بیفتند. به علاوه، قبل از آنکه هریک از فعالیتهائی که از یک گره شروع می‌شوند بتوانند آغاز گردند، ابتدا باید خود آن واقعه اتفاق افتاده باشد. (در عمل، اغلب این امکان وجود دارد که دو مرحله متوالی پروژه با یکدیگر فصل مشترک داشته باشند، ازاین رو، شبکه در واقع تصویری تقریبی از برنامه پروژه است). گرهی که تمام فعالیتها رو به آن دارند (**مقصد شبکه**)[4]، واقعه‌ای است که تکمیل پروژه را بر اساس برنامه فعلی نشان می‌دهد. شبکه می‌تواند نشان دهنده آغاز تا پایان برنامه یک پروژه جدید و یا برنامه تکمیل یک پروژه نیمه تمام باشد. در حالت دوم، هر مبداء شبکه، شروع مجدد یک فعالیت نیمه تمام و یا شروع یک فعالیت جدید که می‌تواند بلافاصله اجرا شود را نشان می‌دهد.

پیکانهائی که با خط چین نشان داده شده‌اند، **فعالیتهای موهومی**[5] خوانده می‌شوند. اینها فقط بیانگر تقدم و تاخر هستند و در واقع فعالیتی را مشخص نمی‌کنند. برای نمونه، در شکل ۷-۷ یک فعالیت موهومی وجود دارد که از گره ۵ به طرف گره ۸ رسم شده است، و گویای آن است که قبل ازشروع نقاشی خارجی، ابتدا باید لوله کشی‌های خارجی تکمیل شده باشد. یک قاعده کلی در رسم شبکه پروژه‌ها این **است که دو گره نمی‌توانند مستقیماً توسط بیش از یک شاخه به یکدیگر مربوط شوند**. در شرایطی که دو یا چند فعالیت همزمان با یکدیگر در جریان باشند، می‌توان از **فعالیتهای موهومی**، برای پرهیز از زیرپا-گذاشتن قاعده فوق استفاده کرد. این موضوع در شکل ۷-۷ از طریق فعالیت موهومی رابط بین گره‌های ۱۱ و ۱۲ نشان داده شده است.

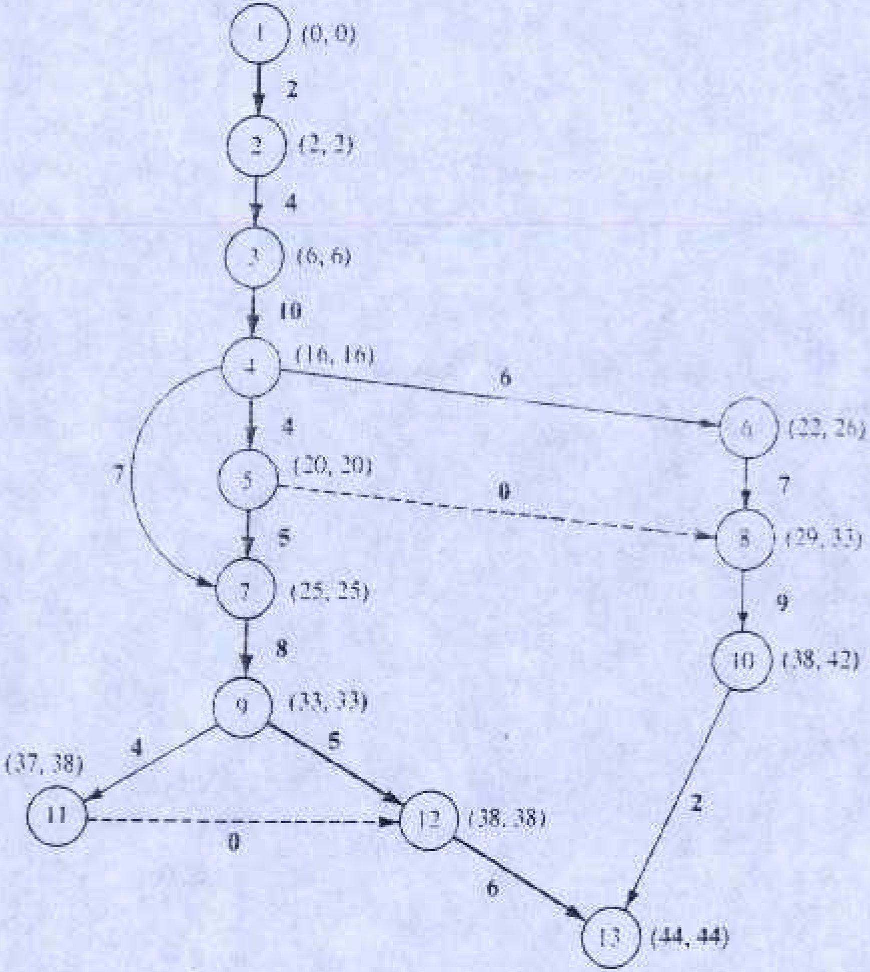
1) Activity
2) Event
3) Arrowheads
4) Sink
5) Dummy



شکل ۷-۷ شبکه اولیه پروژه ساختن یک‌خانه

پس از رسم شبکه یک پروژه، قدم بعدی این است که زمان لازم برای انجام هریک از فعالیتها برآورد شوند. این برآوردها، مثلاً برای ساختمن خانه شکل ۷-۷، به صورت ارقام پر رنگ (برحسب روزهای‌کاری) در شکل ۸-۷ مشخص گردیده‌اند. با استفاده از این ارقام، دو مشخصه اساسی، برای هر واقعه، محاسبه می‌شوند. این دو مشخصه اساسی به **زودترین زمان**[1] و **دیرترین زمان**[2] رخداد آن واقعه موسومند.

1) *Earliest Time* 2) *Latest Time*



شکل ۸-۷ شبکه نهائی پروژه ساختن یک خانه

زودترین زمان مربوط به واقعه زمانی است که آن واقعه می‌تواند رخ دهد به شرط آنکه تمام فعالیتهای **مقدم** بر آن، **درزودترین زمان ممکن** شروع شده باشند.

محاسبه زودترین زمانها با استفاده از **حرکت رفت**[1] در شبکه انجام می‌شود.

1) *Forward Pass*

برای این منظور، از واقعه‌های ابتدائی شروع نموده، به جلو و به طرف واقعه‌های پایانی حرکت می‌کنیم. برای محاسبهٔ زودترین زمان مربوط به هر واقعه، فرض می‌شود که واقعه قبلی در زودترین زمان ممکن به وقوع پیوسته باشد و اجرای فعالیت بین این دو واقعه نیز فقط به اندازه زمانی که برای آن تخمین زده شده است وقت بگیرد. زمان شروع پروژه به عنوان زمان صفر منظور می‌شود. نتیجه محاسبات، در مورد مثال مربوط به شکلهای ۷–۷ و ۸–۷ در جدول ۳–۷ نشان داده شده است.

جدول ۳–۷ محاسبه زودترین زمانهای پروژه ساختن یک خانه

واقعه	واقعه قبلی	زودترین زمان + مدت فعالیت	حداکثر = زودترین زمان
۱	—	—	۰
۲	۱	۰+۲	۲
۳	۲	۲+٤	٦
٤	۳	٦+۱۰	۱٦
۵	٤	۱٦+٤	۲۰
٦	٤	۱٦+٦	۲۲
۷	٤	۱٦+۷	۲۵
	۵	۲۰+۵	
۸	۵	۲۰+۰	۲۹
	٦	۲۲+۷	
۹	۷	۲۵+۸	۳۳
۱۰	۸	۲۹+۹	۳۸
۱۱	۹	۳۳+٤	۳۷
۱۲	۹	۳۳+۵	۳۸
	۱۱	۳۷+۰	
۱۳	۱۰	۳۸+۲	٤٤
	۱۲	۳۸+٦	

زودترین زمانهای حاصل، اولین عدد از دو عددی است که در شکل ۸–۷ نشان داده شده است. دیرترین زمان مربوط به هر واقعه، دیرترین زمانی است که آن واقعه می‌تواند رخ دهد، بدون آنکه زمان تکمیل پروژه، از زودترین زمان آن **طولانی‌تر** گردد.

در این حالت، دیرترین زمان هر واقعه با یک حرکت برگشت[1] در طول شبکه به دست می‌آید. از واقعه‌های نهایی شروع می‌شود و حرکت به طرف واقعه‌های ابتدایی انجام می‌گیرد. این محاسبات با فرض اینکه زودترین زمان و دیرترین زمان تکمیل پروژه ساختمان خانه مساوی ٤٤ باشد انجام شده است.

تفاوت بین دیرترین و زودترین زمان یک واقعه را فرجه[2] آن واقعه می‌نامند. به همین ترتیب، **فرجه فعالیت (i,j) عبارت از تفاوت «دیرترین زمان واقعه j» با «زودترین زمان واقعه i به اضافه مدت زمان اجرای این فعالیت» است.**

به این ترتیب، فرجه هر واقعه نشان دهنده مدتی است که می‌توان آن واقعه را به تاخیر انداخت بدون آنکه زمان ختم پروژه به تاخیر افتد، مشروط بر اینکه سایر فعالیتها طبق برنامه انجام شوند. فرجه هر فعالیت نیز بیانگر تأخیر از همین نوع است. محاسبه فرجه‌های مربوط به پروژه خانه‌سازی در جدول ۵–۷ نشان داده شده است.

مسیر بحرانی[3] پروژه مسیری است در شبکه، که فرجه کلیه واقعه‌های آن مساوی صفر باشد. (تمام فعالیتها و واقعه‌هائی که دارای فرجه‌ای برابر با صفر باشند باید روی مسیر بحرانی قرار گیرند).

1) Backward pass *2) slack*

3) Critical Path

جدول ۴−۷ محاسبه دیرترین زمانهای مثال ساختن یک خانه

واقعه	واقعه بعدی	دیرترین زمان منهای مدت فعالیت	حداقل = دیرترین زمان
۱۳	—	—	۴۴
۱۲	۱۳	۴۴−۶	۳۸
۱۱	۱۲	۳۸−۰	۳۸
۱۰	۱۳	۴۴−۲	۴۲
۹	۱۲	۳۸−۵	۳۳
	۱۱	۳۸−۴	
۸	۱۰	۴۲−۹	۳۳
۷	۹	۳۳−۸	۲۵
۶	۸	۳۳−۷	۲۶
۵	۸	۳۳−۰	۲۰
	۷	۲۵−۵	
۴	۷	۲۵−۷	۱۶
	۶	۲۶−۶	
	۵	۲۰−۴	
۳	۴	۱۶−۱۰	۶
۲	۳	۶−۴	۲
۱	۲	۲−۲	۰

جدول ۵−۷ محاسبه فرجه در مثال ساختن یک خانه

واقعه	فرجه	فعالیت	فرجه
۱	۰−۰ = ۰	(۱،۲)	۲−(۰+۲) = ۰
۲	۲−۲ = ۰	(۲،۳)	۶−(۲+۴) = ۰
۳	۶−۶ = ۰	(۳،۴)	۱۶−(۶+۱۰) = ۰
۴	۱۶−۱۶ = ۰	(۴،۵)	۲۰−(۱۶+۴) = ۰
۵	۲۰−۲۰ = ۰	(۴،۶)	۲۶−(۱۶+۶) = ۴
۶	۲۶−۲۲ = ۴	(۴،۷)	۲۵−(۱۶+۷) = ۲
۷	۲۵−۲۵ = ۰	(۵،۷)	۲۵−(۲۰+۵) = ۰
۸	۳۳−۲۹ = ۴	(۶،۸)	۳۳−(۲۲+۷) = ۴
۹	۳۳−۳۳ = ۰	(۷،۹)	۳۳−(۲۵+۸) = ۰
۱۰	۴۲−۳۸ = ۴	(۸،۱۰)	۴۲−(۲۹+۹) = ۴
۱۱	۳۸−۳۷ = ۱	(۹،۱۱)	۳۸−(۳۳+۴) = ۱
۱۲	۳۸−۳۸ = ۰	(۹،۱۲)	۳۸−(۳۳+۵) = ۰
۱۳	۴۴−۴۴ = ۰	(۱۰،۱۳)	۴۴−(۳۸+۲) = ۴
		(۱۲،۱۳)	۴۴−(۳۸+۶) = ۰

با بررسی فعالیتهائی که دارای فرجه صفر هستند (جدول ۵−۷)، مشخص می‌شود که خانه مورد بحث در این مثال، دارای یک مسیر بحرانی است که در شکل ۸−۷ با **پیکانهای پررنگتر نشان داده شده است. این مسیر عبارت از 13 ← 12 ← 9 ← 7 ← 5 ← 4 ← 3 ← 2 ← 1 است. از این رو اجرای این سلسله از فعالیتها باید همواره پیگیری شوند تا از عقب افتادن پروژه جلوگیری گردد. در پروژه‌های دیگر، ممکن است بیش از یک مسیر بحرانی وجود داشته باشد. چنانچه مدت فعالیت (۶−۴)، در شکل ۶−۷، از ۶ به ۱۰ تغییر کند، اثرات این تغییر را بررسی کنید.**

توجه کنید که در جدول ۵–۷، علیرغم آنکه تمام واقعه‌های مسیر بحرانی (و از جمله ۴ و ۷) لزوماً دارای فرجه صفر هستند، لیکن فرجه فعالیت (۷–۴) صفر نیست زیرا مدت این فعالیت کمتر از مجموع مدت فعالیتهای (۵–۴) و (۷–۵) است. درنتیجه، دو فعالیت (۵–۴) و (۷–۵) روی مسیر بحرانی قرار دارند در حالی که فعالیت (۷–۴) روی این مسیر نیست.

اطلاعات موجود در مورد زودترین و دیرترین زمانها، فرجه و مسیر بحرانی از نظر مدیریت بسیار باارزش است. این اطلاعات، علاوه برفوائد دیگر، مدیر را قادر می‌سازد تا اثر اصلاحات ممکن در برنامه را بررسی نماید و تعیین کند در چه مواردی به کوشش ویژه نیاز هست تا پروژه در موعد مقرر به پایان برسد.

پرت، رویکرد سه‌زمانی

تا اینجا فرض براین بود که در مورد زمان لازم برای اجرای هر یک از فعالیتهای پروژه فقط از یک تخمین استفاده شود. لیکن، معمولاً به علت وجود عوامل مختلف نمی‌توان این مدت زمان را قطعی تلقی نمود؛ بلکه در واقع یک متغیر تصادفی است که تابع توزیع احتمالی دارد. با توجه به این امر، برای تخمین زمان انجام فعالیت در پرت، از سه عدد مختلف استفاده می‌شود تا از این طریق، اطلاعات اساسی در مورد توزیع احتمالی آن حاصل گردد. با استفاده از این زمانها، احتمال ختم پروژه در زمان تعیین شده، برآورد می‌گردد.

سه تخمین پرت که برای هریک از فعالیتها منظور می‌شوند عبارت از **محتمل‌ترین تخمین**[1]، **تخمین خوشبینانه**[2]، و **تخمین بدبینانه**[3]، هستند. محتمل‌ترین

1) *Most likely Estimate* 2) *Optimistic*
3) *Pessimistic*

تخمین (که با m مشخص می‌شود) همان واقع بینانه‌ترین تخمین زمان لازم برای انجام فعالیت است. به زبان آمار، این تخمین، نقطه اوج تابع چگالی زمان انجام فعالیت مورد نظر را بیان می‌کند. تخمین خوشبینانه (که با a مشخص می‌شود) مدت زمانی است که اجرای فعالیت در آن مدت، تنها در شرایطی محتمل است که همه چیز بخوبی پیش رود. به زبان آمار، این تخمین معرف حدپائینی توزیع احتمالی موردنظر است. تخمین بدبینانه (که با b مشخص می‌شود) زمان اجرای فعالیت را در نامطلوبترین شرایط ممکن نشان می‌دهد. به زبان آمار، این تخمین معرف حدبالایی توزیع احتمالی مورد نظر است. محل قرارگرفتن این سه تخمین در رابطه با تابع توزیع احتمالی در شکل ۹–۷ نشان داده شده است.

با اتکاء به دو فرض، امیدریاضی[1] و واریانس[2] تابع توزیع احتمالی، مدت زمان لازم برای انجام هرفعالیت برحسب مقادیر m، a و b بیان می‌شوند. فرض اول این است که با قرار دادن مقدار انحراف معیار (جذر واریانس) برابر با یک ششم فاصله بین زمانهای ممکن، تخمین مطلوبی برای واریانس به دست می‌آید، یعنی

$$\sigma^2 = \left[\frac{1}{6}(b-a)\right]^2$$

دلیل منطقی بودن این فرض آن است که در مورد بسیاری از متغیرهای تصادفی (منجمله توزیع نرمال) هریک از حدهای بالا و پائین تابع توزیع در فاصله سه برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند. بنابراین، فاصله بین دو انتهای آن شش برابر انحراف معیار است. برای نمونه، نمودارهای کنترل که عموماً در کنترل کیفیت آماری مورد استفاده قرار می‌گیرند طوری ساخته می‌شوند که دامنه بین دو حد کنترلی آنها مساوی شش برابر انحراف معیار باشد.

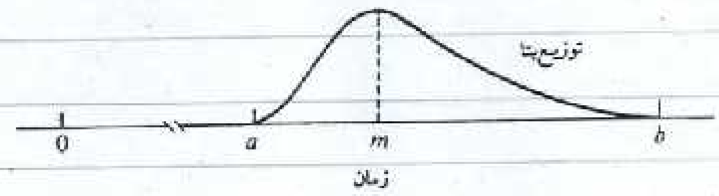
به منظور بدست آوردن امید ریاضی، به یک فرض دیگر نیز در مورد تابع

1) *Expected Value* 2) *Variance*

توزیع زمان لازم برای انجام هر فعالیت نیاز است. فرض می‌شود که توزیع مورد بحث تقریباً بتا[1] باشد. **نقطه اوج آن در m ، حدپائینی آن a ، حدبالایی آن b** ، و انحراف معیار آن طبق رابطه زیر به دست می‌آید

$$\sigma = \frac{1}{6}(b-a)$$

چنین توزیعی در شکل ۹-۷ نشان داده شده است.



شکل ۹-۷ تابع چگالی اجرای فعالیت برای پرت با تخمین سه زمانه

با استفاده از مدل شکل ۹-۷، می‌توان نتیجه گرفت که امید ریاضی زمان اجرای فعالیت (که درپرت با (t_e) مشخص می‌شود) **تقریباً مساوی مقدار زیر است**

$$t_e = \frac{1}{3}\left[2m + \frac{1}{2}(a+b)\right]$$

توجه داشته باشید که $(a+b)/2$ معرف نقطه وسط a و b است. لذا، (t_e) میانگین عددی نقطه اوج (با در نظر گرفتن وزن دوسوم) و نقطه وسط است. هرچند که بتا بودن توزیع در واقع به طور دلخواه فرض شده است، اما امیدریاضی این توزیع در رابطه با m ، a و b طوری است که منظور ما را به طور معقولی برآورده می‌نماید.

پس از تخمین **امیدریاضی و واریانس** هر فعالیت، به سه فرض (یا تقریب) دیگر نیز احتیاج است، تا بتوان احتمال تکمیل پروژه را طبق برنامه محاسبه نمود. یک

1) *Beta*

فرض این است که ۱- زمان فعالیتها از نظر آماری **مستقل** از یکدیگرند. دوم اینکه، ۲- مجموع زمان لازم برای اجرای فعالیتهای **مسیر بحرانی**(برحسب امید ریاضی) از زمان لازم برای اجرای فعالیتهای هر مسیر دیگری بیشتر است. از این فرض نتیجه می‌شود که امید ریاضی و واریانس **زمان کل پروژه**، به ترتیب، مساوی مجموع امید ریاضی و واریانس زمان لازم برای انجام فعالیت‌های مسیر بحرانی است. فرض سوم این است که ۳- **زمان اجرای پروژه دارای توزیع نرمال است**. فرض اخیر بر این استدلال متکی است که زمان اجرای پروژه، حاصل جمع متغیرهای تصادفی مستقل متعددی است. طبق **قضیه حدمرکزی[1] چنین حاصل جمعی تحت شرایط گوناگون، تقریباً توزیع نرمال** دارد. با در دست داشتن **میانگین و واریانس**، به سادگی **می‌توان محاسبه کرد که** احتمال اینکه **این متغیرتصادفی نرمال (زمان پروژه) از زمان مشخصی کمتر باشد چقدر است**[2].

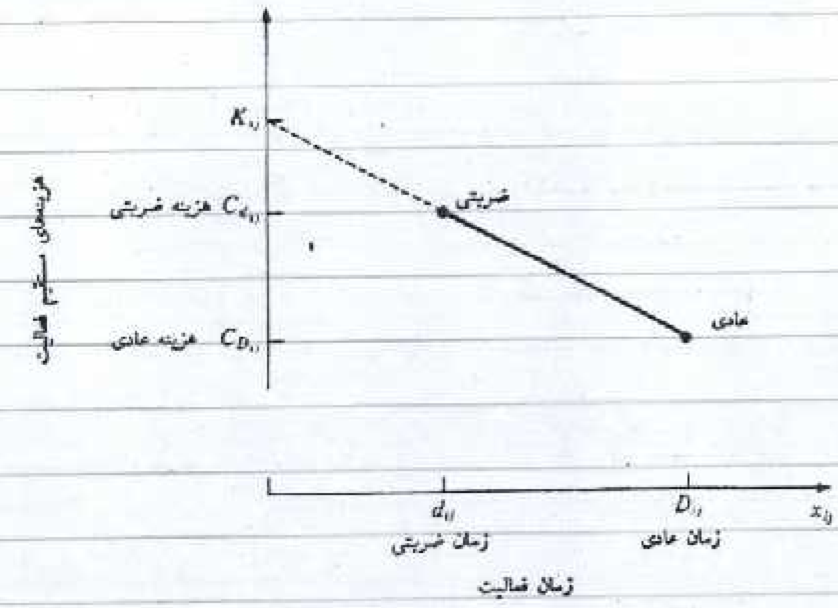
برای آشنایی با این موضوع، فرض کنید که در برنامه زمانبندی پروژه ساختن خانه در شکل ۷-۷، قرار است که این پروژه ظرف ۵۰ روز تکمیل گردد. فرض کنید **امیدریاضی و واریانس** هر فعالیت برابر **با مقادیر نشان داده شده در شکل ۸-۷** باشد. بنابراین، هم امیدریاضی و هم واریانس زمان اجرای پروژه، معادل ۴۴ خواهند بود. لذا، انحراف‌معیارمساوی $\sqrt{44}$ است. بنابراین، زمان مقرر شده برای ختم پروژه (یعنی ۵۰)، **تقریباً به اندازه ۰/۹ انحراف معیار بالاتر** از امید ریاضی زمان ختم پروژه قرار دارد. با مراجعه به جداول تابع توزیع احتمالی نرمال، به این نتیجه می‌رسیم که احتمال وقوع چنین رویدادی ۰/۸۲ است.

1) *Central Limit Theorem*

۲) همین روش را می‌توان برای محاسبه احتمال وقوع هر واقعه میانی در زمانی کمتر از آنچه که در برنامه آمده است نیز بکار گرفت.

روش سی‌پی‌ام و مبادله هزینه ــ زمان

پرت و سی‌پی‌ام دو تفاوت مهم با یکدیگر دارند. اول اینکه در سی‌پی‌ام فرض می‌شود که زمان فعالیتها **قطعی (غیراحتمالی) است** (بدین معنی که می‌توان آنها را با تقریب بسیار خوبی به طور قطعی پیش‌بینی نمود). بنابراین، به رویکرد سه زمانی پرت که در بالا گفته شد احتیاجی نیست. دوم اینکه در سی‌پی‌ام، به جای آنکه تا کید اصلی بر زمان باشد به هر دو عامل **زمان و هزینه** توجه یکسانی می‌شود. این منظور، با رسم یک منحنی هزینه- زمان برای **هر فعالیت**، نظیر آنچه که در شکل ۱۰-۷ نشان داده شده است عملی می‌گردد. در این منحنی رابطه بین هزینه مستقیم[1] برای اجرای فعالیت و



شکل ۱۰-۷ منحنی‌زمان - هزینه برای‌فعالیت (i ، j)

۱) هزینه مستقیم شامل هزینه مواد، تجهیزات و ماشین‌آلات، و نیروی انسانی لازم برای انجام فعالیت است اما شامل هزینه‌های غیرمستقیم پروژه نظیر نظارت و سایر هزینه‌های بالاسری معمول و نرخ بهره و غیره نمی‌شود .

مدت زمان انجام آن مشخص می گردد. این منحنی، معمولاً با استفاده از دو نقطه مربوط به زمان **عادی** و زمان **ضربتی**[1] **ترسیم‌می‌شود**[2]. نقطه عادی، میزان هزینه و زمان تحت شرایطی که فعالیت به طور **عادی** و بدون هزینه اضافی (اضافه کاری نیروی انسانی، مواد و تجهیزات خاصی که باعث تسریع در انجام فعالیت می‌شوند و نظائر اینها) انجام شود را نشان می‌دهد. در مقابل، نقطه ضربتی، میزان هزینه و زمان در شرایطی که فعالیت بطور فشرده با حداکثر توان انجام شود را مشخص می کند. در این نقطه برای **اینکه** فعالیت با حداکثر سرعت و شتاب انجام گیرد از هیچ هزینه‌ای که بتواند زمان را تا آنجا که ممکن است کاهش دهد مضایقه نمی‌شود. به طور تقریبی، فرض می‌شود که تمام ترکیبات **هزینه و زمان** بین این دو نقطه نیز امکان پذیر باشد، و نحوه این **مبادله از طریق پاره‌خط رابط بین دو نقطه بیان می گردد (پاره‌خط پررنگ شکل ۱۰-۷).**

بنابراین برای مشخص کردن منحنی، فقط آگاهی از زمان و هزینه این دو نقطه که با استفاده از نظرات کارشناسان پروژه مشخص می گردد کافی خواهد بود.

هدف اصلی روش **سی‌پی‌ام**، تعیین ترکیب هزینه - زمان مربوط به هر فعالیت **است**، به طوری که بتوان پروژه را با حداقل **هزینه در زمان** مورد نظر تکمیل نمود. یک راه حل برای پیدا کردن جواب این مسئله استفاده ازبرنامه‌ریزی‌خطی است. برای تشریح این رویکرد ابتدا باید پاره‌ای قراردادها که برخی از آنها در شکل ۱۰-۷ آمده‌اند را توضیح دهیم.

D_{ij} = زمان عادی فعالیت (i,j)

$C_{D_{ij}}$ = هزینه (مستقیم) فعالیت (i,j) در شرایط عادی

d_{ij} = زمان ضربتی فعالیت (i,j)

$C_{d_{ij}}$ = هزینه (مستقیم) فعالیت (i,j) در شرایط ضربتی

متغیرتصمیم مسئله با x_{ij} **مشخص می‌شود، که**

1) *Crach Time*

۲) ممکن است تحت شرایط خاص از بیش از دونقطه نیز استفاده شود.

x_{ij} = زمان فعالیت (i,j)

برای نشان دادن هزینه مستقیم فعالیت (i,j) به صورت تابعی (خطی) از x_{ij}، فرض کنید رابطه زیر معرف افزایش هزینه فعالیت (i,j) در اثر کاهش یک واحد از x_{ij} باشد

$$C_{ij} = \frac{C_{d_{ij}} - C_{D_{ij}}}{D_{ij} - d_{ij}}$$

همچنین محل تقاطع محور هزینه‌ها با خط رابط بین نقاط عادی و ضربتی فعالیت (i,j) را K_{ij} می‌نامیم. این موضوع در شکل ۱۰–۷ نشان داده شده است. بنابراین

هزینه مستقیم فعالیت (i,j) $= K_{ij} - C_{ij}x_{ij}$

در نتیجه،

مجموع هزینه‌های مستقیم پروژه $= \sum_{(i,j)} (K_{ij} - C_{ij}x_{ij})$

حاصل جمع فرق به ازای کلیه مقادیر i و j محاسبه می‌گردد. اکنون همه چیز برای فرموله کردن ریاضی مسئله آماده است.

مسئله با فرض اینکه زمان (حداکثر) ختم پروژه معین بوده و مساوی T باشد، مقادیر x_{ij} را طوری انتخاب کنید که مجموع هزینه‌های مستقیم پروژه حداقل شود.

فرموله کردن برنامه‌ریزی خطی

برای آنکه زمان ختم پروژه در محاسبات وارد شود، لازم است در فرموله کردن برنامه‌ریزی خطی این مسئله، برای هرواقعه متغیر دیگری به شرح زیر تعریف گردد

y_k = **زودترین زمان** رخداد واقعه k که تابعی از x_{ij} است.

با این قرارداد که

واقعه 1 = شروع پروژه

واقعه n = تکمیل پروژه

لذا $y_1 = 0$

y_n = زمان ختم پروژه (مجهول است)

همچنین توجه داشته باشید که $\sum K_{ij}$ یک مقدار ثابت است و می‌توان آنرا ازتابع هدف حذف کرد. بنابراین، حداقل کردن مجموع هزینه‌های مستقیم پروژه، معادل (به بخش ۱۰–۲ مراجعه شود) حداقل کردن $\sum C_{ij}x_{ij}$ است. از این رو، هدف از مسئله برنامه‌ریزی خطی به دست آوردن مقادیر x_{ij} (و y_k مربوطه) است، به طوری که

$$\text{Maximize} \quad Z = \sum_{(i,j)} C_{ij}x_{ij},$$

$$\left.\begin{array}{r} x_{ij} \ge d_{ij} \\ x_{ij} \le D_{ij} \\ y_i + x_{ij} - y_j \le 0 \end{array}\right\} \text{ برای تمام فعالیتهای } (i,j)$$

$$y_n \le T.$$

از نظر محاسباتی، می‌توان این فرموله کردن را با تغییر متغیر، به صورت بهتری درآورد. برای این منظور، x_{ij} با معادل‌های زیر جایگزین می‌شود

$$x_{ij} = d_{ij} + x'_{ij}$$

بنابراین، نخستین مجموعه محدودیت‌های کارکردی $x_{ij} \ge d_{ij}$ به سادگی با محدودیت‌های غیرمنفی زیر جایگزین می‌شوند

$$x'_{ij} \ge 0$$

محدودیت‌های غیرمنفی سایر متغیرها را نیز می‌توان برای سهولت به صورت زیر نشان داد

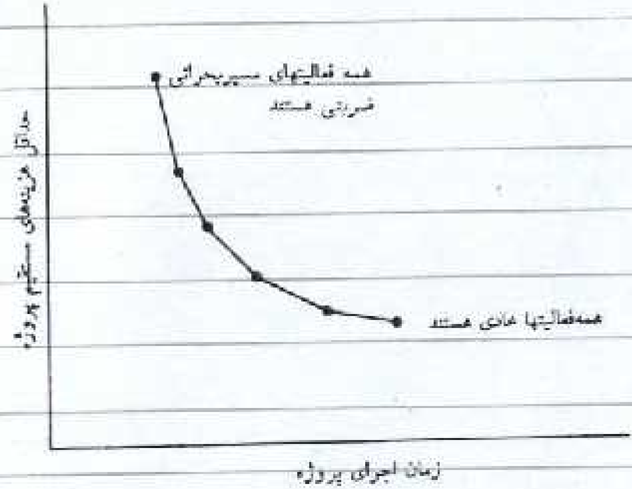
$$y_k \ge 0$$

در واقع این متغیرها در حال حاضر هم با قراردادن $y_1 = 0$ اجباراً باید غیرمنفی باشند، زیرا محدودیت‌های $x'_{ij} \geq 0$ و $y_j \geq y_i + d_{ij} + x_{ij}$ برقرار شده است.

نکته اصلی در این فرموله کردن، نحوه معرفی y_i در مدل است تا به ازای مقادیر معلوم x_{ij} مقدار y_i مورد نظر بدست آید. برای اینکه ببینیم چرا این روش عملی است، بازاء یک جواب موجه x_{ij} زودترین زمانهای مربوط به واقعه‌ها را از طریق حرکت رفت در طول شبکه محاسبه نمائید. با قرار دادن $y_1 = 0$ سومین گروه محدودیتها $y_i + x_{ij} - y_j \leq 0$ باعث می‌شوند که برنامه‌ریزی خطی y_j را از مقداری که اجباراً باید باشد بزرگتر ننماید، زیرا هیچ فایده‌ای از این کار عاید نخواهد شد. (در حقیقت، بزرگتر کردن y_j فقط می‌تواند باعث شود که y_n از آنچه که باید باشد بزرگتر گردد.) بنابراین جوابهای بهینه مدل شامل جواب اساسی موجه است که هیچ یک از مقادیر y_i در آن از مقداری که بواسطه مقادیر بهینه x_{ij} اجباراً باید باشند بزرگتر نیستند. یعنی، این y_i ها زودترین زمان حقیقی واقعه‌ها را نشان می‌دهند.

در این مسئله، فرض کردیم که زمان تکمیل پروژه معین است (احیاناً در قرارداد)، اما اغلب چنین نیست. بنابراین، در فرموله کردن برنامه‌ریزی خطی مشخص نیست که چه مقداری باید به T اختصاص داده شود. در این صورت، همیشه این سئوال مطرح است که رابطه بین کل هزینه و کل زمان چگونه باید باشد؟ اطلاعات اساسی مورد نیاز برای پاسخ به این سئوال، تعیین رابطه بین حداقل مقدار کل هزینه‌های مستقیم و تغییرات T در فرموله کردن فوق است. این موضوع در شکل ۱۱-۷ تشریح گردیده است. برای بدست آوردن این اطلاعات می‌توان با استفاده از برنامه‌ریزی خطی پارامتری (به بخش ۳-۶، جلد اول مراجعه شود) جواب بهینه را به عنوان تابعی از T بدست آورد[1] لیکن، برای نیل به این مقصود، رویه کارآتری وجود دارد که بیشتر مورد

۱) شیب منحنی هزینه - زمان در نقاطی که در شکل ۱۱-۷ به صورت نمونه مشخص گردیده‌اند تغییر می‌یابد، زیرا تغییرات مجموعه متغیرهای اساسی مربوط به جواب بهینه بازاء همین مقادیر ایجاد می‌شود. مفهوم جامع‌تر این موضوع در بخش ۳-۶ مورد بحث قرار گرفت.

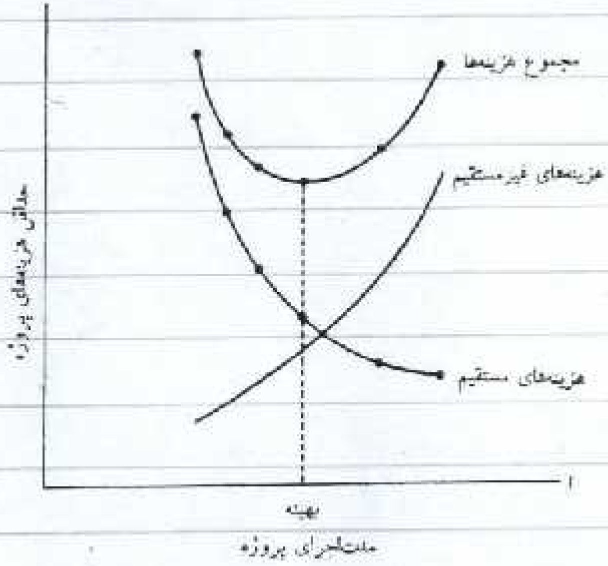


شکل ۱۱-۷ منحنی هزینه - زمان برای اتمام پروژه

استفاده قرار می‌گیرد. در این رویه از ساختار ویژه مسئله استفاده می‌شود و مسئله ثانویه آن به گونه‌ای به مسئله بیشترین جریان که در فصل گذشته تشریح شده تبدیل می‌گردد. برنامه‌های کامپیوتری این رویه را می‌توان به آسانی تهیه کرد.

موقعی که بعضی از پی‌آمدهای مهم طولانی شدن پروژه به زبان مالی بیان نشوند، شکل ۱۱-۷ می‌تواند مبنای با ارزشی برای تصمیم گیری مدیران در انتخاب T (و همچنین جواب بهینه و x_{ij} های مربوطه) باشد. لیکن، در موقعی که ملاحظات مالی عامل اصلی باشد، ترکیب منحنی هزینه مستقیم (شکل ۱۱-۷) با منحنی هزینه غیرمستقیم (نظارت، تجهیزات، اداری، بهره و جریمه‌های قراردادی) و رسم آن نسبت به T روش مناسبی است.

ترکیب این دو منحنی در شکل ۱۲-۷ نشان داده شده است. به این ترتیب، مجموع این دو منحنی معرف حداقل مجموع هزینه‌های پروژه نسبت به T است. مقدار بهینه T حداقل هزینه را دربرخواهد داشت.



شکل ۱۲-۷ منحنی‌هزینه – زمان‌برای اتمام پروژه (هزینه مستقیم وغیرمستقیم)

انتخاب بین پرت و سی‌پی‌ام

انتخاب بین پرت و سی‌پی‌ام برای تبادل هزینه و زمان عمدتاً بستگی به نوع پروژه و هدفهای مدیریت دارد. موقعی که در پیش‌بینی زمان اجرای فعالیتها عوامل ناشناخته گوناگونی وجود داشته و کنترل مؤثر پروژه مطرح باشد روش پرت مشخصاً مناسبتر است. برای نمونه، بسیاری از پروژه‌های تحقیق و توسعه از این نوعند. از طرف دیگر، روش سی‌پی‌ام در صورتی مناسب است که تخمین نسبتاً دقیق مدت اجرای فعالیتها امکان‌پذیر باشد (احتمالاً بر اثر تجربیات گذشته) و ضمناً بتوان این زمانها را تنظیم کرد (مثلاً با تغییر تعداد کارکنان) و با تبدیل زمان وهزینه، برنامه مناسبی را تدارک دید. پروژه‌های ساختمانی و تعمیر و نگهداری از این نوع هستند.

در واقع تفاوتهای دو روش پرت و سی‌پی‌ام لزوماً حتی تا این حد هم که در اینجا گفته شد قابل ذکر نیست. در حال حاضر، بسیاری از گونه‌های روش پرت استفاده از یک تخمین (محتمل‌ترین تخمین) را برای هر فعالیت مجاز می‌شمارند و در نتیجه وارد مباحث احتمالی نمی‌شوند. یک گونه از این روشها که پرت– هزینه[1] خوانده می‌شود، نحوه مبادله زمان و هزینه را به طریقی شبیه سی‌پی‌ام بررسی می‌نماید.

۷-۷ نتیجه

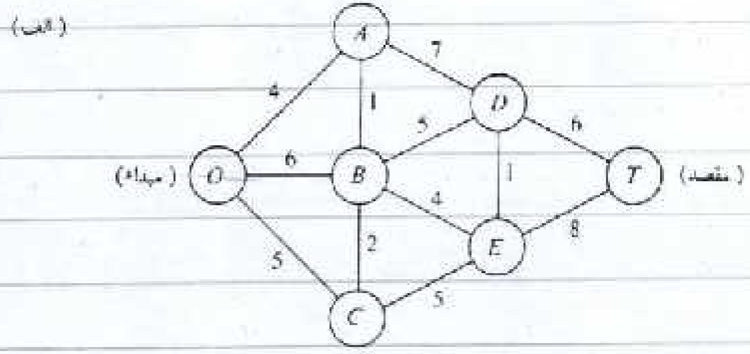
گونه‌های متفاوت شبکه‌ها در زمینه‌های متعددی مطرح می‌شوند. تحلیل شبکه‌ها فنون با ارزشی (به خصوص فنون بهینه سازی) را به منظور طراحی و عملیات سیستمهای شبکه‌ای فراهم می‌آورد. هر چند، حل مسائل شبکه‌ها به علت ماهیت ترکیبی آنها مشکل است، لیکن پیشرفتهای زیادی در توسعه مدل سازی و روشهای حل آنها صورت گرفته است، و چشم‌اندازهای جدیدی برای کاربردهای مهم دیگر به وجود آمده است.

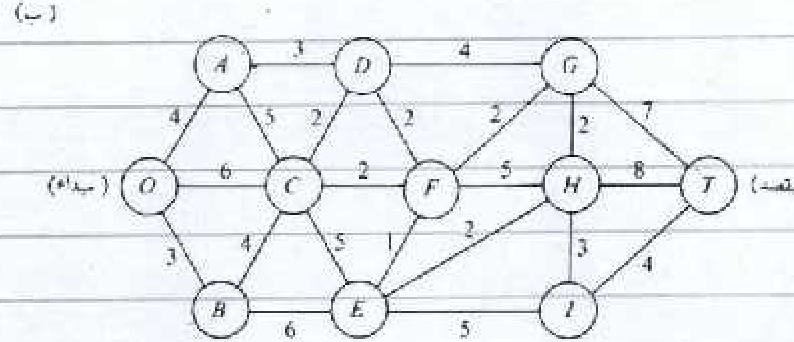
بیشترین کاربرد فن شبکه به سیستمهای پرت‌گونه مربوط می‌شود که در برنامه‌ریزی و کنترل پروژه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. این فن در مدیریت پروژه‌ها از جهت برنامه‌ریزی، بررسی گزینه‌های مختلف، بازنگری ابعاد کلی و جزئیات، برقراری و تفهیم مسئولیتهای مدیریتی، و مشخص کردن زمان واقع‌بینانه اتمام پروژه ارزش خود را نشان داده است. به علاوه، این فن به عنوان ابزاری هشداردهنده به منظور اقدامات پیشگیرانه و جلوگیری از مشکلات احتمالی آینده، به کارآمده است. اگرچه این فن گشاینده همه مشکلات نیست و به امکانات و محدودیتهای آن در دنیای واقعی توجه کافی نمی‌شود اما در عین حال در موارد متعدد، کمکهای باارزشی به مدیریت پروژه‌ها نموده است.

1) *PERT-Cost*

مسائل

۱- کوتاهترین مسیرهای شبکه‌های الف و ب را با استفاده از الگوریتمی که در بخش ۳-۷ ارائه شد، تعیین کنید. اعداد نشان داده شده معرف مسافتهای بین گره‌های مربوطه است.





۲- در یک فرودگاه کوچک، قرار است یک تراکتور برای انتقال تریلی‌های حمل بار مسافرین خریداری شود. چون سیستم خودکار حمل بار فرودگاه تا سه سال دیگر آماده خواهد شد، لذا بعد از آن، به این تراکتور نیاز نخواهد بود. با همه اینها، به علت حجم زیاد کار، در همین مدت هم هزینه بهره‌برداری و نگهداری تراکتور به

سرعت اضافه خواهد شد، به طوری که ممکن است بهتر باشد بعد از یک یا دو سال تعویض گردد. جدول زیر ارزش فعلی هزینه‌های تراکتوری که در سال i خریداری و در سال j تعویض شده باشد را نشان می‌دهد (با فرض این که اکنون سال صفر است). این هزینه شامل قیمت خرید منهای قیمت فروش تراکتور مستعمل و هزینه‌های بهره‌برداری و نگهداری است.

	۱	۲	۳
۰	۸	۱۸	۳۱
۱		۱۰	۲۱
۲			۱۲

هدف مسئله، تعیین زمان تعویض تراکتور در طول ۳ سال مورد نظر است، به طوری که مجموع هزینه‌ها در این مدت حداقل شود:

الف- این مسئله را به شکل یک مسئله کوتاهترین مسیر فورموله کنید.

ب- کوتاهترین مسیر را با استفاده از الگوریتمی که در بخش ۳-۷ ارائه شد تعیین کنید.

۳- مسئله ۱۸ فصل ٤ (جلد اول کتاب تحقیق در عملیات، برنامه‌ریزی خطی)؛ در رابطه با اتومبیل یک دانشجو را در نظر بگیرید

الف- این مسئله را به شکل یک مسئله کوتاهترین مسیر فورموله کنید.

ب- با استفاده از الگوریتمی که در بخش ۳-۷ ارائه شد، کوتاهترین مسیر را تعیین کنید.

٤- شرکتی در حال توسعه محصول جدیدی است و می‌داند که شرکت رقیب نیز در همین فکر است، لذا این شرکت مجبور است محصول جدید را که بازار فروش بسیار خوبی هم دارد، هرچه زودتر روانه بازار نماید. برای عرضه این محصول هنوز چهار فعالیت متوالی دیگر باقی مانده است که باید انجام گیرند. لازم است سرعت این

فعالیتها، که اکنون با روند «عادی» جریان دارند اضافه شود. افزایش سرعت می‌تواند به صورت «اولویت» و یا «ضربتی» انجام گردد. زمان لازم برای اجراء هر فعالیت، با سرعت «عادی»، «اولویت» و یا «ضربتی» به شرح جدول زیر است

زمان لازم

سرعت اجرا	تحقیقات باقیمانده	توسعه	طراحی سیستم تولیدی	تولید اولیه و توزیع
عادی	۵			
اولویت	۴	۳	۵	۲
ضربتی	۲	۲	۳	۱

مبلغ ۳۰ میلیون دلار برای اجرای این فعالیتها در نظر گرفته شده است، هزینه هر فعالیت، با توجه به سرعتهای مختلف اجرا (برحسب میلیون دلار) به شرح جدول زیر است

هزینه لازم

سرعت اجرا	تحقیقات باقیمانده	توسعه	طراحی سیستم تولیدی	تولید اولیه و توزیع
عادی	۳			
اولویت	۶	۶	۹	۳
ضربتی	۹	۹	۱۲	۶

هدف مسئله، تعیین سرعت اجرای این فعالیتها است به طوری که با در نظر گرفتن محدودیت بودجه، مجموع زمان لازم برای عرضه این محصول حداقل گردد.

الف — این مسئله را به شکل یک مسئله کوتاهترین مسیر فورموله کنید.

ب — با استفاده ازالگوریتمی که دربخش ۳-۷ ارائه شد، کوتاهترین مسیررا

تعیین نمائید.

۵- شبکه‌های مسئله ۱ را مجدداً در نظر بگیرید. با استفاده از الگوریتم بخش ۴-۷، کوتاهترین درخت دربر گیرنده این شبکه‌ها را تعیین کنید.

۶- یک شرکت تهیه کننده الوار در صدد است که فعالیت خود را در هشت نقطه از یک جنگل متمرکز سازد. برای این منظور لازم است یک جاده خاکی در جنگل احداث شود تا همه نقاط را با یکدیگر مربوط سازد. فاصله بین نقاط در جدول زیر آمده است. هدف مسئله تعیین جاده‌هائی است که باید بین هر دو نقطه احداث شود تا در عین حال که همه نقاط به یکدیگر متصل می‌گردندطول کل جاده‌ها نیز حداقل باشد.

فاصله بین هردونقطه (برحسب مایل)

نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۱	۰۰۰	۱/۳	۲/۱	۰/۹	۰/۷	۱/۸	۲/۰	۱/۵
۲	۱/۳	۰۰۰	۰/۹	۱/۸	۱/۲	۲/۶	۲/۳	۱/۱
۳	۲/۱	۰/۹	۰۰۰	۲/۶	۱/۷	۲/۵	۱/۹	۱/۰
۴	۰/۹	۱/۸	۲/۶	۰۰۰	۰/۷	۱/۶	۱/۵	۰/۹
۵	۰/۷	۱/۲	۱/۷	۰/۷	۰۰۰	۰/۹	۱/۱	۰/۸
۶	۱/۸	۲/۶	۲/۵	۱/۶	۰/۹	۰۰۰	۰/۶	۱/۰
۷	۲/۰	۲/۳	۱/۹	۱/۵	۱/۱	۰/۶	۰۰۰	۰/۵
۸	۱/۵	۱/۱	۱/۰	۰/۹	۰/۸	۱/۰	۰/۵	۰۰۰

۷- بانکی در صدد است که پایانه‌های کامپیوتری شعب خود را با کامپیوتر مرکزی مرتبط سازد. تلفنی که برای هر شعبه فراهم می‌شود لزوماً نباید مستقیماً به دفتر مرکزی وصل گردد، بلکه هرشعبه را می‌توان به طور غیرمستقیم، و از طریق شعب

دیگر، با دفتر مرکزی مرتبط ساخت. تنها موضوعی که باید رعایت شود این است که هرشعبه به طریقی با دفتر مرکزی مرتبط باشد. هزینه بهره‌برداری از خطوط تلفن مستقیماً با طول خطوط تلفنی متناسب است، فواصل بین شعبه‌ها به شرح جدول زیر است

فاصله بین هردو شعبه بانک

	شعبه‌مرکزی	شعبه ۱	شعبه ۲	شعبه ۳	شعبه ٤	شعبه ۵
شعبه‌مرکزی	۰۰۰	۱۹۰	۷۰	۱۱۵	۲۷۰	۱۶۰
شعبه ۱	۱۹۰	۰۰۰	۱۰۰	۲٤۰	۲۱۵	۵۰
شعبه ۲	۷۰	۱۰۰	۰۰۰	۱٤۰	۱۲۰	۲۲۰
شعبه ۳	۱۱۵	۲٤۰	۱٤۰	۰۰۰	۱۷۵	۸۰
شعبه ٤	۲۷۰	۲۱۵	۱۲۰	۱۷۵	۰۰۰	۳۱۰
شعبه ۵	۱۶۰	۵۰	۲۲۰	۸۰	۳۱۰	۰۰۰

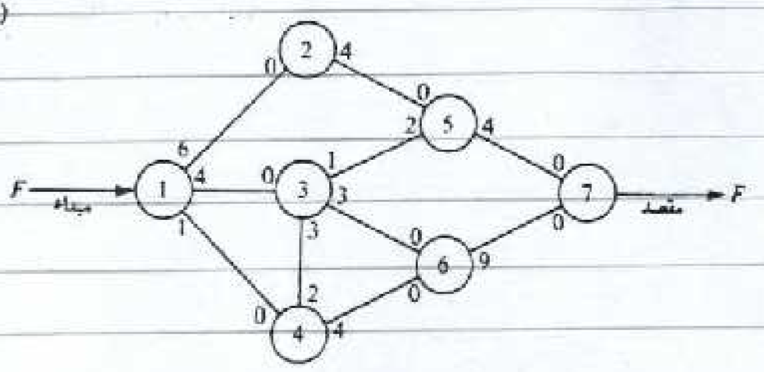
هدف مسئله این است که معلوم نماید بین کدام شعب بانک باید خط تلفن ایجاد شود تا با حداقل هزینه، بتوان هر شعبه را (مستقیم یا غیرمستقیم) به شعبه مرکزی متصل ساخت.

الف– توضیح دهید که این مسئله را چگونه می‌توان در چارچوب کوتاهترین درخت دربرگیرنده فورموله کرد.

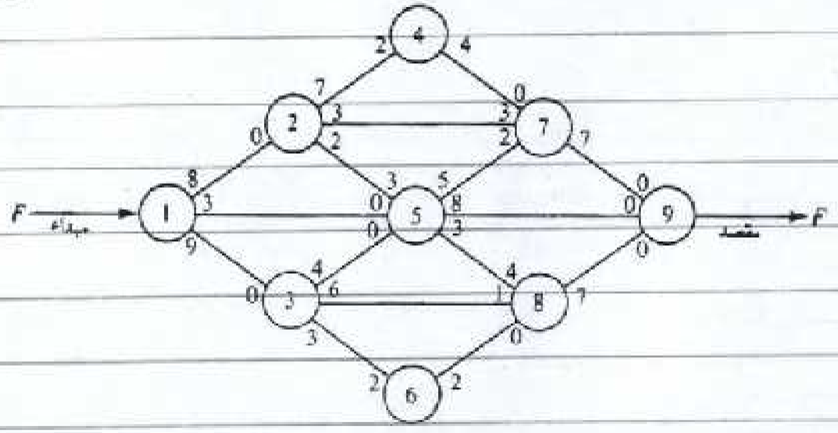
ب– با استفاده از الگوریتم بخش ٤–۷، مسئله را حل کنید.

۸– حداکثر جریان از مبداء به مقصد شبکه‌های «الف» و «ب» مسئله ۱ را تعیین کنید. ظرفیت شاخه‌ها، از گره i به گره j روی همان شاخه و در کنار i نوشته شده است.

(الف)



(ب)



۹– مسئله بیشترین جریان را به شکل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۱۰– یک خط آهن بین دو شهر کشیده شده است. از این خط هم برای قطارهای مسافربری و هم برای قطارهای باری استفاده می‌شود. برنامه قطارهای مسافری دقیقاً تنظیم شده است و نسبت به قطارهای باری اولویت دارد، لذا موقعی که یک قطار مسافربری از کنار قطار باری می‌گذرد، قطارباری باید ازخط اصلی به گذرگاههای جنبی برود تا قطار مسافربری بتواند به موقع به مقصد برسد.

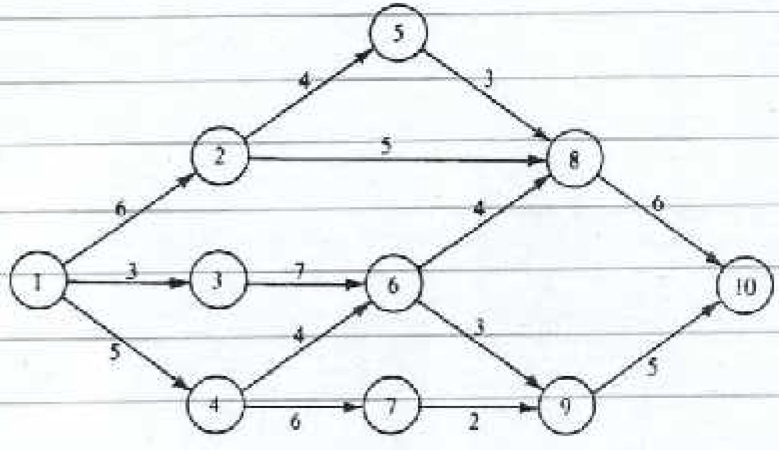
به علت افزایش حجم بار، ضرورت ایجاب نموده است که تعداد قطارهای باری

افزایش یابد. بنابراین، مسئله این است که حرکت قطارهای باری چگونه زمان‌بندی شود، به طوری که تعداد قطارهای باری که هر روز حرکت می‌کنند حداکثر گردد بدون اینکه در حرکت قطارهای مسافربری که برنامه زمان‌بندی مشخصی دارند خللی پدید آید. هر خط راه‌آهن را یک طرفه فرض می‌کنیم.

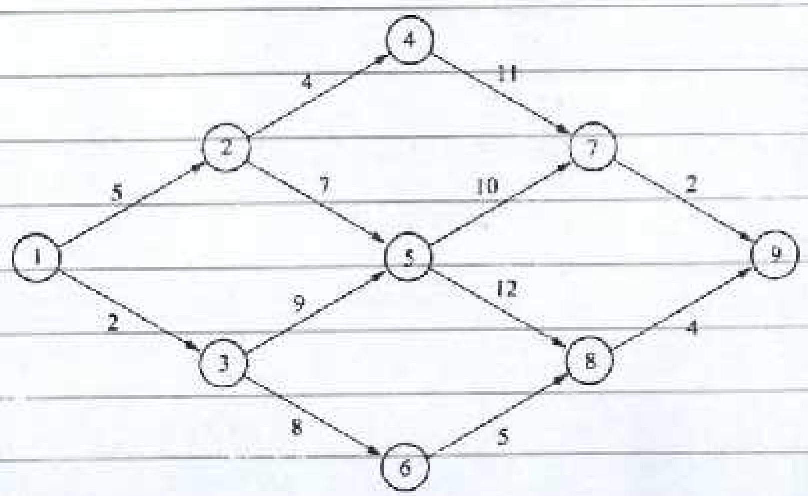
فاصله زمانی بین دو قطار باری باید مضربی از ۰/۱ ساعت باشد. بدین ترتیب، زمان حرکت این قطارها می‌تواند ۰/۰، ۰/۱، ۰/۲، ...، ۲۳/۹ باشد. در طول مسیر بین دو شهر به تعداد S گذرگاه جنبی وجود دارد که در گذرگاه شماره i ، a_i قطارباری جای می‌گیرند (i=1,2,...S). زمان حرکت قطارباری بین گذرگاه i و i+1 برابر با t_i ساعت است (زمان حرکت بین مبداء و گذرگاه اول t_0 و بین آخرین گذرگاه و مقصد t_s فرض می‌شود). یک قطار باری وقتی که به یک گذرگاه می‌رسد می‌تواند یا توقف کند و یا از آن عبور نماید، مشروط بر اینکه تا قبل از رسیدن به گذرگاه بعدی قطار مسافری به آن نرسد. ضمناً چنانچه در گذرگاههای بعدی محلی برای توقف باقی نمانده باشد، قطارباری باید در همان گذرگاهی که هست توقف نماید تا قطار مسافری عبور نماید.

این مسئله را به صورت یک مسئله بیشترین جریان فرموله کنید. برای این کار هر گره و همچنین گره‌های مبداء و مقصد، شاخه‌ها و ظرفیت عبور جریان در آنها را برای شبکه‌ای که بیانگر این مسئله باشد تعریف نمائید (راهنمائی: برای هر کدام از ۲۴۰ زمان حرکت یک مجموعه مختلف از گره‌ها را به کار ببرید).

۱۱- شبکه پروژه زیر را در نظر بگیرید، فرض کنید زمان لازم برای اجرای هر فعالیت (برحسب هفته) روی شاخه مربوط به آن، مشخص شده است. زودترین زمانها، دیرترین زمانها، فرجه هر واقعه و همچنین مسیر بحرانی را مشخص نمائید.



۱۲- شبکه پروژه زیر را در نظر بگیرید. زمان لازم (برحسب روز) برای انجام هر فعالیت ثابت فرض می‌شود و روی شاخه مربوط به آن فعالیت نشان داده شده است



زودترین زمان، دیرترین زمان، فرجه هرواقعه و هر فعالیت را به دست آورید. مسیر بحرانی را نیز مشخص کنید.

۱۳- برای طبخ غذائی موسوم به «لازانیا» فعالیتهای لازم، مدت زمان اجرای هر فعالیت و پیش‌نیاز هر فعالیت به شرح جدول زیر است

شماره فعالیت	فعالیت	زمان لازم (دقیقه)	فعالیت پیش‌نیاز
۱	خرید پنیر	۳۰	—
۲	رنده کردن پنیر	۵	۱
۳	بهم‌زدن تخم‌مرغها	۲	—
۴	مخلوط کردن تخم‌مرغهاوادویه	۳	۳
۵	خرد کردن پیاز و قارچ	۷	—
۶	تهیه سوس مخصوص گوجه‌فرنگی	۲۵	۵
۷	جوشانیدن آب	۱۵	—
۸	جوشانیدن ورقه‌های لازانیا	۱۰	۷
۹	آب کش کردن ورقه‌های لازانیا	۲	۸
۱۰	قراردادن‌مواد مختلف در بین ورقه‌های لازانیا درظرف	۱۰	۹،۶،۴،۲
۱۱	گرم کردن فراجاق گاز	۱۵	—
۱۲	پخت لازانیا	۳۰	۱۱،۱۰

الف- با رسم شبکه پروژه به شکل یک سیستم پرت گونه، این مسئله را فرموله کنید. شروع همزمان فعالیتهای اولیه را به عنوان یک واقعه نشان دهید.

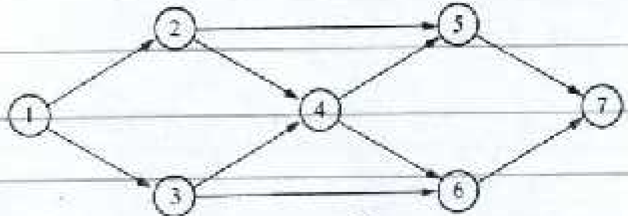
ب- زودترین زمان، دیرترین زمان و فرجه هر واقعه و فعالیت را به دست آورید. مسیر بحرانی را مشخص کنید.

ج- یک مکالمه تلفنی به مدت ۶ دقیقه درابتدای‌فعالیت خرد کردن پیاز و قارچ، باعث توقف آن فعالیت شده است. این کار طبخ غذا را چه مدت به تأخیر

می‌اندازد؟ حال اگر برای خرد کردن پیاز و قارچ از خرد کن برقی استفاده شود مدت زمان این فعالیت از ۷ دقیقه به ۲ دقیقه کاهش می‌یابد. آیا باز هم طبخ غذا به تأخیر می‌افتد؟

۱۴- برآوردهای خوش‌بینانه، محتمل‌ترین و بدبینانه فعالیتی در یک شبکه پرت، به ترتیب ۳۰، ۳۶ و ۴۸ روز است. میانگین و واریانس زمان اجرای این فعالیت چقدر است؟

۱۵- شبکه پروژه زیر را در نظر بگیرید



با استفاده از روش پرت سه‌زمانه، میانگین و واریانس اجرای هرفعالیت (برحسب ماه) به شرح جدول زیر آمده است.

فعالیت	میانگین	واریانس
۱-۲	۴	۵
۱-۳	۶	۱۰
۲-۴	۴	۸
۲-۵	۸	۱۲
۳-۴	۳	۶
۳-۶	۷	۱۴
۴-۵	۵	۱۲
۴-۶	۳	۵
۵-۷	۵	۸
۶-۷	۵	۷

فعالیت	زمان‌عادی	زمان‌ضربتی	هزینه‌زمان‌عادی	هزینه‌زمان‌ضربتی
٤−٧	٧	٥	٢٤٠٠	٢٧٠٠
٥−٧	٥	٣	٢١٠٠	٢٥٠٠
٦−٨	٧	٤	٩٣٠٠	٩٩٠٠
٧−٩	٨	٦	٤٦٠٠	٤٩٠٠
٨−١٠	٩	٦	٢٣٠٠	٢٨٠٠
٩−١١	٤	٣	١٩٠٠	٢١٠٠
٩−١٢	٥	٣	٢٨٠٠	٣٣٠٠
١٠−١٣	٢	١	١٣٠٠	١٨٠٠
١٢−١٣	٦	٣	٣٦٠٠	٤٣٠٠

فصل هشتم

برنامه‌ریزی پویا

در بسیاری از مسائل، که در آنها رشته‌ای از تصمیمهای مرتبط با یکدیگر مطرح باشد، غالباً از **برنامه‌ریزی پویا**[1] **که‌ماهیتاً روشی‌ریاضی‌است استفاده‌می‌شود.** این برنامه‌ریزی با به کارگیری فرایندی نظام‌گرا[2] ترکیبی از تصمیمهای متوالی را تعیین می‌کند که به حداکثر شدن کارآئی کلی[3] منتهی شود.

برخلاف برنامه‌ریزی خطی، چارچوب استانداردی برای فورموله کردن مسائل برنامه‌ریزی پویا وجود ندارد. در واقع، آنچه برنامه‌ریزی پویا انجام می‌دهد ارائه روش برخورد کلی، جهت حلّ این نوع مسائل است. در هر مورد، باید معادلات و روابط ریاضی مخصوصی که با شرایط آن مسئله تطبیق نماید نوشته شود. از این رو، برای آنکه بتوان تشخیص داد که آیا اصولاً می‌توان مسئله‌ای را با برنامه‌ریزی پویا حل کرد و اگر می‌شود، راه حلّ آن چگونه است، ضرورت دارد که ساختار کلی مسائل برنامه‌ریزی پویا شناخته شود و علاوه بر آن، به‌خلاقیت نیز تاحدی احتیاج است. آشنائی با انواع کاربردهای‌برنامه‌ریزی پویا و بررسی ویژگیهای مشترک آنها، احتمالاً می‌تواند به رشد

1) *Dynamic Programming* 2) *Systematic Procedure*
3) *Overall Effectiveness*

فعالیت	زمان‌عادی	زمان‌ضربتی	هزینه‌زمان‌عادی	هزینه‌زمان‌ضربتی
٤−٧	٧	٥	٢٤٠٠	٢٧٠٠
٥−٧	٥	٣	٢١٠٠	٢٥٠٠
٦−٨	٧	٤	٩٣٠٠	٩٩٠٠
٧−٩	٨	٦	٤٦٠٠	٤٩٠٠
٨−١٠	٩	٦	٢٣٠٠	٢٨٠٠
٩−١١	٤	٣	١٩٠٠	٢١٠٠
٩−١٢	٥	٣	٢٨٠٠	٣٣٠٠
١٠−١٣	٢	١	١٣٠٠	١٨٠٠
١٢−١٣	٦	٣	٣٦٠٠	٤٣٠٠

فصل هشتم

برنامه‌ریزی پویا

در بسیاری از مسائل، که در آنها رشته‌ای از تصمیمهای مرتبط با یکدیگر مطرح باشد، غالباً از **برنامه‌ریزی پویا**[1] **که ماهیتاً روشی ریاضی است استفاده می‌شود.** این برنامه‌ریزی با به کارگیری فرایندی نظام‌گرا[2] ترکیبی از تصمیمهای متوالی را تعیین می‌کند که به حداکثر شدن کارآئی کلی[3] منتهی شود.

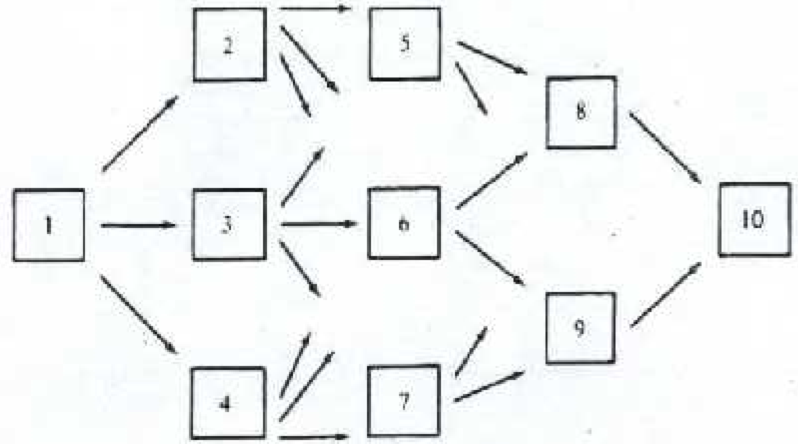
برخلاف برنامه‌ریزی خطی، چارچوب استانداردی برای فورموله کردن مسائل برنامه‌ریزی پویا وجود ندارد. در واقع، آنچه برنامه‌ریزی پویا انجام می‌دهد ارائه روش برخورد کلی، جهت حلّ این نوع مسائل است. در هر مورد، باید معادلات و روابط ریاضی مخصوصی که با شرایط آن مسئله تطبیق نماید نوشته شود. از این رو، برای آنکه بتوان تشخیص داد که آیا اصولاً می‌توان مسئله‌ای را با برنامه‌ریزی پویا حل کرد و اگر می‌شود، راه حلّ آن چگونه است، ضرورت دارد که ساختار کلی مسائل برنامه‌ریزی پویا شناخته شود و علاوه بر آن، به‌خلاقیت نیز تاحدی احتیاج است. آشنائی با انواع کاربردهای برنامه‌ریزی پویا و بررسی ویژگیهای مشترک آنها، احتمالاً می‌تواند به رشد

1) *Dynamic Programming* 2) *Systematic Procedure*
3) *Overall Effectiveness*

چنین توانائیهائی کمک کند. برای نیل به این مقصود، چندین مثال تشریحی در این فصل ارائه می‌گردد.

۱ـ۸ مثال نوعی

برای نشان دادن ویژگیهای برنامه‌ریزی پویا و معرفی واژه‌های متداول آن، مسئله‌ای طرح شده است که در آن فروشنده‌ای فرضی باید مسیر طولانی و ناامنی را بپیماید. اگرچه مبداء و مقصد سفر معین است، اما چون فروشنده می‌تواند از ایالتهای مختلفی عبور کند، لذا مسیرهای متعددی را در پیش رو دارد. مسیرهای ممکن در شکل ۱ ـ ۸ نشان داده شده است که هر مربع آن نشان دهنده یک ایالت است. از ایالت ۱ که مبداء مسافرت است تا ایالت ۱۰ که مقصد نهائی است، از چهار مرحله باید گذشت.



شکل ۱ـ۸ شبکه راههای مسئله فروشنده

این فروشنده که شخص باتجربه و دنیادیده‌ای است ازناامن بودن جاده‌ها کاملاً آگاهی دارد. برای انتخاب مطمئن‌ترین مسیر، فکری به ذهنش رسیده است. او می‌داند

که شرکتهای بیمه برای هر قسمت از مسیر، بیمه نامه‌هائی به مسافرین پیشنهاد می‌کنند. چون قیمت این بیمه‌ها با بررسی دقیق ایمنی هر جاده و متناسب با خطرات موجود در

آن ارزیابی شده است، بنابراین مسیری از همه امن‌تر است که قیمت بیمه آن از همه مسیرها ارزانتر باشد.

هزینه بیمه از ایالت i به ایالت j که با c_{ij} نشان داده می‌شود به شرح زیر است

	2	3	4
1	2	4	3

	5	6	7
2	7	4	6
3	3	2	4
4	4	1	5

	8	9
5	1	4
6	6	3
7	3	3

	10
8	3
9	4

هزینه بیمه کدام مسیر ارزانتر است؟

حل ابتدا توجهتان را به این موضوع جلب می‌کنیم که اگر در هر مرحله، ارزانترین مسیر را برای رسیدن به مرحله بعدی انتخاب کنیم همه جوانب را ندیده‌ایم. با اتخاذ چنین سیاستی، مسیر $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10$ انتخاب خواهد شد. لیکن، دوراندیشی بیشترامکان صرفه‌جوئی بیشتری را در مراحل بعدی میسر می‌سازد. به عنوان مثال، مسیر $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6$ کلاً از $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6$ ارزانتر است، هرچند که هزینه اولین مرحله آن قدری گرانتر باشد.

یک روش حلِ این مسائل استفاده از سعی و خطاست[1]، اما به علت زیاد بودن تعداد مسیرهای ممکن (جمعاً ۱۸ مسیر) محاسبه هزینه‌های کلی همه مسیرها کاری طولانی و طاقت‌فرسا خواهد بود.

خوشبختانه، راه حلی که برنامه‌ریزی پویا ارائه می‌نماید، از حجم محاسبات به مقدار قابل توجهی می‌کاهد (حتی در مسئله‌ای به همین شکل نیز که ابعاد آن قدری

۱) این مسئله را با الگوریتم کوتاهترین مسیر نیز می‌توان حل کرد. روش حلی که در فصل هفتم (شبکه‌ها) ارائه شد درواقع ازمنطق برنامه‌ریزی پویا استفاده می‌کند. لیکن، چون تعداد مراحل این مسئله عدد ثابتی است، لذا روش برنامه‌ریزی پویا بهتر است.

بزرگتر باشد صرفه‌جویی در محاسبات قابل ملاحظه است). برنامه‌ریزی پویا، از یک جزء کوچک مسئله شروع نموده، جواب بهینه همان جزء را بدست می‌آورد. آنگاه، به تدریج این مسئله کوچک را بزرگتر کرده جواب بهینه آنرا با بهره گیری از جواب بهینه قبلی پیدا می‌کند، تا سرانجام جواب بهینه مسئله اصلی بدست آید. جزئیات این راه حل کلی به شرح زیر خلاصه می‌شود.

فرض کنید که در مرحله n ، مقصد بعدی را با $x_n \ (n = 1,2,3,4)$ نشان دهیم. x_n ها متغیرهای تصمیم مسئله هستند بدین ترتیب، مسیری که انتخاب می‌شود $I \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4$ است، که در اینجا، $x_4 = 10$، خواهد بود. اگر فروشنده مورد نظر، در ابتدای مرحله n ، در ایالت s باشد و x_n را به عنوان مقصد بعدی انتخاب کند، در این صورت، فرض می‌شود که $f_n(s,x_n)$ معرف حداقل کل هزینه بیمه مسیر باقی مانده سفر او باشد. با توجه به اینکه n و s معلوم هستند، لذا مقدار حداقل تابع $f_n(s,x_n)$ بازاء x_n^* بدست می‌آید. حداقل این تابع را با $f_n^*(s)$ نشان می‌دهیم. بدین ترتیب $f_n^*(s) = f_n(s,x_n^*)$ است. هدف مسئله، تعیین $f_1^*(1)$ و مسیر مربوط به آن است. برنامه‌ریزی پویا با محاسبه $f_4^*(s)$, $f_3^*(s)$ ، $f_2^*(s)$ و سرانجام $f_1^*(s)$ [2] به این مقصود دست می‌یابد.

موقعی که تنها یک مرحله از سفر این فروشنده باقی مانده باشد[1] ؛چون مقصد نهائی معلوم است لذا، مسیر باقیمانده سفرش کاملاً مشخص خواهد بود. بنابراین، جواب مسئله یک مرحله‌ای را می‌توان بلافاصله از جدول زیر بدست آورد

$n = 4$

s	$f_4^*(s)$	x_4^*
8	3	10
9	4	10

۱) چون در این روش مرحله به مرحله به عقب حرکت می کنیم، لذا در بعضی از کتابها n معرف تعداد مراحل باقیمانده است.

اگر دو مرحله از سفر این فروشنده باقی مانده باشد، جواب آن نیز با مختصر محاسبه‌ای به دست می‌آید. به عنوان مثال، فرض کنید، فروشنده در ایالت ۵ باشد. از آنجا، او می‌تواند به ایالت ۸ یا ۹ برود که هزینه بیمه آنها به ترتیب ۱ و ٤ است. اگر تصمیم بگیرد که ازطریق ایالت ۸ برود، بعد از رسیدن به آنجا طبق جدول فوق **حداقل هزینه‌ای که برای بقیه سفرش باید متحمل شود، برابر با $f_4^*(8) = 3$ است. در نتیجه، کل هزینه ناشی از این تصمیم ٤ = ۱+۳ خواهد بود. به همین ترتیب، کل هزینهٔ ناشی از انتخاب ایالت ۹ برابر ۸ = ٤+٤ است. لذا، ایالت ۸ انتخاب می‌شود، یعنی $x_3^* = 8$ این تصمیم به حداقل هزینه کل، $f_3^*(5) = 4$ منجر می‌شود. اگر همین روش را برای ایالتهای ۶ و ۷ نیز دنبال کنیم، نتایج مسئله دو مرحله‌ای به شرح جدول زیر بدست می‌آید.**

$n = 3$

s \ x_3	$f_3(s,x_3) = c_{sx_3} + f_4^*(x_3)$: 8	9	$f_3^*(s)$	x_3^*
5	4	8	4	8
6	9	7	7	9
7	6	7	6	8

جواب مسئله سه مرحله‌ای نیز به همین ترتیب پیدا می‌شود. در این حال،

$$f_2(s,x_2) = c_{sx_2} + f_3^*(x_2)$$

به عنوان مثال، اگر این فروشنده، به ایالت ۲ رسیده باشد و از آنجا به مقصد ایالت ۵ حرکت کند، **حداقل هزینه $f_2(2,5)$ برابر با هزینه همان مرحله، یعنی $c_{25} = 7$ باضافه حداقل هزینه مسافرت ازایالت ۵ تا مقصد نهائی، یعنی $f_3^*(5) = 4$ است. به این ترتیب، $f_2(2,5) = 7 + 4 = 11$ خواهد بود. با روشی مشابه، $f_2(2,6) = 4 + 7 = 11$ و $f_2(2,7) = 6 + 6 = 12$ است. در نتیجه، حداقل هزینه کل از ایالت ۲ تا مقصد نهائی $f_2^*(2) = 11$ و مقصد بعدی که انتخاب می‌شود $x_2^* = 5$ یا 6 خواهد بود.**

نتایج کامل مسئله سه مرحله‌ای در جدول زیر نشان داده شده است.

$n = 2$

s \ x_2	$f_2(s,x_2) = c_{sx_2} + f_3^*(x_2)$: 5	6	7	$f_2^*(s)$	x_2^*
2	11	11	12	11	5 یا 6
3	7	9	10	7	5
4	8	8	11	8	5 یا 6

اکنون به مسئله چهار مرحله‌ای می‌پردازیم. در اینجا نیز با معلوم بودن مقصد بعدی، هزینه بهینه عبارت از مجموع هزینه این مرحله به اضافه حداقل هزینه مراحل بعدی است. نتایج حاصل، در جدول زیر نشان داده شده است.

$n = 1$

s \ x_1	$f_1(s,x_1) = c_{sx_1} + f_2^*(x_1)$: 2	3	4	$f_1^*(s)$	x_1^*
1	13	11	11	11	3 یا 4

اکنون دیگر می‌توان جواب بهینه را مشخص کرد. نتایج مسئله چهار مرحله‌ای نشان می‌دهد که فروشنده ابتداء باید به یکی از ایالتهای ۳ و یا ٤ برود. فرض کنید ایالت ۳ را انتخاب کند. در مسئله سه مرحله‌ای، بازاء $s = 3$، جواب بهینه عبارت از $x_2^* = 5$ است. از آنجا به مسئله دو مرحله‌ای می‌رسیم که بازاء $s = 5$ جواب بهینه $x_3^* = 8$ و به همین ترتیب در مسئله یک مرحله‌ای، بازاء $s = 8$، جواب بهینه $x_4^* = 10$ را داریم. در نتیجه، یک مسیر بهینه عبارت از $1 \to 3 \to 5 \to 8 \to 10$ است. اما انتخاب $x_1^* = 4$ در مرحله اول، به دو مسیر بهینه $1 \to 4 \to 5 \to 8 \to 10$ و همچنین $1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10$ منجر می‌گردد. هزینه هم این مسیرها $f_1^*(1) = 11$ است.

در بخش بعدی ملاحظه خواهید کرد که واژه‌های مخصوص این مسئله نظیر مرحله، حالت، وسیاست همگی واژه‌های عمومی برنامه‌ریزی پویا هستند که در مثالهای دیگر نیز به کار می‌آیند.

۲ـ۸ ویژگیهای مسائل برنامه‌ریزی پویا

مسئله فروشنده فرضی که مطرح شده، مثالی نوعی از مسائل برنامه‌ریزی پویاست. در واقع، در طراحی این مسئله، به جای بررسی ساختار صرفاً ریاضی مسائل برنامه‌ریزی پویا، تعبیر فیزیکی آگاهانه‌ای ارائه گردید[1]. بنابراین، یکی از راههای تشخیص این که آیا مسئله‌ای را می‌توان به شکل یک مسئله برنامه‌ریزی پویا فرموله نمود، مقایسه ساختار اساسی آن با مسئله فروشنده است.

ویژگیهای اساسی مسائل برنامه‌ریزی پویا ذیلاً مورد بحث قرار می‌گیرد.

۱ ــ مسئله را می‌توان به چند مرحله[2] تقسیم کرد. در هر مرحله باید یک تصمیم اتخاذ گردد.

مسئله فروشنده به چهار مرحله، که هر کدام یک قسمت سفر بودند تقسیم شده بود. تصمیمی که در هر مرحله باید گرفته شود انتخاب مقصد بعدی است. سایر مسائل برنامه‌ریزی پویا هم با یک رشته تصمیم‌گیریهای مربوط به هم[3] سروکار دارند.

۲ ــ هرمرحله به تعدادی حالت[4] وابسته است.

در مسئله فروشنده، حالتهای وابسته به هرمرحله؛ ایالتهائی بودند که فروشنده می‌توانست در آن قسمت از سفرش از آنها عبور کند. به طور کلی، حالتها عبارتند از انواع وضعیتهای محتملی که سیستم می‌تواند در آن مرحله داشته باشد. تعداد حالات در هر مرحله می‌تواند متناهی[5] (نظیر مسئله فروشنده) و بینهایت (نظیر مثالهای بعدی) باشد.

۱) در مثال نوعی فوق از لغاتی استفاده شده است که در زبان انگلیسی دارای دو معنا هستند که عبارتند از *State* (هم به معنای حالت و هم به معنای ایالت)، *Stage* (هم به معنای مرحله و هم به معنای دلیجان) و *Policy* (هم به معنای سیاست و هم به معنای بیمه‌نامه) مترجم.

2) *Stage*

3) *A Sequence of Interrelated decisions*

4) *State*

5) *Finite*

۳ – در هرمرحله، با اتخاذ یک تصمیم، حالت مرحله فعلی به حالتی که وابسته به مرحله بعدی باشد **انتقال می‌یابد** (که می‌تواند طبق یک تابع توزیع احتمالی هم باشد).

انتخاب مقصد بعدی در هر مرحله از سفر این فروشنده، ایالتی است که در مرحله بعدی سفر از آنجا عبور می کند (یا حالت مرحله بعد). با در نظر گرفتن این مثال، مسائل برنامه‌ریزی پویا را می‌توان با شبکه‌ها مقایسه کرد. **هر گره**[1]**، معرف یک حالت** است. شبکه شامل ستونهائی از گره‌هاست. **هر ستون معرف یک مرحله‌است**، به طوری که جریان فقط می‌تواند از یک گره به گره بعدی که در ستون سمت راست آن قرار دارد حرکت کند. هرشاخه‌ای که دو گره را به هم متصل کند با عددی مشخص می‌شود که این عدد را می‌توان افزایش تابع هدف ناشی از حرکت از حالتی در یک مرحله به حالتی در مرحله بعدی تعبیر کرد. با در نظر گرفتن چنین تعبیری، هدف مسئله **پیدا کردن کوتاهترین یا بلندترین مسیر شبکه** است.

٤ – با فرض معلوم بودن حالت در یک مرحله، **سیاست بهینه** در مورد مراحل باقیمانده، مستقل از سیاستی است که در مراحل قبلی اتخاذ شده است.

۵ – در مسئله مورد بحث، با فرض معلوم بودن ایالتی که فروشنده در آن قرار دارد، **سیاست بهینه‌ای** که در رابطه با **باقیمانده سفر** باید اتخاذ شود (مسیری که هزینه بیمهٔ آن حداقل باشد)، **مستقل** از مسیری است که تا این مرحله طی شده است. به طور کلی، در مسائل برنامه‌ریزی پویا، دانستن حالت فعلی سیستم، حاوی کلیه اطلاعاتی است که برای تعیین سیاست بهینه مربوط به مراحل باقیمانده مورد نیاز است. به این خاصیت **اصل بهینگی**[2] نیز گفته می‌شود.

۶ – روش حل این مسائل، با پیداکردن **جواب بهینه مربوط به کلیه حالتهای** مرحله آخر آغاز می‌شود.

1) Node

2) Principle of Optimality

۷ – سیاست بهینه همه حالتهای مرحله n را می‌توان با یک رابطه برگشت[1] و با فرض معلوم بودن سیاست بهینه تمام حالتهای مرحله $(n+1)$ مشخص ساخت.

در رابطه با مسئله فروشنده، چنین رابطه برگشتی عبارتست از

$$f_n^*(s) = \min_{x_n} \{c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n)\}$$

بنابراین، اگر سیستم در مرحله n و حالت s باشد، باید مقدار x_n که بازاء آن، رابطه فوق حداقل می‌شود را بدست آورد. بر اساس سیاست بهینه، با استفاده از این مقدار x_n حالت سیستم در مرحله $(n+1)$ معلوم خواهد شد.

در مسائل مختلف برنامه‌ریزی پویا، شکل دقیق معادله برگشت تا حدی تغییر می کند، لیکن در همه آنها از قراردادی شبیه آنچه که در بخش قبلی ارائه شد، استفاده می‌شود. فرض کنید x_n (یا بردار x_n) متغیر تصمیم در مرحله n باشد، $(n=1,2,.........N)$. اگر در مرحله n و در حالت s، متغیر تصمیم x_n انتخاب شده باشد، در این صورت $f_n(s,x_n)$ نشان دهنده حداکثر (یا حداقل) تابع هدف خواهد‌بود، یعنی در مورد مسئله فروشنده این رابطه عبارتست از $f_n(s,x_n) = c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n)$ حداکثر (یا حداقل) مقدار $f_n(s,x_n)$ بازاء تمام مقادیر x_n را با $f_n^*(s)$ نشان می‌دهیم. رابطه برگشت همیشه به شکل زیر خواهد بود

$$f_n^*(s) = \max_{x_n} \{f_n(s,x_n)\}$$

یا

$$f_n^*(s) = \min_{x_n} \{f_n(s,x_n)\}$$

است که $f_n(s,x_n)$ برحسب s و x_n و $f_{n+1}^*(\cdot)$ نوشته می‌شود.

۸ – روش حل، با حرکت پس‌رو[2] و با استفاده از چنین رابطه برگشتی، از

1) Recursive Relationship

2) Backward

مرحله‌ای به مرحله قبل، اعمال می‌شود. در هر مرحله، سیاستهای بهینه در رابطه با تمام حالت‌های آن مرحله، مشخص می‌گردد. تا سرانجام سیاست بهینه اولین مرحله تعیین شود.

با به‌کارگیری این روش در مورد مسئله فروشنده، سیاست بهینه برای مراحل ۴ و ۳ و ۲ و ۱ به ترتیب بدست آمد . در همه مسائل برنامه‌ریزی پویا، برای هر مرحله باید جدولی شبیه جدول زیر، محاسبه شود.

s	$f_n^*(s)$	x_n^*

موقعی که سرانجام برای مرحله اول هم چنین جدولی بدست آید، مسئله مورد نظر حل شده است. چون در مرحله اول حالت سیستم معلوم است، لذا در این مرحله، تصمیم بهینه، که با x_1^* نشان داده می‌شود، مشخص می‌گردد. مقدار بهینه سایر متغیرهای تصمیم نیز به ترتیب از جداول دیگر و با توجه به حالت سیستم که از مراحل قبلی بدست می‌آید، مشخص خواهد شد.

۳–۸ برنامه‌ریزی پویای قطعی

در این بخش از رویکردهای حل مسائل برنامه‌ریزی پویای قطعی[2] (غیراحتمالی) بحث می‌شود. درچنین مواردی، با معلوم بودن حالت و متغیر تصمیم هر مرحله، حالت مرحله بعد کاملاً مشخص خواهد شد. در حالی که در مورد مسائل احتمالی که در بخش

۱) در واقع در مورد این مسئله، رویه حل می توانست هم به صورت یک حرکت پس‌رو و هم پیش‌رو *Forward* باشد، لیکن در مورد بسیاری از مسائل (به خصوص موقعی که مرحله در رابطه با زمان باشد) حتماً باید از حرکت پس‌رو استفاده شود.

2) *Deterministic Dynamic Programming*

بعدی مورد بحث قرار می‌گیرد، حالت مرحله بعد دقیقاً مشخص نیست، اما تابع توزیع احتمالی، برای هر حالت معلوم است.

برنامه‌ریزی پویای قطعی به طور شماتیک در شکل ۳–۸ نشان داده شده‌است.

شکل ۳–۸ ساختار اساسی مسئله برنامه‌ریزی پویای قطعی

در مرحله n ، فرایند در حالتی مانند s_n است. با اتخاذ تصمیم x_n فرایند به حالت s_{n+1} در مرحله $n+1$ انتقال پیدا خواهد کرد. مقدار تابع هدف بر اساس سیاست بهینه، برای آن مرحله و مراحل بعدی، یعنی $f_{n+1}^*(s_{n+1})$ قبلاً محاسبه شده است. متغیر تصمیم x_n نیز سهمی در تابع هدف خواهد داشت. چنانچه این دو کمیت با یکدیگر ترکیب شوند، آنگاه مقدار $f_n(s_n, x_n)$ در ابتدای مرحله n مشخص می‌گردد. اگر این تابع را نسبت به x بهینه نمائیم در این صورت، $f_n^*(s_n) = f_n(s_n, x_n^*)$ است بعد از آنکه چنین محاسباتی بازاء تمام مقادیر محتمل s_n، در این مرحله انجام شد، به یک مرحله قبل می‌رویم.

یکی از روشهای طبقه‌بندی مسائل برنامه‌ریزی پویای قطعی، برحسب شکل تابع هدف است. به عنوان مثال، ممکن است هدف مسئله، حداقل (یا حداکثر) کردن مجموع سهم مراحل مختلف باشد. در مسائلی دیگر، ممکن است هدف حداقل نمودن حاصلضرب چنین عباراتی باشد. یک طبقه‌بندی دیگر برحسب ماهیت مجموعه حالات مراحل مختلف صورت می‌گیرد. بدین معنا که ممکن است حالت s یا متغیری گسسته (نظیر مسئله فروشنده)، یا متغیری پیوسته و یا متغیری برداری (بیش از یک متغیر) باشد.

برای نشان دادن نمونه‌های مختلف، چندمثال ارائه خواهد شد. نکته مهمی که باید در تمام این مثالها در نظر داشت این است که با وجود تفاوتهای ظاهری قابل

ترجیحی که مشاهده می‌شود روش حل آنها ماهیتاً یکسان است. (اگرچه محاسبات متفاوت هستند)، زیرا ساختار اساسی همگی آنها با شکل ۲ــ۸ تطابق دارد.

هرچند شکل مسئله بعدی با مثال فروشنده کاملاً متفاوت است، لیکن به استثنای تابع هدف که در اینجا باید حداکثر شود، کلاً دارای همان **چارچوب ریاضی** است.

مثال ۲ سازمان جهانی بهداشت به منظور بهبود بهداشت و آموزش پزشکی در کشورهای جهان سوم در نظر دارد که ۵ **گروه پزشکی** خود را به سه کشور اعزام نماید. این سازمان باید تعیین کند به هر کشور چند گروه اختصاص دهد تا کارائی کل پنج گروه حداکثر شود. معیار سنجش کارآئی[1] گروهها، افزایش طول عمر جمعیت کشورها بر حسب نفر سال است (در مورد هر کشور این معیار برابر با حاصلضرب جمعیت آن کشور در میانگین افزایش طول عمر سرانه است). برآورد افزایش طول عمر جمعیت این سه کشور (با ضریب ۱۰۰۰)، برحسب تعداد گروههای پزشکی که به آنها اختصاص می‌یابد، در جدول ۱ــ۸ نشان داده شده است.

جدول ۱ــ۸ اطلاعات مربوط به مسئله سازمان جهانی بهداشت

تعداد گروههای پزشکی	افزایش طول عمر (نفر ـ سال) کشور		
	1	2	3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130

1) *Effectiveness*

حل در این مسئله سه **تصمیم** مرتبط با یکدیگر باید اتخاذ گردد که عبارتند از اینکه به هر کشور چند گروه پزشکی اختصاص داده شود. از این رو، در فرموله کردن، هر کشور را می توان یک مرحله برنامه‌ریزی پویا نامید و ترتیب آنها نیز مهم نیست. متغیر تصمیم x_n معرف تعداد گروههای پزشکی است که به کشور n اختصاص می‌یابد.

در نگاه اول ممکن است هویت حالتها چندان مشخص نباشد. لیکن، برای تعیین آن می‌توان سئوالاتی از این دست را مطرح ساخت. از یک مرحله به مرحله بعد چه عاملی تغییر می کند؟ اگر تصمیم‌های اتخاذ شده در مراحل قبلی معلوم باشد، چگونه می توان وضعیت فعلی سیستم را تشریح کرد؟ برای تعیین سیاست بهینه از این مرحله به بعد چه اطلاعاتی در رابطه با حالت لازم است؟ بر اساس سئوالهای فوق، انتخاب مناسب برای «حالت سیستم» عبارتست از تعداد گروههای پزشکی که می توان برای این مرحله و مراحل بعد تخصیص داد (یا به عبارت دیگر، تعداد گروههائی که در مراحل قبلی هنوز تخصیص نیافته‌اند).

فرض کنید $p_i(x_i)$ معیار سنجش کارآئی ناشی از تخصیص x_i تیم پزشکی به کشور i باشد، که در جدول ۱ــ۸ نشان داده شده است. بنابراین، هدف تعیین x_1 و x_2 و x_3 است به طوری که

$$\text{Maximize} \quad \sum_{i=1}^{3} p_i(x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 5$$

x_i عدد صحیح و غیرمنفی

با استفاده از قراردادهائی که در بخش ۲ــ۸ ارائه شد، $f_n(s_n, x_n)$ (بازاء ۱،۲،۳،۴ $n=$) عبارتست از

$$f_n(s, x_n) = p_n(x_n) + \text{maximum} \sum_{i=n+1}^{3} p_i(x_i)$$

به طوری که $\sum_{i=n}^{3} x_i = s$ و x_i متغیرهای عدد صحیح غیرمنفی هستند. علاوه بر این،

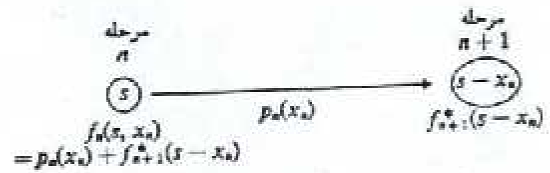
$$f_n^*(s) = \max_{x_n=0,1,\dots,s} f_n(s,x_n)$$

بنابراین،

$$f_n(s,x_n) = p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s - x_n)$$

(که f_4^* بر حسب تعریف صفر است). روابط اساسی بین اجزاء مسئله در شکل ۳-۸ نشان داده شده است.

حالت:



شکل ۳-۸ ساختار اساسی مسئله سازمان بهداشت جهانی

در نتیجه، رابطه برگشت مربوط به توابع f_1^*، f_2^* و f_3^* این مسئله عبارتست از

$$f_n^*(s) = \max_{x_n=0,1,\dots,s} \{p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s - x_n)\}, \qquad \text{بازاء } n = 1,2$$

در مرحله آخر $(n=3)$

$$f_3^*(s) = \max_{x_3=0,1,\dots,s} p_3(x_3)$$

نتایج محاسبات برنامه‌ریزی پویا که از مرحله آخر، $(n=3)$، شروع می‌شود و با حرکت پس رو به مرحله شروع، $(n=1)$، می‌رسد در زیر آمده است.

$n = 3$

s	$f_3^*(s)$	x_3^*
0	0	0
1	50	1
2	70	2
3	80	3
4	100	4
5	130	5

$n = 2$

$s \backslash x_2$	$f_2(s,x_2) = p_2(x_2) + f_3^*(s - x_2)$: 0	1	2	3	4	5	$f_2^*(s)$	x_2^*
0	0						0	0
1	50	20					50	0
2	70	70	45				70	0 یا 1
3	80	90	95	75			95	2
4	100	100	115	125	110		125	3
5	130	120	125	145	160	150	160	4

$n = 1$

$s \backslash x_1$	$f_1(s,x_1) = p_1(x_1) + f_2^*(s - x_1)$: 0	1	2	3	4	5	$f_1^*(s)$	x_1^*
5	160	170	165	160	155	120	170	1

به این ترتیب $x_1^* = 1$ جواب بهینه مرحله ۱ است. با در نظر گرفتن این جواب، حال سیستم در مرحله دوم به $s = 5 - 1 = 4$ می‌رسد و جواب بهینه آن $x_2^* = 3$ است. به همین ترتیب، مرحله سوم به $s = 4 - 3 = 1$ و جواب بهینه $x_3^* = 1$ منتهی می‌گردد. از آنجا که $f_1^*(5) = 170$ است، لذا تخصیص گروههای پزشکی به صورت (۱،۳،۱) باعث افزایش طول عمر اهالی این سه کشور و مجموعاً

محتوای مثال بعدی تا حدی شبیه مثال قبلی است، لیکن فرمول ریاضی متفاوتی دارد. در این مثال، هدف مسئله حداقل کردن حاصلضرب‌های عبارات مربوط به مراحل مختلف است. در نگاه اول شاید تصور شود که این مثال در زمره برنامه‌ریزی پویای قطعی نیست، چون با احتمالات سروکار دارد. لیکن این مثال هم با تعریف ما

تطبیق می‌کند زیرا حالت سیستم را در هر مرحله می توان با آگاهی از حالت مرحله قبلی و متغیر تصمیم، کاملاً مشخص ساخت.

مثال ۳ دریک پروژه‌فضائی، تحقیقاتی به منظور حل یک مسئله فنی در جریان است. در حال حاضر، سه گروه تحقیقاتی بر روی این مسئله کار می کنند. احتمال اینکه این گروهها، که آنها را ۱ و ۲ و ۳ می نامیم، موفق به پیدا کردن جواب نشوند به ترتیب ۰/۴، ۰/۶ و ۰/۸ برآورد شده است. بنابراین، احتمال اینکه همه گروهها شکست بخورند (۰/۸) (۰/۶) (۰/۴) یا ۰/۱۹۲ خواهد بود. از آنجا که هدف، حداقل کردن این احتمال است، لذا تصمیم گرفته شده است که دو دانشمند دیگر به این گروهها اضافه شوند تا احتمال شکست حتی‌المقدور کاهش یابد.

احتمال شکست این گروهها، با فرض اینکه ۱ و ۲ دانشمند جدید به آنها ملحق شود، در جدول ۲-۸ نشان داده شده است. می خواهیم تعیین کنیم که این دو دانشمند به کدام گروه ملحق گردند تا احتمال شکست همه گروهها به حداقل برسد.

جدول ۲-۸ اطلاعات مربوط به مسئله پروژه فضائی

تعداد دانشمند جدید	احتمال شکست — گروه ۱	گروه ۲	گروه ۳
۰	۰/۴	۰/۶	۰/۸
۱	۰/۲	۰/۴	۰/۵
۲	۰/۱۵	۰/۲	۰/۳

حل ساختار کلی این مسئله، شبیه مسئله ۲ است. در اینجا، دانشمندان جایگزین گروههای پزشکی و گروههای تحقیقاتی جایگزین کشورها شده‌اند. بنابراین در این

مسئله با تخصیص دانشمندان به گروههای تحقیقاتی به جای تخصیص گروههای پزشکی به کشورها روبرو هستیم. تفاوت عمده این دو مسئله در تابع هدف آنهاست.

از آنجا که هم تعداد دانشمندان و هم تعداد گروههای تحقیقاتی اندک است، لذا می‌توان مسئله را مستقیماً و بدون استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل نمود. لیکن، چون هدف اصلی آموزش برنامه‌ریزی پویاست لذا مسئله را از این راه حل می کنیم.

دراینجا، گروههای‌تحقیقاتی‌رامرحله و تعداد دانشمندانی که هنوز به گروهی تخصیص نیافته‌اند را حالت s می‌نامیم. متغیر تصمیم x_n $(n = 1,2,3)$ عبارت است از تعداد دانشمندی که به مرحله (گروه تحقیقاتی) n اختصاص داده می‌شود. اگر تعداد x_i دانشمند به گروه i تخصیص یافته باشد، احتمال شکست آنرا با $p_i(x_i)$ نشان می‌دهیم، که در جدول ۲-۸ نشان داده شده است. ($\prod$ معرف حاصلضرب است) هدف پروژه انتخاب x_1 و x_2 و x_3 است به طوری که

$$\text{Minimize} \quad \prod_{i=1}^{3} p_i(x_i) = p_1(x_1)p_2(x_2)p_3(x_3)$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 2$$

و x_i ها اعداد صحیح غیرمنفی هستند.

نتیجتاً بازاء $n = 1,2,3,$

$$f_n(s,x_n) = p_n(x_n) \cdot \text{minimum} \prod_{i=n+1}^{3} p_i(x_i)$$

$$\sum_{i=n}^{3} x_i = s$$

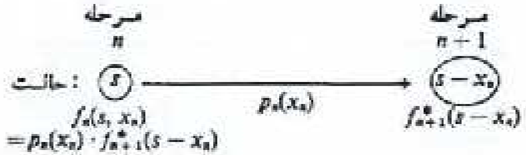
به این ترتیب

$$f_n^*(s) = \min_{x_n \le s} f_n(s,x_n)$$

بنابراین

$$f_n(s,x_n) = p_n(x_n)\cdot f^*_{n+1}(s-x_n)$$

که f_4^* طبق تعریف برابر با یک است. خلاصهٔ این روابط در شکل ٤–٨ نشان داده شده است.



شکل ٤–٨ ساختار اساسی مسئله پروژه فضایی

به این ترتیب، در این مسئله **معادله برگشت** که روابط بین توابع f_1^* و f_2^* و f_3^* را تعیین می‌کند عبارتست از

$$f_n^*(s) = \min_{x_n \le s}\{p_n(x_n)\cdot f^*_{n+1}(s-x_n)\} \qquad n=1,2 \ \text{بازاء}$$

و موقعی که $n=3$ باشد،

$$f_3^*(s) = \min_{x_3 \le s} p_3(x_3)$$

نتایج محاسبات برنامه‌ریزی پویا به شرح زیر است:

$n=3$

s	$f_3^*(s)$	x_3^*
0	0.80	0
1	0.50	1
2	0.30	2

$n=2$

$s \backslash x_2$	$f_2(s,x_2)=p_2(x_2)\cdot f_3^*(s-x_2)$: 0	1	2	$f_2^*(s)$	x_2^*
0	0.48			0.48	0
1	0.30	0.32		0.30	0
2	0.18	0.20	0.16	0.16	2

$n=1$

$s \backslash x_1$	$f_1(s,x_1)=p_1(x_1)\cdot f_2^*(s-x_1)$: 0	1	2	$f_1^*(s)$	x_1^*
2	0.064	0.060	0.072	0.060	1

بنابراین در مرحله ۲، جواب بهینه $x_1^*=1$ به $s=1$ منتهی می‌شود، که در نتیجه $x_2^*=0$ خواهد بود. این جواب نیز به نوبه خود به $s=1$ و $x_3^*=1$ منتهی می‌گردد. به این ترتیب، به گروههای ۱ و ۳ هرکدام یک دانشمند تخصیص می‌یابد. در این شرایط احتمال شکست هر سه تیم به ۰/۰۶ می‌رسد.

متغیر حالت s در هر سه مثال فوق گسسته بود. علاوه بر این، رویه حل نیز در همه آنها دو طرفه بود، بدین معنی که جهت حرکت از هر مرحله به مرحله دیگر، در واقع می توانست هم به شکل پس رو و هم پیش‌رو باشد. مثال بعدی از هر دو نظر با مثالهای قبلی متفاوتست. در این مثال، حالت سیستم، متغیری پیوسته است که نه تنها می‌تواند مقادیر عدد صحیح، بلکه همه مقادیر را در فاصله معینی انتخاب کند. در اینجا، چون تعداد مقادیر مربوط به s بی‌نهایت است، لذا دیگر نمی‌توان هر مقدار موجه آنرا به طور جداگانه بررسی نمود، بلکه $f_n^*(x)$ و x_n^* را باید به صورت توابعی از s بدست آورد. به علاوه در این مثال، چون مرحله معرف زمان است، لذا روش حل نمی‌تواند دو طرفه باشد و لزوماً باید به صورت پس‌رو عمل نماید.

مثال ٤ حجم کارکارگاهی، در فصول مختلف دارای نوسانات قابل ملاحظه‌ای است. استخدام کارگران جدید امری دشوار و آموزش آنان پرهزینه است. از این رو، مدیر کارگاه در فصول کم‌کاری تمایلی به اخراج کارگران اضافی ندارد، از طرفی هم

نمی‌خواهد که در چنین فصولی به‌اندازه‌فصلهائی که حجم کار زیاد می‌شود کارگر در استخدام داشته باشد. علاوه بر این، به طور کلی با پرداخت اضافه کاری نیز مخالف است. از آنجا که کارهای این کارگاه سفارشی است، لذا نمی‌توان در فصولی که حجم سفارشات کم است به تولید پرداخت و آنرا برای سایر فصول انبار کرد. با در نظر گرفتن این شرایط، مدیر کارگاه مایل است بداند که در رابطه با سطح استخدام چه سیاستی را اتخاذ نماید. تعداد کارگران مورد نیاز برای فصلهای مختلف سال به شرح زیر برآورد شده است

فصل	بهار	تابستان	پائیز	زمستان	بهار
تعداد کارگرمورد نیاز	۲۵۵	۲۲۰	۲۴۰	۲۰۰	۲۵۵

تعداد کارگران در هر فصل نمی‌تواند ازارقام فوق کمتر باشد. هر کارگر اضافی نیز باعث از دست رفتن حدود ۲۰۰۰ دلار در فصل؛ خواهد شد. به علاوه، هزینه‌های مربوط به استخدام و اخراج کارگران برابر با حاصلضرب ۲۰۰ دلار در مربع تفاوت سطح استخدام دو فصل متوالی برآورده شده است. تعداد افراد می‌تواند کسری باشد، زیرا می‌توان استخدام پاره وقت داشت، که در این صورت هزینه‌ها نیز متناسب با این کسر و بر اساس جدول فوق بدست می‌آید.

مدیر کارگاه می‌خواهد بداند سطح استخدام در چهار فصل چگونه باشد تا کل هزینه‌ها حداقل گردد.

حل برمبنای اطلاعات موجود، قاعدتاً صلاح نیست بیش از تعداد کارگر مورد نیاز در بالاترین سطح یعنی ۲۵۵، استخدام نمود. بنابراین، سطح استخدام در فصل بهار باید ۲۵۵ باشد و مسئله به تعیین سطح استخدام در سه فصل دیگر تبدیل می‌شود.

برای فرموله کردن مسئله در چارچوب برنامه‌ریزی پویا، فصل را به عنوان

مرحله منظور می کنیم. در واقع، تعداد مراحل معین نیست، زیرا سالها به همین ترتیب استمرار می‌یابد، لیکن، باتوجه به تکراری بودن فصول و اینکه سطح استخدام در فصل بهار معلوم است، می‌توان فقط یک دوره چهار فصلی که به فصل بهار ختم شود را در نظر گرفت.

متغیر تصمیم x_n $(n = 1,2,3,4)$ معرف سطح استخدام در فصل n است. چون مقدار متغیر تصمیم آخرین مرحله یا باید معلوم باشد، و یا بتوان آنرا بدون در نظر گرفتن سایر مراحل بدست آورد، لذا ضروری است که بهار را به عنوان آخرین مرحله منظور نمود. برای بدست آوردن جواب بهینه هر فصل دیگر، باید سطح استخدام فصل بعدی را هم به حساب آورد. بنابراین x_1, x_2, x_3, x_4 به ترتیب، معرف سطح استخدام در فصول تابستان، پائیز، زمستان و بهار بوده و $x_4 = 255$ است.

هزینه هر مرحله به متغیر تصمیم آن x_n و سطح استخدام فصل قبل بستگی دارد. تنها اطلاعاتی که در رابطه با حالت سیستم لازم است، معلوم بودن سطح استخدام مرحله قبلی است. بنابراین، حالت s برحسب سطح استخدام در مرحله قبلی بیان می‌شود. به این ترتیب، حالت در مرحله n عبارت از $s = x_{n-1}$ است (که $x_0 = x_4 = 255$).

فرض کنید که r_n حداقل نیروی انسانی مورد نیاز در مرحله n، یعنی $r_1 = 220, r_2 = 240, r_3 = 200, r_4 = 255$ باشد. هدف مسئله تعیین x_1, x_2, x_3, x_4 است، به طوری که

$$\text{Minimize} \sum_{i=1}^{4} [200(x_i - x_{i-1})^2 + 2{,}000(x_i - r_i)]$$

$$r_i \le x_i \le 255, \qquad i = 1, 2, 3, 4 \text{ بازاء}$$

بنابراین با توجه به اینکه $s = x_{n-1}$ است، لذا برای هر مرحله n (بازاء $n=1,2,3,4$)، خواهیم داشت

$$f_n(s,x_n) = 200(x_n - s)^2 + 2{,}000(x_n - r_n) + \underset{r_n \le x_i \le 255}{\text{minimum}} \sum_{i=n+1}^{4} [200(x_i - x_{i-1})^2 + 2{,}000(x_i - r_i)]$$

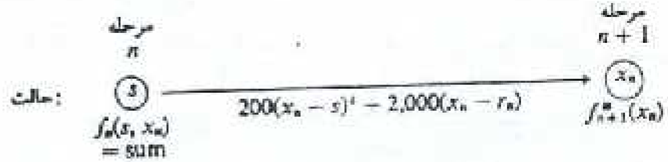
ضمناً

$$f_n^*(s) = \min_{r_n \le x_n \le 255} f_n(s,x_n)$$

در نتیجه

$$f_n(s,x_n) = 200(x_n - s)^2 + 2{,}000(x_n - r_n) + f_{n+1}^*(x_n)$$

(که f_5^* طبق تعریف برابر با صفر است، زیرا هزینه‌های بعد از مرحله ٤ ارتباطی به تحلیل مورد بحث ندارد). روابط اساسی این مسئله در شکل ۵-۸ نشان داده شده است.



شکل ۵-۸ ساختاراساسی مسئله برنامه‌ریزی نیروی انسانی

نتیجتاً، رابطه‌برگشت که‌توابع f_n^* را با یکدیگر مرتبط می‌سازد، عبارتست از

$$f_n^*(s) = \min_{r_n \le x_n \le 255} \{200(x_n - s)^2 + 2{,}000(x_n - r_n) + f_{n+1}^*(x_n)\}$$

برنامه‌ریزی پویا برای حل این مسئله از رابطه فوق استفاده می کند و توابع $f_4^*(s), f_3^*(s), f_2^*(s), f_1^*(255)$ و x_n های متناظر با آنها را بدست می‌آورد.

اگر از آخرین مرحله، $n=4$ شروع کنیم، با اطلاعات موجود و جواب $x_4 = 255$ نتایج به شرح زیر حاصل می‌شود.

$n = 4$

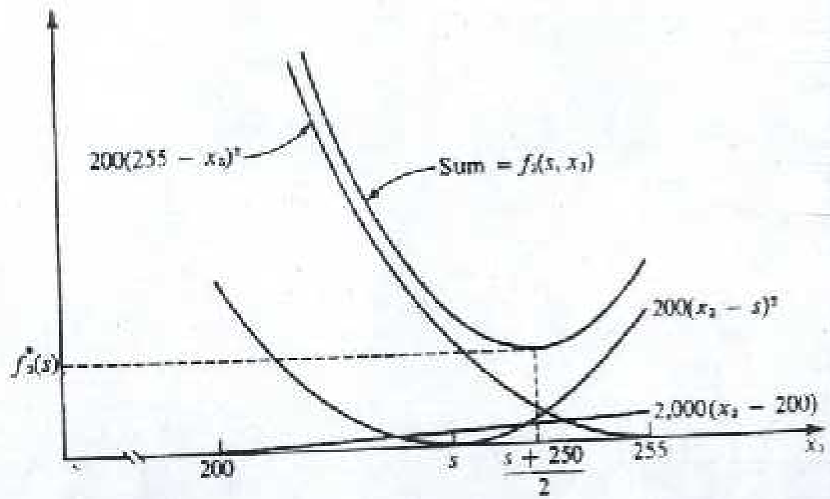
s	$f_4^*(s)$	x_4^*
$200 \le s \le 255$	$200(255 - s)^2$	255

موقعی که فقط دو مرحله از این مسئله باقی مانده باشد، $(n=3)$، رابطه برگشت به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} f_3^*(s) &= \min_{200 \le x_3 \le 255} f_3(s,x_3) \\ &= \min_{200 \le x_3 \le 255} \{200(x_3 - s)^2 + 2{,}000(x_3 - 200) + 200(255 - x_3)^2\} \end{aligned}$$

یک راه بدست آوردن حداقل تابع $f_3(s,x_3)$ بازاء مقدار معین s، روش ترسیمی مطابق شکل ٦-٨ است. لیکن، مشتق گیری سریعترین راه است. به طور مشخص، مشتق $f_3(s,x_3)$ نسبت به x_3 را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} f_3(s,x_3) &= 400(x_3 - s) + 2{,}000 - 400(255 - x_3) \\ &= 400(2x_3 - s - 250) = 0 \end{aligned}$$



شکل ٦-٨ روش‌ترسیمی‌برای‌یافتن $f_3^*(s)$ درمسئله‌برنامه‌ریزی‌نیروی‌انسانی

که در نتیجه
$$x_3^* = \frac{s+250}{2}$$

چون مشتق دوم مثبت و جواب حاصل نیز در فاصله موجه x_3 قرار می‌گیرد پس، به این ترتیب حداقل مورد نظر بدست آمده است. با استفاده از جواب فوق خواهیم داشت

$$f_3^*(s) = f_3(s,x_3^*) = 200\left(\frac{s+250}{2} - s\right)^2 + 200\left(255 - \frac{s+250}{2}\right)^2$$
$$+ 2{,}000\left(\frac{s+250}{2} - 200\right)$$

پس از ساده کردن عبارت فوق، نتایج مورد نظر برای مسئله دو مرحله‌ای به شرح زیر خلاصه می‌شود

$n = 3$

s	$f_3^*(s)$	x_3^*
$240 \le s \le 255$	$50(250-s)^2 + 50(260-s)^2 + 1{,}000(s-150)$	$\frac{s+250}{2}$

مسائل سه مرحله‌ای، $(n=2)$ و چهار مرحله‌ای $(n=1)$ نیز با روشی مشابه حل می‌شوند. در مورد $n = 2$، در فاصله موجه $240 \le x_2 \le 255$ داریم

$$\begin{aligned} f_2(s,x_2) &= 200(x_2-s)^2 + 2{,}000(x_2 - r_2) + f_3^*(x_2) \\ &= 200(x_2-s)^2 + 2{,}000(x_2 - 240) \\ &\quad + 50(250-x_2)^2 + 50(260-x_2)^2 + 1{,}000(x_2 - 150) \end{aligned}$$

هدف مسئله پیدا کردن متغیر x_2 است به طوری که تابع فوق را حداقل کند،

$$f_2^*(s) = \min_{240 \le x_2 \le 255} f_2(s,x_2)$$

مشتق را برابر با صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(s,x_2) &= 0 \\ &= 400(x_2 - s) + 2{,}000 - 100(250 - x_2) - 100(260 - x_2) + 1{,}000 \\ &= 200(3x_2 - 2s - 240) \end{aligned}$$

که نتیجه می‌شود
$$x_2 = \frac{2s+240}{3}$$

از آنجا که بازاء تمام مقادیر $s \ge 240$ رابطه زیر برقرار است،

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f_2(s,x_2) = 600 > 0$$

لذا، جواب حاصل مقدار تابع را حداقل خواهد ساخت. چنانچه $s < 240$ باشد، دیگر این جواب x_2 موجه نخواهد بود. آنگاه،

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_2(s,x_2) > 0 \qquad 240 \le x_2 \le 255$$

که در این حالت حداقل تابع بازاء $s=240$ بدست می‌آید. قدم بعدی قرار دادن مقادیر x_2 حاصل در تابع $f_2(s,x_2)$ وبدست آوردن $f_2^*(s)$ در دو فاصله $s \ge 240$ و $s < 240$ است. بعد از محاسبات جبری نتایج زیر حاصل می‌شود

$n = 2$

s	$f_2^*(s)$	x_2^*
$220 \le s \le 240$	$200(240-s)^2 + 115{,}000$	240
$240 \le s \le 255$	$\frac{200}{9}[2(250-s)^2 + (265-s)^2 + 30(3s-575)]$	$\frac{2s+240}{3}$

در مورد مسئله چهار مرحله‌ای، $(n=1)$،

$$f_1(s,x_1) = 200(x_1 - s)^2 + 2{,}000(x_1 - r_1) + f_2^*(x_1)$$

چون $r_1 = 220$ است، پس منطقه موجه $220 \le x_1 \le 255$ خواهد بود. تابع $f_2^*(x_1)$ در دو فاصله $220 \le x_1 \le 240$ و $240 \le x_1 \le 255$ دارای عبارات مختلف خواهد بود. بنابراین

$$f_1(s,x_1) = \begin{cases} 200(x_1 - s)^2 + 2{,}000(x_1 - 220) + 200(240 - x_1)^2 + 115{,}000, & \text{اگر } 220 \le x_1 \le 240 \\ 200(x_1 - s)^2 + 2{,}000(x_1 - 220) + \dfrac{200}{9}[2(250 - x_1)^2 + (265 - x_1)^2 + 30(3x_1 - 575)] & \text{اگر } 240 \le x_1 \le 255 \end{cases}$$

ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که $x_1 \le 240$ باشد.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s,x_1) = 400(x_1 - s) + 2{,}000 - 400(240 - x_1)$$
$$= 400(2x_1 - s - 235)$$

می‌دانیم که $s = 255$ (سطح استخدام در فصل بهار) است. به این ترتیب بازاء تمام مقادیر $x_1 \le 240$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s,x_1) = 800(x_1 - 245) < 0$$

بنابراین حداقل تابع $f_1(s,x_1)$ روی ناحیه $x_1 \le 240$ بازاء $x_1 = 240$ بدست می‌آید.

موقعی که $240 \le x_1 \le 255$ باشد، آنگاه،

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s,x_1) = 400(x_1 - s) + 2{,}000 - \frac{200}{9}[4(250 - x_1) + 2(265 - x_1) - 90]$$
$$= \frac{400}{3}(4x_1 - 3s - 225)$$

از آنجا که بازاء تمام مقادیر x_1

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_1(s,x_1) > 0$$

لذا این مشتق را برابر با صفر قرار می‌دهیم

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s,x_1) = 0$$

که در نتیجه

$$x_1 = \frac{3s + 225}{4}$$

چون $s = 255$ است، پس در ناحیه $240 \le x_1 \le 255$ حداقل تابع $f_1(s,x_1)$ بازاء $x_1 = 247.5$ بدست می‌آید. از آنجا که جواب $x_1 = 240$ که مقدار تابع را در فاصله $x_1 \le 240$ حداقل می‌کند نیز در همین فاصله قرار می‌گیرد، لذا حداقل تابع $f_1(s,x_1)$ در کل منطقه موجه یعنی $220 \le x \le 255$ بازاء $x_1 = 247.5$ بدست می‌آید. به این ترتیب

$$f_1^*(255) = 200(247.5 - 255)^2 + 2{,}000(247.5 - 220)$$
$$+ \frac{200}{9}[2(250 - 247.5)^2 + (265 - 247.5)^2 + 30(742.5 - 575)]$$
$$= 185{,}000$$

نتایج حاصل در جدول زیر خلاصه شده است

$n = 1$

s	$f_1^*(s)$	x_1^*
255	185,000	247.5

بنابراین، سیاست بهینه $x_1^* = 247.5$ ، $x_2^* = 245$ ، $x_3^* = 247.5$ و $x_4^* = 255$ است، و هزینه کل دوره برابر با ۱۸۵۰۰۰ دلار خواهد شد.

برای تکمیل انواع مثالهائی که برای تشریح برنامه‌ریزی پویای قطعی ارائه شدند، مثال دیگری مطرح می‌گردد که حالت آن با بیش ازیک متغیر نشان داده می‌شود.

مثال ۵ برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &\le 4 \\ 2x_2 &\le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 18 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

یک روش حل مسائل کوچک برنامه‌ریزی خطی، نظیر این مسئله، استفاده از برنامه‌ریزی پویاست که ذیلاً تشریح می‌گردد.

حل در این مسئله لازم است دو متغیر تصمیم مرتبط با یکدیگر، یعنی x_1 و x_2 که معرف سطح فعالیتهای ۱ و ۲ هستند را تعیین نمود. این دو فعالیت را به عنوان دو مرحله مسئله برنامه‌ریزی پویا تلقی می‌کنیم. اگرچه هرکدام را می‌توان مرحله ۱ نامید، ولی فرض می‌کنیم که مرحله n همان فعالیت n ، (بازاء $n = 1,2$) باشد. به این ترتیب، x_n متغیر تصمیم در مرحله n خواهد بود.

در این مسئله حالتها کدامند؟ به عبارت دیگر، اگر تصمیمی که درمرحله ۱ گرفته شده معلوم باشد، چه اطلاعاتی در رابطه با حالت فعلی سیستم و برای تصمیم‌گیری در مرحله ۲ لازم است؟ در پاسخ به این سئوال می‌توان گفت که اطلاعات مورد نیاز همان مقدار لنگی[1] مربوط به محدودیتهاست. برای روشن شدن موضوع، مقادیر سمت راست(٤ و ۱۲ و ۱۸) رامی‌توان به عنوان مقادیر موجود از منابع

1) *Slack*

۱ و ۲ و ۳ تعبیر نمود. در این صورت، s عبارت از باقیمانده مناسبی است که می‌توان به سایر فعالیتها اختصاص داد. (توجه نمائید که این تعبیر با مفهوم حالت در مثالهای ۲ و ۳ نیز قابل مقایسه است، باستثنای اینکه دراینجا، به جای یک منبع سه منبع برای تخصیص وجود دارد) بدین ترتیب

$$s = (R_1, R_2, R_3)$$

که R_i مقدار باقیمانده منبع i است که باید تخصیص داده شود.

بنابراین، برخلاف مسائل قبلی که دارای یک متغیر حالت بودند، این مسئله دارای سه متغیر حالت (به عبارت دیگر، بردار حالت با سه عنصر) است. به این ترتیب، به جای منظور نمودن تمام مقادیر محتمل حالت، باید تمام ترکیبهای مختلف مقادیر محتمل متغیرهای حالت را درنظر گرفت. از نقطه نظر محاسباتی، این امر باعث پیچیدگی‌های بسیار جدی خواهد شد. به طور کلی، تعداد ترکیبهای ممکن می‌تواند برابر با حاصلضرب تعداد تمام مقادیر محتمل همه متغیرهای حالت باشد، لذا موقعی که تعداد متغیرهای حالت افزایش می‌یابد، حجم محاسبات نیز به طور سرسام‌آوری زیاد خواهد شد.

هرسه متغیر حالت پیوسته هستند. از این رو، به جای اینکه همه ترکیبهای محتمل را جداگانه درنظر بگیریم، لازم است از رویکردی که در مثال ٤ معرفی شد استفاده شود، که در آن اطلاعات مورد نیاز به صورت تابعی از حالت سیستم محاسبه شدند.

علیرغم این پیچیدگیها، چون این مسئله به اندازه کافی کوچک است، لذا، بدون مشکل مهمی می‌توان آنرا حل کرد. برای انجام این کار، لازم است که در این مسئله نیز قراردادهای متداول برنامه‌ریزی پویا معرفی شود. اگر سیستم در مرحله n و حالت (R_1, R_2, R_3) باشد و تصمیم x_n هم گرفته شود در این صورت، $f_n(R_1, R_2, R_3, x_n)$ معرف حداکثر سود حاصل از مرحله n به بعد خواهد بود. با بهره‌گیری از قراردادهای کلی برنامه‌ریزی خطی، بازاء $n = 1,2$ داریم:

$$f_n(R_1,R_2,R_3,x_n) = c_n x_n + \text{maximum} \sum_{j=n+1}^{2} c_j x_j$$

$$\sum_{j=n}^{2} a_{ij} x_j \le R_i \quad (i = 1,2,3)$$

$$x_j \ge 0$$

به علاوه

$$f_n^*(R_1,R_2,R_3) = \max_{x_n} f_n(R_1,R_2,R_3,x_n)$$

که در رابطه فوق، پیدا کردن حداکثر تابع بازاء تمام مقادیر موجه x_n است. بنابراین

$$f_n(R_1,R_2,R_3,x_n) = c_n x_n + f_{n+1}^*(R_1 - a_{1n}x_n, R_2 - a_{2n}x_n, R_3 - a_{3n}x_n)$$

(که f_3^* طبق تعریف صفر است). روابط اصلی در شکل ۷–۸ خلاصه شده است.

$$\begin{array}{cccc} & \text{مرحله}\ n & & \text{مرحله}\ n+1 \\ \text{حالت :} & \boxed{R_1, R_2, R_3} & \xrightarrow[c_n x_n]{} & \boxed{R_1 - a_{1n}x_n, R_2 - a_{2n}x_n, R_3 - a_{3n}x_n} \\ & f_n(R_1, R_2, R_3, x_n) = \text{sum} & & f_{n+1}^*(R_1 - a_{1n}x_n, R_2 - a_{2n}x_n, R_3 - a_{3n}x_n) \end{array}$$

شکل ۷–۸ ساختار اساسی مسئله برنامه‌ریزی خطی

از آنجا که دو معادله آخر، مشترکاً رابطه برگشتی را تعریف می‌کنند که مشخص کننده ارتباط بین f_1^* و f_2^* است، لذا مقدمات اجرای برنامه‌ریزی پویا فراهم شده است. برای حل آخرین مرحله $n=2$ توجه نمائید که

$$f_2(R_1,R_2,R_3,x_2) = 5x_2$$

مقادیر موجه x_n در مجموعه محدودیتهای زیر صدق می‌نمایند.

$$2x_2 \le R_2,\ 2x_2 \le R_3,\ x_2 \ge 0$$

بنابراین

$$f_2^*(R_1,R_2,R_3) = \max_{\substack{2x_2 \le R_2 \\ 2x_2 \le R_3 \\ x_2 \ge 0}} \{5x_2\}$$

به این ترتیب، جواب حاصل عبارت است از

$n=2$

R_1,R_2,R_3	$f_2^*(R_1,R_2,R_3)$	x_2^*
$R_i \ge 0$	$5\min\left\{\frac{R_2}{2},\frac{R_3}{2}\right\}$	$\min\left\{\frac{R_2}{2},\frac{R_3}{2}\right\}$

در مورد مسئله دو مرحله‌ای، $n=1$

$$f_1(R_1,R_2,R_3,x_1) = 3x_1 + f_2^*(R_1 - x_1, R_2, R_3 - 3x_1)$$

مقادیر موجه x_1 در محدودیتهای زیر صدق می‌کنند

$$x_1 \le R_1,\ 3x_1 \le R_3,\ x_1 \ge 0$$

بنابراین، چون می‌دانیم که در مرحله اول $R_1 = 4$، $R_2 = 12$، $R_3 = 18$ است، لذا رابطه برگشت مورد نظر عبارت است از

$$f_1^*(4,12,18) = \max_{\substack{x_1 \le 4 \\ 3x_1 \le 18 \\ x_1 \ge 0}} \{3x_1 + f_2^*(4 - x_1, 12, 18 - 3x_1)\}$$

$$= \max_{0 \le x_1 \le 4} \left\{3x_1 + 5\min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2}\right\}\right\}$$

توجه نمائید که

$$\min\left\{\frac{12}{2},\frac{18-3x_1}{2}\right\} = \begin{cases} 6, & 0 \le x_1 \le 2 \quad \text{اگر} \\ 9 - \frac{3}{2}x_1 & 2 \le x_1 \le 4 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

به طوری که

$$3x_1 + 5\min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18-3x_1}{2}\right\} = \begin{cases} 3x_1 + 30 & 0 \le x_1 \le 2 \text{ اگر} \\ 45 - \frac{9}{2}x_1 & 2 \le x_1 \le 4 \text{ اگر} \end{cases}$$

ازآنجا که حداکثر هر دو عبارت

$$\max_{0\le x_1\le 2}\{3x_1+30\} \quad \text{و} \quad \max_{2\le x_1\le 4}\left\{45-\frac{9}{2}x_1\right\}$$

بازاء $x=2$ بدست می‌آید، نتیجه می‌شود که $x_1^* = 2$ است. خلاصه مرحله ۱ به شرح زیر بدست می‌آید.

$n=1$	R_1,R_2,R_3	$f_1^*(R_1,R_2,R_3)$	x_1^*
	4,12,18	36	2

چون $x_1^* = 2$ است پس

$$R_1 = 4-2 = 2,\ R_2 = 12,\ R_3 = 18-3(2) = 12$$

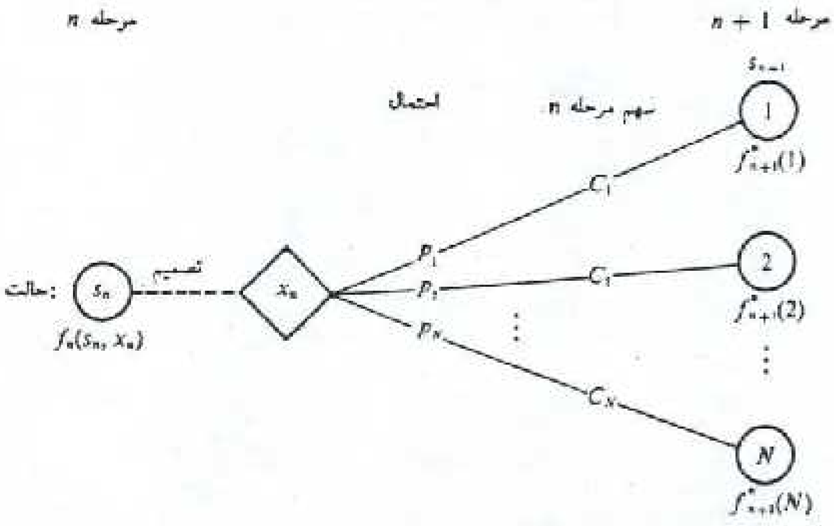
درمرحله ۲، $x_2^* = 6$ است. درنتیجه $x_1^* = 2$، و $x_2^* = 6$ ،جواب بهینه این مسئله است وسود کل برابر ۳۶ خواهد بود.

۸-۴ برنامه‌ریزی پویای احتمالی

در برنامه‌ریزی پویای احتمالی[1] ، با معلوم بودن حالت و سیاست تصمیم‌گیری هر

1) *Probabilistic Dynamic Programming*

مرحله، حالت قطعی مرحله بعدی مشخص نمی‌شود، بلکه تنهاتابع توزیع آنرا می‌توان تعیین نمود، تفاوت برنامه‌ریزی احتمالی و برنامه‌ریزی پویای قطعی نیز در همین است. در اینجا نیز با دانستن حالت و سیاست تصمیم‌گیری در هر مرحله، تابع توزیع حالت مرحله بعد مشخص خواهد شد. تصویر ساختار کلی برنامه‌ریزی پویای احتمالی در شکل ۸-۸ نشان داده شده است. N معرف تعداد حالت ممکن در



شکل ۸-۸ ساختارکلی برنامه‌ریزی پویای احتمالی

مرحله n+1 ، $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$ توزیع احتمالی حالت مرحله بعدی است، مشروط بر اینکه در مرحله n حالت s بودهو متغیر تصمیم x_n انتخاب شده باشد. به علاوه با فرض اینکه حالت مرحله بعدی i باشد، C_i معرف سهم مرحله n در پیشرفت هدف خواهد بود. اگر شکل ۸-۸ طوری بسط داده شود که تمام حالات و متغیرهای تصمیم همه مراحل را دربربگیرد، گاهی درخت تصمیم نیز خوانده می‌شود. درخت تصمیم، در صورتی که خیلی بزرگ نباشد روش سودمندی برای نشان دادن انواع حالاتی که ممکن است پیش بیاید خواهد بود.

در ساختار مدل احتمالی، رابطه بین $f_n(s_n, x_n)$ و $f^*_{n+1}(s_{n+1})$ تا حد زیادی پیچیده‌تر از رابطه مشابه در برنامه‌ریزی پویای قطعی است. شکل دقیق چنین رابطه‌ای بستگی به تابع هدف دارد. برای روشن شدن مطلب، فرض کنید که هدف، حداقل کردن میانگین مجموع سهم مراحل مختلف در تابع هدف باشد. در چنین موردی، اگر حالت و متغیر تصمیم مرحله n به ترتیب با s_n و x_n نشان داده شود، آنگاه $f_n(s_n, x_n)$ معرف حداقل میانگین مجموع سهم مراحل از n به بعد خواهد بود. در نتیجه

$$f_n(s_n, x_n) = \sum_{i=1}^{N} p_i[C_i + f^*_{n+1}(i)]$$

و

$$f^*_{n+1}(s_{n+1}) = \min_{x_{n+1}} f_{n+1}(s_{n+1}, x_{n+1})$$

که حداقل کردن توابع فوق بر روی تمام مقادیر موجه x_{n+1} انجام می‌شود. مثال ۶ دارای چنین شکلی است، ولی مثال ۷ شکل متفاوتی دارد.

مثال ۶ شرکتی برای ساخت یک واحد از کالای مشخص، قراردادی بسته است. جهت تولید کالا با کیفیتی که مورد نظر مشتری باشد، ممکن است این شرکت مجبور شود بیش از یک واحد از این کالا را تولید کند. احتمال اینکه هر واحد از کالای تولید شده با مشخصات مورد نظر مطابقت داشته ۰/۵ برآورد شده است. بنابراین، اگر L عدد کالا تولید شود، تعداد قابل قبول آن دارای توزیع دو جمله‌ای است، یعنی احتمال اینکه همه آنها معیوب باشند $(\frac{1}{2})^L$ خواهد بود.

هزینه‌نهائی تولید هر واحد کالا ۱۰۰ دلار برآورد شده است (حتی اگر معیوب ازکار درآید) و کالاهای تولیدی اضافی نیز ارزشی ندارند. علاوه بر این؛ هزینه هر بار راه‌اندازی فرآیند تولید برابر با ۳۰۰ دلار است. مدت قرارداد طوری است که شرکت فقط مجال سه بار تولید دارد. اگر در پایان دوره قرارداد تولیدکننده موفق نشود که کالا

را با کیفیت مورد نظر تحویل دهد باید خسارتی معادل ۱۶۰۰ دلار بپردازد.

هدف، تعیین تعداد کالائی است که هربار باید تولیدشود تا امید ریاضی مجموع هزینه‌ها حداقل گردد.

حل هربار تولید به عنوان یک مرحله برنامه‌ریزی پویا محسوب می‌شود. متغیر تصمیم x_n، $(n = 1,2,3)$ تعداد کالائی است که در هر بار تولید می‌گردد. حالت سیستم در هر مرحله عبارت ازتعداد کالای قابل قبولی است که در آن مرحله یا مراحل بعد باید تولید شود (یک یا صفر). به این ترتیب در مرحله اول $s = 0$ است. اگر حداقل یک کالای قابل قبول تولید شود، در این صورت حالت سیستم به $s = 1$ تبدیل خواهد شد و بعد از آن، هزینه‌ای وجود نخواهد داشت.

اگرچه، تابع هدف را می‌توان با یک عبارت پیچیده بیان کرد ولی راحت‌تر این است که $f_n(s, x_n)$ مستقیماً تعریف گردد. در چنین موردی، $f_n(s, x_n)$ معرف حداقل میانگین کل هزینه مرحله n به بعد است، مشروط بر اینکه در مرحله n و حالت s بوده و متغیر تصمیم x_n انتخاب شده باشد.

علاوه بر اینها

$$f^*_n(s) = \min_{x_n = 0,1,\ldots} f_n(s, x_n)$$

که در اینجا $f^*_n(0) = 0$ است. اگر واحد سنجش هزینه را ۱۰۰ دلار در نظر بگیریم، در این صورت، صرفنظر از اینکه حالت مرحله بعد چه باشد، هزینه مرحله n عبارت از $(K + x_n)$ خواهد بود، که

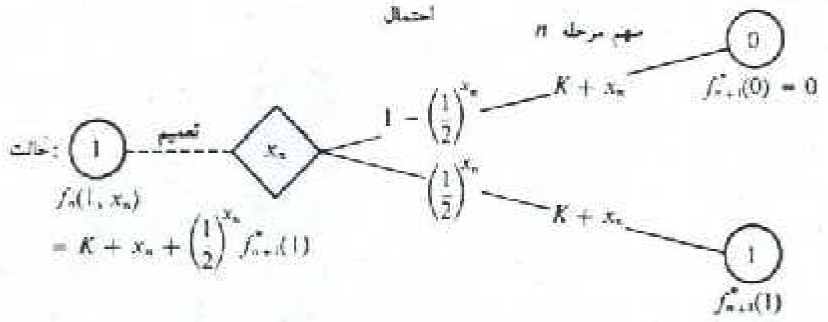
$$K = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x_n = 0 \\ 3 & \text{اگر } x_n > 0 \end{cases}$$

بنابراین در حالتی که $s = 1$ باشد،

$$f_n(1, x_n) = K + x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_n} f^*_{n+1}(1) + \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x_n}\right] f^*_{n+1}(0)$$

$$= K + x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_n} f^*_{n+1}(1)$$

که $f^*_4(1)$ برحسب تعریف برابر با ۱۶ یعنی پرداخت خسارت بابت عدم تولید کالای قابل قبول خواهد بود. خلاصه چنین روابطی در شکل ۹ −۸ نشان داده شده است.



شکل ۹−۸ ساختار کلی مسئله تولید یک واحد کالای قابل قبول

در نتیجه، رابطه برگشت محاسبات برنامه‌ریزی پویا، بازاء ۱،۲،۳ = n ، به صورت زیر خواهد بود

$$f^*_n(1) = \min_{x_n = 0, 1, \ldots} \left\{K + x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_n} f^*_{n+1}(1)\right\}$$

محاسبات به شرح زیر خلاصه می‌شوند

$n = 3$

s \ x_3	$f_3(1, x_3) = K + x_3 + 16\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}$						$f^*_3(s)$	x^*_3
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1	16	12	9	8	8	$8\frac{1}{2}$	8	3 or 4

$n = 2$

s \ x_2	$f_2(1, x_2) = K + x_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} f^*_3(1)$					$f^*_2(s)$	x^*_2
	0	1	2	3	4		
0	0					0	0
1	8	8	7	7	$7\frac{1}{2}$	7	2 or 3

$n = 1$

s \ x_1	$f_1(1, x_1) = K + x_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} f^*_2(1)$					$f^*_1(s)$	x^*_1
	0	1	2	3	4		
1	7	$7\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	$6\frac{7}{8}$	$7\frac{7}{16}$	$6\frac{3}{4}$	2

به این ترتیب، سیاست بهینه، تولید دو واحد کالا در دوره اول است. اگر هیچکدام از این دو قابل قبول نباشند، آنگاه در دوره دوم دو یا سه واحد دیگر تولید می‌شوند. اگر این کالاها هم قابل قبول نباشند، در دوره سوم سه یا چهار کالا تولید می‌شوند. میانگین کل هزینه، با این سیاست، ۶۷۵ دلار خواهد بود.

مثال ۷ یک کارشناس آمار مدعی است که روش برنده شدن در یک مسابقه را پیدا کرده است. دوستانش این ادعا را باور ندارند و با او شرط کلانی بسته‌اند که نمی‌تواند با سه سکه در این مسابقه شرکت کرده و در پایان صاحب ۵ سکه شود. در هر دور بازی، شرکت کننده می‌تواند با هر مقدار سکه شرکت کند. اگر ببرد به همان اندازه برنده می‌شود، و اگر ببازد همان تعداد خواهد باخت. امکان برنده شدن این کارشناس در هر دور بازی معادل، $\frac{۲}{۳}$ برآورد شده است.

با فرض اینکه چنین برآوردی صحیح باشد، تعیین سیاست بهینه‌ای مورد نظر است که مشخص نماید این متخصص آمار در هر یک از سه دور بازی با چند سکه باید شرکت نماید. نتایج بازیهای قبلی در هر مرحله بازی باید در نظر گرفته شود. هدف، حداکثر کردن احتمال برد این شخص در شرط بندی است.

حل در فرموله کردن برنامه‌ریزی پویا، دوره‌های بازی را مرحله در نظر می‌گیریم.

متغیرهای تصمیم x_n $(n=1,2,3)$، تعداد سکه‌هائی است که با آن در هر دور بازی شرکت می‌کند. حالت سیستم در هر مرحله، تعداد سکه‌هائی است که این کارشناس در این مرحله بازی در اختیار دارد، زیرا برای اتخاذ تصمیم بهینه در رابطه با اینکه با چند سکه در بازی شرکت نماید تنها به همین اطلاعات نیاز است.

از آنجا که هدف حداکثر کردن احتمال بردن این شخص در شرط بندی با دوستان اوست، لذا تابع هدفی که باید حداکثر شود همان احتمال به پایان رسانیدن سه بازی با ۵ سکه است. بنابر این، $f_n(s,x_n)$ عبارت از حداکثر این احتمال است، مشروط بر اینکه در بازی دوره n، این شخص دارای s سکه بوده و با x_n سکه در بازی شرکت کند. علاوه بر اینها

$$f_n^*(s) = \max_{x_n=0,1,\ldots,s} f_n(s,x_n)$$

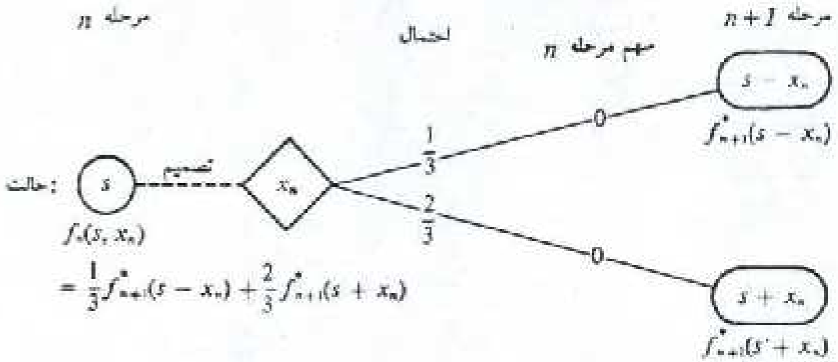
عبارت $f_n(s,x_n)$ باید مبین این واقعیت باشد که این شخص هنوز هم ممکن است سرانجام ۵ سکه را ببرد، حتی اگر در دوره بعدی هم بازنده شود. اگر او ببازد، حالت مرحله بعدی $(s-x_n)$ و احتمال به پایان رسانیدن بازی با ۵ سکه عبارت از $f_{n+1}^*(s-x_n)$ خواهد بود. اگر این شخص در بازی بعدی برنده شود، حالت مرحله بعد $(s+x_n)$ و احتمال بردن شرط $f_{n+1}^*(s+x_n)$ خواهد بود. چون احتمال بردن هر دور بازی $\frac{۲}{۳}$ است، بنابراین

$$f_n(s,x_n) = \frac{1}{3}f_{n+1}^*(s-x_n) + \frac{2}{3}f_{n+1}^*(s+x_n)$$

که طبق تعریف مقدار $f_4^*(s)$ بازاء $s<5$ برابر با صفر و بازاء $s\geq5$ برابر با یک است. به این ترتیب، مرحله n تاثیر مستقیم در تابع هدف ندارد وتنها اثر آن تعیین حالت مرحله بعدی است. این روابط در شکل ۱۰-۸ نشان داده شده است.

بنابراین در مورد این مسئله، بازاء n=1,2,3 رابطه برگشت عبارتست از

$$f_n^*(s) = \max_{x_n=0,1,\ldots,s}\left\{\frac{1}{3}f_{n+1}^*(s-x_n)+\frac{2}{3}f_{n+1}^*(s+x_n)\right\}$$



شکل ۱۰-۸ ساختارکلی مسئله شرط بندی

نتایج محاسبات به شرح زیر است

$n=3$

s	$f_3^*(s)$	x_3^*
0	0	—
1	0	—
2	0	—
3	$\frac{2}{3}$	2 (یا بیشتر)
4	$\frac{2}{3}$	1 یابیشتر
≥5	1	0 (یا $\leq s-5$)

$n=2$

x_2 / s	$f_2(s,x_2)=\frac{1}{3}f_3^*(s-x_2)+\frac{2}{3}f_3^*(s+x_2)$: 0	1	2	3	4	$f_2^*(s)$	x_2^*
0	0					0	—
1	0	0				0	—
2	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$			$\frac{4}{9}$	1 or 2
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$	0, 2, or 3
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	1
≥5	1					1	0 (or $\leq s-5$)

$n = 1$

x_1 \ s	$f_1(s,x_1)=\frac{1}{3}f_2^*(s-x_1)+\frac{2}{3}f_2^*(s,x_1)$: 0	1	2	3	$f_1^*(s)$	x_1^*
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{27}$	1

بنابراین سیاست بهینه عبارتست از

$$x_1^* = 1 \begin{cases} x_2^* = 1 \text{ اگر ببرد} \begin{cases} x_3^* = 0 \text{ اگر ببرد} \\ x_3^* = 2 \text{ یا } 3. \text{ اگر ببازد} \end{cases} \\ x_2^* = 1 \text{ یا } 2 \text{ اگر ببازد} \begin{cases} x_3^* = \begin{cases} 2 \text{ یا } 3 \ (\text{بازاء } x_2^* = 1) \\ 1, 2, 3 \text{ یا } 4 \ (\text{بازاء } x_2^* = 2) \end{cases} \text{ اگر ببرد} \\ \text{اگر ببازد شرط را باخته است} \end{cases} \end{cases}$$

طبق این سیاست، این کارشناس با احتمال $\frac{۲۰}{۲۷}$ شرط را می‌برد.

۵–۸ نتیجه

برنامه‌ریزی پویا روش بسیار سودمندی جهت اتخاذ یک رشته تصمیمهای مرتبط با یکدیگر است. برای فورموله کردن هر مسئله لازم است که رابطه برگشت مناسبی مخصوص همان مسئله نوشته شود. به جای محاسبه مستقیم، استفاده از برنامه‌ریزی پویا موجب صرفه‌جوئی‌های قابل ملاحظه‌ای در محاسبات می‌شود. برای نمونه، اگر مسئله‌ای دارای ۱۰ مرحله و هر مرحله دارای ۱۰ حالت و ۱۰ متغیر تصمیم باشد، در محاسبه مستقیم باید $۱۰^{۱۰}$ ترکیب گوناگون را بررسی کرد. حال آنکه در برنامه‌ریزی پویا به بیش از $۱۰^{۳}$ محاسبه نیازی نیست (برای هر حالت در هر مرحله ۱۰ محاسبه).

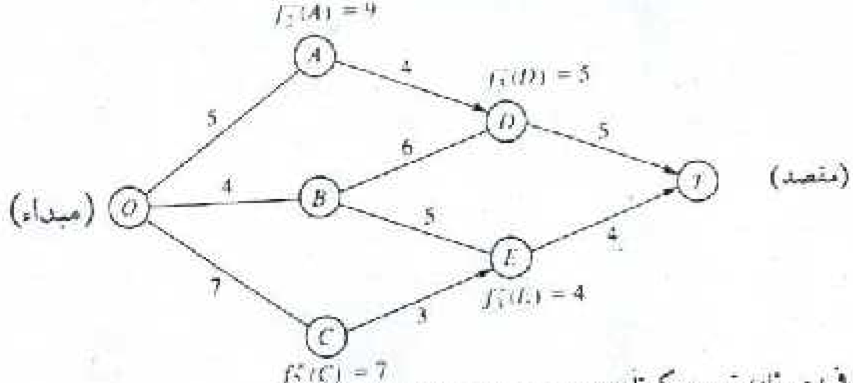
در این فصل، تنها مسائلی مورد بحث قرار گرفتند که تعداد مراحل آنها محدود بود. در قسمتهای بعدی (جلد سوم کتاب)، به مسائل کلی‌تر برنامه‌ریزی پویا که تعداد

مراحل آنها به بینهایت می‌رسد، تحت عنوان فرایند تصمیم‌گیری مارکوفی[1] پرداخته می‌شود.

1) *Markovian Decision Process*

مسائل

۱– شبکه زیر را در نظر بگیرید. فاصلهٔ بین هر دو گره روی شاخه‌ای که آن دو گره را به هم متصل می‌کندنوشته شده است.



هدف مسئله، تعیین کوتاهترین مسیر بین مبداء و مقصد است.

الف– برای فورموله کردن این مسئله با برنامه‌ریزی پویا، حالت ومرحله چیست؟

ب– با استفاده ازبرنامه‌ریزی پویا این مسئله را حل کنید. لیکن، به جای استفاده از جداول معمول، جوابها را با روش ترسیمی نشان دهید. به طور مشخص، شبکه را مجدداً رسم کنید و علاوه بر چهار $f_n^*(s)$ که روی گره‌ها نشان داده شده است $f_3^*(O)$ و $f_2^*(B)$ را نیز به دست آورید و روی شبکه بنویسید. آنگاه، با رسم پیکان مسیر بهینه را از O به T نشان دهید.

ج– با استفاده از جداول معمول بازاء n=3 و n=2 و n=1 جواب بهینه مسئله را با برنامه‌ریزی پویا به دست آورید

د– با استفاده از الگوریتم کوتاهترین مسیر که در فصل هفتم ارائه شد، این مسئله را حل کنید. این روش را با روش برنامه‌ریزی پویا مقایسه کنید و تفاوتهای آنها را نشان دهید

۲– مدیر فروش یک ناشر کتابهای دانشگاهی شش فروشنده در اختیار دارد که می‌تواند آنها را به سه ناحیه مختلف گسیل نماید. تصمیم او بر این است که به هر

ناحیه‌ای حداقل یک فروشنده تخصیص دهد و هر فروشنده نیز فقط در یک ناحیه فعالیت کند. هدف، تعیین تعداد فروشنده‌ای است که به هر ناحیه تخصیص می‌یابد تا فروش حداکثر گردد.

میزان افزایش فروش در هر ناحیه برحسب تعداد فروشنده‌ای که در آن ناحیه فعالیت می‌کند در جدول زیر نشان داده شده است.

	ناحیه		
تعدادفروشنده	۱	۲	۳
۱	٤	۳	۵
۲	٦	٦	۷
۳	۹	۸	۱۰
٤	۱۱	۱۰	۱۲

الف– این مسئله را با برنامه‌ریزی پویا و با کمک جداول معمول آن بازاء n=3 ، n=2 و n=1 حل کنید.

ب– به جای استفاده از جداول معمول برنامه‌ریزی پویا، با کمک شبکه‌های شبیه شبکه مسئله ۱، جوابها را با روش ترسیمی نشان دهید. مقادیر $f_n^*(s)$ را کنار هر گره (باستثنای گره انتهائی) بنویسید. با رسم پیکانهائی از مبداء به مقصد جواب بهینه را مشخص کنید.

۳– صاحب یک فروشگاه زنجیره‌ای، پنج جعبه توت‌فرنگی برای فروش در سه شعبه خود خریداری کرده است. مقدار فروش توت‌فرنگی در این سه شعبه متفاوت است. لذا، صاحب فروشگاه مایل است این پنج جعبه را طوری به سه شعبه تخصیص دهد که امید ریاضی کل سود حاصل حداکثر شود. صاحب فروشگاه نمی‌خواهد محتوای یک جعبه را بین شعبه‌ها تقسیم کند، لیکن مانعی نمی‌بیند اگر یکی از شعبه‌ها توت‌فرنگی نداشته باشد.

جدول زیر، امیدریاضی سود هر شعبه را با در نظر گرفتن تعداد جعبه

توت‌فرنگی که به آن شعبه اختصاص یابد نشان می‌دهد.

تعدادجعبه	شعبه ۱	۲	۳
۰	۰	۰	۰
۱	۵	۶	۴
۲	۹	۱۱	۹
۳	۱۴	۱۵	۱۳
۴	۱۷	۱۹	۱۸
۵	۲۱	۲۲	۲۰

با استفاده از برنامه‌ریزی پویا، چگونگی تخصیص این پنج جعبه به سه شعبه را طوری تعیین کنید که امید ریاضی سود کل حداکثر شود.

۴- دانشجوئی هفت روز وقت دارد تا برای چهار امتحان آماده شود و می‌خواهد از این مدت به بهترین نحو استفاده کند. برای آمادگی در هر درس حداقل یک روز وقت لازم است. این دانشجو، برای تمرکز بیشتر تصمیم گرفته است که در یک روز به بیش از یک درس نپردازد. بنابراین، می‌تواند برای هر درس یک، دو، سه ویا چهار روز وقت اختصاص دهد. با استفاده ازبرنامه‌ریزی پویا و در جهت حداکثر نمودن معدل، این دانشجو مایل است بداند که روزهای باقیمانده را چگونه بین چهار درس خود تقسیم کند. نمره این دانشجو در هر درس با توجه به تعداد روزهائی که به مطالعه آن اختصاص یابد به صورت زیر پیش‌بینی شده است.

تعدادروزهای مطالعه	برآوردنمره بدست آمده در درس شماره ۱	۲	۳	۴
۱	۴	۳	۵	۲
۲	۴	۵	۶	۴
۳	۵	۶	۸	۷
۴	۸	۷	۸	۸

این مسئله را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

۵- مسئول منطقه یک حزب سیاسی مشغول برنامه‌ریزی تبلیغات انتخابات است. برای این منظور، او می‌تواند از خدمات شش نفر دستیار استفاده نماید و مایل است که این افراد را طوری به چهار حوزه منطقه خود اختصاص دهد که حداکثر بازدهی حاصل شود. با توجه به اینکه اگر یک دستیار در بیش از یک حوزه فعالیت کند، کارآئی او کاهش خواهد یافت، لذا هر دستیار فقط به یک حوزه گمارده می‌شود. لیکن، در صورت لزوم ممکن است حوزه‌ای بدون دستیار بماند.

برآورد می‌شود که افزایش تعداد آرای کاندیداهای حزب در هر حوزه، با توجه به تعداد دستیارانی که برای آن حوزه گمارده شده است، به شرح جدول زیر باشد

تعداددستیار	حوزه ۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰	۰
۱	۴	۷	۵	۶
۲	۹	۱۱	۱۰	۱۱
۳	۱۵	۱۶	۱۵	۱۴
۴	۱۸	۱۸	۱۸	۱۶
۵	۲۲	۲۰	۲۱	۱۷
۶	۲۴	۲۱	۲۲	۱۸

با استفاده از برنامه‌ریزی پویا تعیین کنید که چند دستیار به هر حوزه گمارده شود تا حداکثر افزایش در تعداد آرای کل چهار حوزه بدست آید.

۶- مسئله برنامه زمان‌بندی تولید در کتاب برنامه‌ریزی خطی (جدول ۳-۴ صفحه ۱۷۷) را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید. فرض کنید که مقدار تولید باید عدد صحیح و مضربی از ۵ باشد.

۷- مسئله ۱۳ فصل چهار کتاب برنامه‌ریزی خطی (صفحه ۲۳۸) و همچنین

مسئله ۱۷ فصل پنج (صفحه ۳۳۲) را مجدداً با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

۸- شرکتی در صدد معرفی محصول جدیدی است که رقابت فشرده‌ای در بازار آن وجود دارد. به همین جهت، در فکر تدوین برنامهٔ بازاریابی مناسبی است. تصمیم بر این است که معرفی محصول طی سه مرحله انجام شود. ویژگی مرحله ۱، معرفی این محصول به‌مردم‌باتخفیف قابل توجه است، به طوری که بتوان مشتریهای جدیدی را جذب بازار کرد. مرحله ۲ شامل تبلیغات وسیع جهت ترغیب مشتریهای جدید به ادامه خرید آن، با قیمت معمولی است. به علاوه، این شرکت اطلاع دارد که تقریباً همزمان پایان مرحله دو، قرار است شرکت دیگری کالای مشابهی را به بازار عرضه نماید. از این رو، در مرحله ۳ برای جلوگیری از روی آوردن خریداران به کالای رقیب، تبلیغات ادامه پیدا می‌کند.

مجموعاً بودجه‌ای معادل ۵ میلیون دلار برای بازاریابی این محصول منظور شده است. مسئله این است که این مبلغ چگونه بین سه مرحله تقسیم شود تا بهترین بازدهی را داشته باشد. فرض کنید که m معرف سهمی از بازار باشد (برحسب درصد) که در مرحله ۱ بدست آمده، f_2 درصدی از سهم بازار مرحله ۱ است که در پایان مرحله ۲ همچنان محفوظ مانده است و بالاخره f_3 درصدی از مشتریهای مراحل قبلی است که در پایان مرحله ۳ هنوز هم این محصول را می‌خرند. با در نظر گرفتن داده‌های جدول زیر و با استفاده از برنامه‌ریزی پویا، تعیین کنید که این پنج میلیون دلار بین سه مرحله چگونه تقسیم شود تا سهم نهائی این محصول در بازار، یعنی mf_2f_3 حداکثر شود.

الف – فرض کنید پولی که در هر مرحله مصرف می‌شود باید مضربی از یک میلیون دلار بوده و اثر آن روی سهم بازار به شرح جدول صفحه بعد باشد.

ب – اکنون فرض کنید که در هر مرحله بتوان هر مقدار پولی را خرج کرد مشروط بر اینکه از بودجه مورد نظر بیشتر نشود. اثر هزینه، x_i (برحسب میلیون دلار) برای هر مرحله به شرح زیر است

$$m = 10x_1 - x_1^2$$
$$f_2 = 0.40 + 0.10x_2$$
$$f_3 = 0.60 + 0.07x_3$$

(راهنمائی: بعداز حل تحلیلی توابع $f_2(x)$ و $f_3(x)$ را با روش ترسیمی‌بدست آورید).

مبلغ‌مصرف‌شده به‌میلیون‌دلار	m	f_2	f_3
۰	—	۰/۳	۰/۵
۱	۱۰	۰/۵	۰/۷
۲	۱۵	۰/۷	۰/۸۵
۳	۲۲	۰/۸	۰/۹۰
۴	۲۷	۰/۸۵	۰/۹۳
۵	۳۰	۰/۹	۰/۹۵

۹- با استفاده از برنامه‌ریزی پویا، مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کنید.

$$\text{Maximize} \quad Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$3x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

۱۰- با استفاده از برنامه‌ریزی پویا، مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی زیررا حل کنید.

$$\text{Maximize} \quad Z = x_1^2 x_2$$
$$x_1^2 + x_2 \le 2$$

(توجه داشته باشید که محدودیتهایی غیرمنفی وجود ندارند).

۱۱- یک سیستم الکترونیکی را در نظر بگیرید که از چهار عنصر تشکیل شده است. عملکرد این سیستم منوط به عملکرد همه این عناصر است. با نصب چند واحد موازی برای هر عنصر می‌توان پایائی[1] سیستم را بهبود بخشید.

1. Reliability

احتمال عملکرد هر عنصر، با فرض داشتن یک، دو و یا سه واحد موازی در جدول زیر نشان داده شده است

تعدادواحدهای موازی	عنصر ۱	عنصر ۲	عنصر ۳	عنصر ٤
۱	۰/۵	۰/٦	۰/۷	۰/۵
۲	۰/٦	۰/۷	۰/۸	۰/۷
۳	۰/۸	۰/۸	۰/۹	۰/۹

احتمال عملکرد سیستم برابربا حاصلضرب احتمالات عملکرد تک‌تک عناصراست.

هزینه نصب یک، دو و یاسه واحد موازی برای هر عنصر (برحسب صددلار) در جدول زیر نشان داده شده است

تعدادواحدهای موازی	عنصر ۱	عنصر ۲	عنصر ۳	عنصر ٤
۱	۲	۳	۲	۳
۲	۳	۵	٤	٤
۳	٤	٦	۵	۵

حداکثر بودجه‌ای که می‌تواند به این امر اختصاص یابد ۱٤۰۰ دلار است.

با استفاده از برنامه‌ریزی پویا تعیین کنید که چند واحد موازی باید برای هر عنصر نصب شود تا احتمال عملکرد سیستم حداکثر شود.

۱۲- مسئله برنامه‌ریزی نیروی انسانی (مثال ٤) را مجدداً با فرض اینکه هزینه تغییر سطح استخدام از یک مرحله به مرحله بعد برابر با ۱۰۰ دلار ضربدر مربع تفاوت دو سطح باشد حل کنید.

۱۳- مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل

کنید.

$$\text{Maximize} \quad Z = 36x_1 + 9x_1^2 - 6x_1^3 + 36x_2 - 3x_2^3$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

۱٤- مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی و عدد صحیح زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\text{Maximize} \quad Z = x_1 x_2^2 x_3^3$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 10$$
$$x_1 \ge 1, \quad x_2 \ge 1, \quad x_3 \ge 1$$

x_1, x_2, x_3 اعداد صحیح

۱۵- مسئله زیر که در آن «هزینه اولیه» منظور شده است را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\text{Maximize} \quad Z = 3x_1 + 7x_2 + f(x_3)$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$$
$$f(x_3) = \begin{cases} 0, & x_3 = 0 \quad \text{اگر} \\ -6 + 6x_3, & x_3 > 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

۱٦- مثال صفحه ۲٦۲ جلد اول را مجدداً در نظر بگیرید. فرض کنید که تجهیزات و سرمایه کافی فراهم شده است و لذا تنها محدودیت مربوط به متخصص است. به این ترتیب، تنها محدودیت کارکردی مسئله عبارت از $x_1 + 2x_2 \le 10$ است. بعد از حذف دو محدودیت دیگر، با استفاده از

برنامه‌ریزی پویا اولین مدلی که برای این مسئله ارائه شد را با مفروضات زیر حل کنید (از برنامه‌ریزی خطی معادل آن صرفنظر کنید).

الف – فرض کنید x_1 و x_2 اعداد صحیح باشند.

ب – فرض کنید x_1 و x_2 فقط غیرمنفی باشند.

۱۷– یک بازیکن قرار است سه دفعه بازی کند. در هر دفعه او می‌تواند هر مبلغی بین صفر تا میزان موجودی پول خود شرط بندی کند. با احتمال ۰/۵ او بازی را می‌برد که در این صورت به اندازه میزان شرط بندی خود نیز برنده می‌شود. به همین ترتیب، در صورت باخت در بازی، پولی که شرط بندی کرده است را نیز می‌بازد. در ابتدا ۳۰ دلار پول دارد و هدفش این است که در پایان ۴۰ دلار داشته باشد. لذا او مایل است سیاست بهینه شرط بندی را تعیین کند به طوری که احتمال اینکه دقیقاً ۴۰ دلار در پایان بازی داشته باشد را حداکثر کند.

با استفاده از برنامه‌ریزی پویا این مسئله را حل کنید.

۱۸– در ابتدای هر یک از سه سال آینده، امکان سرمایه‌گذاری در دو طرح «الف» یا «ب» وجود دارد. فرض کنید برای این منظور ۵۰۰۰ دلار در اختیار باشد. بازده سرمایه‌گذاری هیچ یک از دو طرح قطعی نیست. در سرمایه‌گذاری طرح «الف» یا تمام سرمایه از دست می‌رود و یا اینکه، با احتمال زیاد، ۱۰۰۰۰ دلار بدست می‌آید (سودی معادل ۵۰۰۰ دلار). در سرمایه‌گذاری «ب» یا اصل سرمایه برمی‌گردد و یا با احتمال کم به ۱۰۰۰۰ دلار تبدیل می‌شود. احتمال این رویدادها عبارتند از

طرح	مقدار برگشت	احتمال
الف	۰	۰/۴
	۱۰۰۰۰	۰/۶
ب	۵۰۰۰	۰/۹
	۱۰۰۰۰	۰/۱

هرسال می‌توان حداکثر یک بار در یکی از این دو طرح و به مبلغ ۵۰۰۰ دلار

سرمایه‌گذاری کرد. (پول اضافی که بدست می‌آید راکد خواهد ماند).

الف – با استفاده از برنامه‌ریزی پویا، سیاست سرمایه‌گذاری را طوری تعیین کنید که در پایان سه سال، امید ریاضی پول موجود حداکثر شود.

ب – با استفاده از برنامه‌ریزی پویا، سیاست سرمایه‌گذاری را طوری تعیین کنید که در پایان سه سال، احتمال اینکه دست کم، مبلغ ۱۰۰۰۰ دلار موجود باشد حداکثر شود.

۱۹– مثال ۶ همین فصل را با تغییری مختصر، مجدداً در نظر بگیرید. بعد از تحلیل دقیقتر، احتمال تطبیق کالای ساخته شده با استانداردهای کنترل کیفیت، به جای $\frac{۱}{۲}$ برابر با $\frac{۲}{۳}$ برآورده شده است بدین ترتیب، اگر L عدد کالا تولید شود، احتمال اینکه هیچکدام از آنها با استاندارد کنترل کیفیت تطبیق ننماید برابر با $(\frac{1}{3})^{L}$ خواهد بود. علاوه بر این، مدت زمان موجود تنها کفاف دو دور تولید را می‌دهد. سیاست بهینه تولید را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا تعیین کنید.

۲۰– مثال ۷ را مجدداً در نظر بگیرید. فرض کنید که شرط بندی به این شکل تغییر کرده است «اگر با دو سکه شروع کند، بعد از پنج دور بازی، نمی‌تواند ۵ سکه داشته باشد». سیاست بهینه برای این که این کارشناس در شرط بندی برنده شود را تعیین نمائید.

۲۱– میزان فروش یکی از محصولات شرکتی به ۴ میلیون عدد کمتر ازتولید اقتصادی آن رسیده و موجب زیان گردیده است. ازآنجا که سودنهائی هر واحد محصول ۱ دلار تخمین زده می‌شود، لذا این کاهش فروش به زیانی معادل ۴ میلیون دلار منجر شده است. مدیریت درجستجوی‌راه‌حل‌مناسب‌است، برای رهائی از چنین وضعیتی دو راه حل را در پیش رو دارد. اول اینکه تولید این محصول بلافاصله متوقف شود. این کار مستلزم هزینه‌ای برابر با ۴ میلیون دلار بابت تغییر خط تولید خواهد بود. راه حل دیگر، تبلیغات وسیع در جهت افزایش حجم فروش است. چنانچه تبلیغات هم مؤثر نیفتد، در این صورت تولید این محصول اجباراً باید متوقف شود (که در این صورت هزینه ۴ میلیون دلاری تغییر خط تولید را نیز باید منظور نمود). برنامه‌های

تبلیغاتی برای سه فصل آینده تهیه شده و هزینه آن برای هر فصل ۶ میلیون دلار خواهد بود. در ابتدای هر فصل در صورت لزوم، می‌توان از ادامه تبلیغات صرف‌نظر نمود. در اثر چنین تبلیغاتی، برآورد می‌شود که در سه ماهه اول به میزان ۳ میلیون، در سه ماهه دوم ۲ میلیون و در سه ماهه سوم ۱ میلیون عدد به حجم فروش افزوده گردد. لیکن، حجم فروش را نمی‌توان با قاطعیت پیش‌بینی کرد، زیرا عوامل غیرمنتظره متعددی روی بازار اثر می‌گذارند. مقدار واقعی فروش می‌تواند تا حدود ۲ میلیون عدد (در هر دو جهت مثبت و منفی) با مقدار پیش‌بینی شده متفاوت باشد. برای بیان کمی این موضوع، میزان افزایش فروش سه فصل را متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع یکنواخت فرض می‌کنیم. دامنه تغییرات این متغیرهای تصادفی در سه فصل ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب از ۱ تا ۵ میلیون، از صفر تا ۴ میلیون و از ۱ تا ۳ میلیون عدد خواهد بود. اگر افزایش واقعی فروش ناچیز باشد، تبلیغات متوقف می‌شود و از ادامه تولید این محصول جلوگیری به عمل می‌آید.

چنانچه تبلیغات تا انتها ادامه یابد، برآورد می‌شود که از آن به‌بعد، میزان فروش این محصول تغییر نخواهد کرد. بنابراین، اگر در انتهای آن فصل، حجم فروش باز هم از تولید اقتصادی آن کمتر باشد تولید متوقف می‌شود، ولی بازاء فروش هر واحد محصول بالاتر از این حد، سودی معادل ۸ دلار بدست می‌آید.

با استفاده از برنامه‌ریزی پویا و به منظور حداکثر کردن امیدریاضی سود، سیاست بهینه را تعیین کنید.

فصل نهم

برنامه‌ریزی عددصحیح

کاربردهای گوناگون برنامه‌ریزی خطی، طی مثالهای متعددی در جلد اول کتاب مطرح گردید. محدودیت عمده‌ای که از گستردگی چنین کاربردهائی می‌کاهد فرض بخش‌پذیری[1] برنامه‌ریزی خطی است (به‌بخش ۳-۲ مراجعه شود). فرض بخش‌پذیری به‌معنای آن است که مقدار یک متغیر تصمیم می‌تواند اعشاری باشد. لیکن، در بسیاری از مسائل واقعی، چنانچه مقادیری غیر از عددصحیح به‌متغیرهای تصمیم داده شود، بی‌معنا خواهد بود، به‌عنوان نمونه، به متغیرهائی نظیر تعداد نفرات و تعداد دستگاه‌ها باید مقادیر عدد صحیح اختصاص داده شود. چنانچه تنها تفاوت فرموله کردن مسئله‌ای با یک مسئله برنامه‌ریزی خطی، در نظر گرفتن محدودیت عدد صحیح باشد، به‌آن برنامه‌ریزی عددصحیح[2] می‌گویند (نام کاملتر آن برنامه‌ریزی خطی عددصحیح[3] است کلمه خطی را معمولاً برای سهولت حذف می‌کنند، مگر اینکه مشخصاً بخواهند آنرا از مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی عددصحیح[4] متمایز نمایند که البته مبحث اخیر خارج از موضوع این کتاب است).

1) Divisibility
2) Integer programming
3) Integer Linear programming
4) Nonlinear Integer programming

تبلیغاتی برای سه فصل آینده تهیه شده و هزینه آن برای هر فصل ۶ میلیون دلار خواهد بود. در ابتدای هر فصل در صورت لزوم، می‌توان از ادامه تبلیغات صرفنظر نمود. در اثر چنین تبلیغاتی، برآورد می‌شود که در سه ماهه اول به میزان ۳ میلیون، در سه ماهه دوم ۲ میلیون و در سه ماهه سوم ۱ میلیون عدد به حجم فروش افزوده گردد. لیکن؛ حجم فروش را نمی‌توان با قاطعیت پیش‌بینی کرد، زیرا عوامل غیرمنتظره متعددی روی بازار اثر می‌گذارند. مقدار واقعی فروش می‌تواند تا حدود ۲ میلیون عدد (در هر دو جهت مثبت و منفی) با مقدار پیش‌بینی شده متفاوت باشد. برای بیان کمی این موضوع، میزان افزایش فروش سه فصل را متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع یکنواخت فرض می‌کنیم. دامنه تغییرات این متغیرهای تصادفی در سه فصل ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب از ۱ تا ۵ میلیون، از صفر تا ۴ میلیون و از ۱ تا ۳ میلیون عدد خواهد بود. اگر افزایش واقعی فروش ناچیز باشد، تبلیغات متوقف می‌شود و از ادامه تولید این محصول جلوگیری به عمل می‌آید.

چنانچه تبلیغات تا انتها ادامه یابد، برآورد می‌شود که از آن به‌بعد، میزان فروش این محصول تغییر نخواهد کرد. بنابراین، اگر در انتهای آن فصل، حجم فروش باز هم از تولید اقتصادی آن کمتر باشد تولید متوقف می‌شود، ولی بازاء فروش هر واحد محصول بالاتر از این حد، سودی معادل ۸ دلار بدست می‌آید.

با استفاده از برنامه‌ریزی پویا و به منظور حداکثر کردن امیدریاضی سود، سیاست بهینه را تعیین کنید.

فصل نهم

برنامه‌ریزی عددصحیح

کاربردهای گوناگون برنامه‌ریزی خطی، طی مثالهای متعددی در جلد اول کتاب مطرح گردید. محدودیت عمده‌ای که از گستردگی چنین کاربردهائی می‌کاهد فرض بخش‌پذیری[1] برنامه‌ریزی خطی است (به‌بخش ۳–۲ مراجعه شود). فرض بخش‌پذیری به‌معنای آن است که مقدار یک متغیر تصمیم می‌تواند اعشاری باشد. لیکن، در بسیاری از مسائل واقعی، چنانچه مقادیری غیر از عددصحیح به‌متغیرهای تصمیم داده شود، بی‌معنا خواهد بود. به‌عنوان نمونه، به متغیرهائی نظیر تعداد نفرات و تعداد دستگاه‌ها باید مقادیر عدد صحیح اختصاص داده شود. چنانچه تنها تفاوت فرموله کردن مسئله‌ای با یک مسئله برنامه‌ریزی خطی، در نظر گرفتن محدودیت عدد صحیح باشد، به‌آن برنامه‌ریزی‌عددصحیح[2] می‌گویند (نام کاملتر آن برنامه‌ریزی خطی عددصحیح[3] است. کلمه خطی را معمولاً برای سهولت حذف می‌کنند، مگر اینکه مشخصاً بخواهند آنرا از مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی عددصحیح[4] متمایز نمایند که البته مبحث اخیر خارج از موضوع این کتاب است).

1) *Divisibility*
2) *Integer programming*
3) *Integer Linear programming*
4) *Nonlinear Integer programming*

مدل ریاضی یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح همان مدل برنامه‌ریزی خطی (بخش ۳-۲) است، فقط یک محدودیت دیگر مربوط به عدد صحیح بودن مقدار متغیرها نیز به‌آن اضافه می‌گردد. چنانچه تنها در مورد تعدادی از متغیرها شرط عدد صحیح بودن ضرورت داشته باشد، به‌آن برنامه‌ریزی عددصحیح‌مختلط[1] می‌گویند. هر گاه بخواهند مسئله‌ای که همهٔ متغیرهای آن عدد صحیح هستند را از یک مسئله برنامه‌ریزی مختلط متمایز سازند به‌آن برنامه‌ریزی عدد صحیح خالص[2] می‌گویند.

برای نمونه، مسئله در و پنجره‌سازی بخش ۱ - ۲ جلد اول را در نظر بگیرید. فرض کنید متغیرهای تصمیم x_1 و x_2 به‌جای اینکه به‌ترتیب نشان دهنده نرخ تولید محصولات ۱ و ۲ باشند، معرف تعداد واحدهائی از این محصولات باشند که باید در یک دورهٔ زمانی مشخص تولید شود که در این صورت، با یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح سر و کار خواهیم داشت. از آنجا که میزان تولید هر دو محصول (درهای شیشه‌ای و پنجره‌های چوبی)، نمی‌تواند اعشاری باشد، لذا مقادیر x_1 و x_2 هم منحصراً می‌توانند اعداد صحیح باشند.

با حذف بخش‌پذیری در برنامه‌ریزی خطی، به گسترهٔ کاربردهای متنوع برنامه‌ریزی عدد صحیح، از نوع مثال فوق، می‌رسیم. لیکن یک زمینهٔ کاربرد دیگر آن که حتی اهمیت بیشتری دارد پرداختن به‌تصمیمهایی از نوع «بله یا نه» است. در چنین مواردی، فقط با دو نوع انتخاب یعنی بله ـ یا نه، روبرو هستیم. به‌عنوان نمونه، آیاپروژه مورد نظر را باید پیاده کرد یا نه؟ آیا سرمایه گذاری مورد نظر را باید انجام داد یا نه؟ آیا محل مورد نظر برای اجرای پروژه مناسب هست یا نه؟

هر تصمیمی که فقط دو انتخاب در پیش داشته باشد را می‌توان بر حسب متغیرهایی بیان کرد که فقط دو مقدار، یعنی صفر و یک را انتخاب می‌کنند. از این رو،

1) Mixed Integer programming

2) Pure Integer programming

jامین متغیر تصمیم از نوع بله ـ یا نه را با x_j نشان می‌دهیم، به‌طوری که

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر تصمیم } j \text{ بله باشد.} \\ 0 & \text{اگر تصمیم } j \text{ نه باشد.} \end{cases}$$

به‌چنین متغیرهایی، متغیرهای دوتایی[1] (یا متغیرهای صفر و یک) می‌گویند. در نتیجه، به‌مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح که فقط شامل چنین متغیرهایی باشند، مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح صفر و یک (بادوتایی[2]) گفته می‌شود.

در بخش ۱ - ۹، یک نمونه کوچک از مسائل برنامه‌ریزی صفر و یک ارائه می‌گردد. فرموله کردن مسائل دیگر، با استفاده از متغیرهای صفر و یک در بخش ۲ - ۹ مورد بررسی قرار می‌گیرد. بخشهای دیگر این فصل به‌روشهای حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح و برنامه‌ریزی صفر و یک (بخش ۵-۹) و همچنین برنامه‌ریزی مختلط (بخش ۶-۹) اختصاص می‌یابد.

۱ - ۹ مثال نمونه

یک شرکت تولیدی تصمیم دارد تا به‌منظور توسعه فعالیتهای خود، کارخانه جدیدی در یکی از دو شهر «الف» یا «ب» ایجاد نماید. در شهری که برای این منظور انتخاب می‌شود، می‌توان انبار جدیدی نیز احداث کرد. در ستون چهارم جدول ۱ - ۹، ارزش خالص فعلی هر کدام از این انتخابها و در ستون آخر آن، سرمایه گذاری مورد نیاز نشان داده شده است. حداکثر بودجه‌ای که می‌تواند به‌این امر اختصاص یابد معادل ۲٤ میلیون دلار برآورد می‌گردد. هدف مسئله، تعیین ترکیبهای موجه انتخابهایی است که ارزش خالص فعلی را حداکثر نماید.

1) Binary Variable

2) Binary Integer programming (BIP)

جدول ۱-۹ اطلاعات مربوط به مثال شرکت تولیدی

شماره تصمیم	سئوال مربوط به بله-نه	متغیر تصمیم	ارزش خالص فعلی	سرمایه مورد نیاز
۱	کارخانه در شهر «الف» ساخته شود؟	x_1	۷ میلیون	۲۰ میلیون
۲	کارخانه در شهر «ب» ساخته شود؟	x_2	۵ میلیون	۱۵ میلیون
۳	انبار در شهر «الف» ساخته شود؟	x_3	۴ میلیون	۱۲ میلیون
۴	انبار در شهر «ب» ساخته شود؟	x_4	۳ میلیون	۱۰ میلیون

هر چند که این مسئله آنقدر کوچک است که جواب مورد نظر را به‌سادگی می‌توان مشخص کرد (ساختن کارخانه و انبار در شهر ب)، اما منظور ما نشان دادن چگونگی فرموله کردن مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح است. تمام متغیرهای تصمیم به‌شکل (۰ و ۱) هستند.

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر تصمیم } j \text{ بله باشد} \\ 0 & \text{اگر تصمیم } j \text{ نه باشد} \end{cases} \qquad (j = 1,2,3,4)$$

از آنجا که دو تصمیم اول از نوع گزینه‌های ناسازگار[1] هستند (شرکت فقط می‌خواهد یک کارخانه بسازد) لذا به‌محدودیت زیر نیاز است

$$x_1 + x_2 = 1$$

به‌همین ترتیب، تصمیمهای ۳ و ۴ هم از نوع گزینه‌های ناسازگار هستند (شرکت حداکثر فقط به‌یک انبار نیاز دارد) که در نتیجه، به‌محدودیت زیر منتهی می‌شود

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

به‌علاوه، تصمیمهای ۳ و ۴ از نوع تصمیمهای وابسته[2] هستند، زیرا به ترتیب به‌تصمیمهای ۱ و ۲ بستگی دارند (ساختن انبار در یک شهر منوط به‌ایجاد کارخانه در همان شهر است). این شرط با استفاده از محدودیتهای زیر بیان می‌گردد

$$x_3 - x_1 \leq 0$$
$$x_4 - x_2 \leq 0$$

زیرا، باعث می‌شود که اگر $x_1 = 0$ گردد، خود بخود $x_3 = 0$ بشود. همچنین، به‌ازاء $x_2 = 0$ نیز، $x_4 = 0$ به‌دست می‌آید.
بنابراین، شکل کامل مدل به‌صورت زیر خواهد بود

$$\text{Maximize} \quad Z = 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4$$
$$20x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 10x_4 \leq 25$$
$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_j \ \text{عددصحیح} \qquad j = 1,2,3,4$$

1) *Mutually exclusive alternatives* 2) *Contingent Decisions*

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & & x_3 + & x_4 \le & 1 \\
-x_1 & & + \; x_3 & \le & 0 \\
 & -x_2 & & + x_4 \le & 0 \\
x_j \ge 0 & & & x_j \le & 1 \\
\end{array}
$$

$$x_j = \text{عدد صحیح} \quad j = 1,2,3,4 \quad \text{بازاء}$$

محدویت زیر را می‌توان جایگزین سه سطر آخر مدل کرد.

به‌علاوه، محدودیت سوم، یعنی $x_3 + x_4 \le 1$ یک محدودیت زائد است و می‌توان آنراحذف کرد، زیرا از محدودیتهای دوم، چهارم و پنجم بدست می‌آید.

این مثال از هر حیث، به‌استثنای اندازهٔ آن، مثالی نوعی از کاربردهای واقعی برنامه‌ریزی عدد صحیح است. تصمیمهایی که باید اتخاذ شود از نوع بله ـ یا ـ نه است. غالباً، گروهی از متغیرهای تصمیم معرف گزینه‌های ناسازگار هستند، بدین معنی که فقط پاسخ یکی از تصمیمهای این گروه می‌تواند بله باشد. هر زوج از متغیرهای مثال فوق را می‌توان نمونه‌هایی از این دست به‌حساب آورد. برای هر گروه، لزوماً باید محدودیت جدیدی در مورد متغیرهای صفر و یک آن گروه اضافه شود. مجموع این متغیرها می‌تواند یا مساوی یک باشد (اگر دقیقاً یکی از متغیرها بله باشد) و یا کوچکتر یا مساوی باشد (اگر حداکثر یکی از متغیرها بله باشد).

در مواردی نیز با تصمیمهای وابسته سر و کار داریم که بستگی به‌تصمیمهای دیگری دارند. به‌طور مشخص، فقط در صورت بله بودن تصمیم دیگری که به‌آن وابسته‌اند، خود می‌توانند بله باشند. مثلاً اگر متغیر وابسته‌ای، معرف پی گیری انجام کاری باشد و تصمیم گرفته شود که آن کار انجام نگیرد، بدیهی است که پی گیری نیز بی‌معنی و یا اساساً غیر ممکن خواهد بود. محدودیتی که برای بیان متغیرهای وابسته به کار گرفته می‌شود به‌همان شکل محدودیتهای چهارم و پنجم مثال نمونه است.

۲ ـ ۹ نمونه‌های دیگر فرموله کردن با استفاده از متغیرهای صفر و یک

تصمیمهای مثال نمونه اصولاً از نوع بله ـ یا ـ نه بودند، که در نتیجه، بر حسب متغیرهای صفر و یک بیان گردیدند. این نوع متغیرها، در زمینه‌های دیگر نیز برای فرموله کردن مسائل پیچیده به کار گرفته می‌شوند. به‌طور مشخص، با استفاده از این گونه متغیرها، مسئله‌ای که مدل آن به‌آسانی قابل حل نیست را می‌توان به‌یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح یا مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط مبدل ساخت.

چنین حالتی وقتی پیش می‌آید که مدل مسئله، به‌استثنای وجود برخی از روابط ترکیبی، در چارچوب برنامه‌ریزی خطی یا برنامه ریزی عدد صحیح قرار می گیرد. این روابط ترکیبی بر حسب سئوالاتی که جوابهای آنها فقط می‌تواند بله ـ یا ـ نه باشد بیان می‌شوند. متغیرهای کمکی از نوع صفر و یک، وظیفه بیان چنین سئوالاتی را به عهده می گیرند. معرفی این متغیرها، مسئله را به‌یک برنامه‌ریزی مختلط (یا برنامه‌ریزی عدد صحیح خالص، در صورتی که مسئله اصلی هم همین نوع باشد) تبدیل می‌نماید.

در قسمت بعدی، مواردی از این نوع برخورد بررسی می‌شود. در این مثالها، x_j نشان دهنده متغیرهای اصلی (که ممکن است متغیرهای پیوسته و یا عدد صحیح باشند) و y_i معرف متغیرهای کمکی از نوع صفر و یک، برای فرموله کردن مجدد مسئله هستند.

محدودیتهای «این ـ یا ـ آن»[1]

حالت مهمی را در نظر بگیرید که در مسئله‌ای، از بین دو محدودیت موجود می‌توان یکی را انتخاب کرد ولی لزومی ندارد که هر دو محدودیت برقرار باشد. به‌عنوان نمونه،

1) Either- or Constraints

برای تحقق هدف خاصی، یکی از دو منبع ممکن را می‌توان به کار گرفت. از این‌رو، کافی است که فقط یکی از دو محدودیت، که هر کدام به‌یکی از دو منبع مربوط می شوند، صدق نماید. برای روشن شدن نحوه برخورد با این گونه موارد، فرض کنید که در مسئله‌ای، یکی از دو محدودیت زیر باید برقرار باشد

$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$

$$x_1 + 4x_2 \le 16$$

برای آنکه تمام محدودیتهای فوق در چارچوب برنامه ریزی خطی قرار گیرند، لازم است که مسئله مجدداً فرموله شود. با استفاده از عدد فوق‌العاده بزرگ M، می‌توان محدودیتهای فوق را به‌صورت زیر بیان کرد

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1 + 4x_2 \le 16 + M \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 18 + M \\ x_1 + 4x_2 \le 16 \end{cases}$$

اضافه کردن M در سمت راست یک محدودیت، عملاً آنرا حذف می‌کند، زیرا هر جوابی که در سایر محدودیتها صدق کند، خود به‌خود در این محدودیت نیز صادق خواهد بود (فرض می‌شود که جوابهای مرجه، مجموعه‌ای محدود را تشکیل می‌دهند و در ضمن به‌علت بزرگی M، هیچ جواب موجهی حذف نمی‌شود). روابط فوق با محدودیتهای زیر معادل هستند

$$3x_1 + 2x_2 \le 18 + yM$$
$$x_1 + 4x_2 \le 16 + (1 - y)M$$

زیرا چون متغیر کمکی باید یا یک و یا صفر باشد لذا یکی از محدودیتهای اصلی برقرار می گردد و محدودیت دیگر عملاً حذف می‌شود. از این رو، این محدودیتها نیز به‌سایر محدودیتها افزوده شده و یک مسئله برنامه‌ریزی مختلط یا عدد صحیح خالص بدست می‌آید.

آنچه قبلاً در مورد روابط ترکیبی که باید بر حسب سئوالاتی با جوابهای بله ـ یا ـ نه بیان کردند گفته شد، در قالب برخورد فوق حل می‌شود. بدین معنا که سایر محدودیتهای مدل ابتدا با دو محدودیت گزینه اول و سپس با دومحدودیت گزینه‌دوم ترکیب می‌شود. کدامیک از این دو ترکیب بهتر هستند (با در نظر گرفتن مقدار تابع هدف)؟ سئوال مورد نظر را می‌توان بر حسب جملات بله ـ یا نه به‌شرح زیر بیان نمود.

۱ ـ آیا محدودیت $x_1 + 4x_2 \le 16$ باید صدق کند؟

۲ ـ آیا محدودیت $3x_1 + 2x_2 \le 18$ باید صدق کند؟

از آنجا که دقیقاً باید به‌یکی از این دو سئوال پاسخ مثبت داد لذا، متغیرهای صفر و یک y و $(1 - y)$، که مجموع آنها همیشه $y + (1 - y) = 1$ است را به‌ترتیب، به‌منظور بیان تصمیمهای فوق در نظر می گیریم. می‌توانستیم، به‌جای این متغیرها، متغیرهای y_1 و y_2 را انتخاب کنیم که در این صورت محدودیت $y_1 + y_2 = 1$ نیز باید اضافه شود تا آنها را ناسازگار نماید.

حالت تعمیم یافته مسئله فوق باروش عمومی زیرفرموله می‌شود.

حالتی که K محدودیت از بین N محدودیت باید برقرار باشند

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که در قسمتی از مدل، N محدودیت وجود دارد و فقط باید K محدودیت از آنها صدق نماید (بافرض $K < N$). در اینجا، انتخاب K محدودیت که بهترین مقدار را برای تابع هدف بهبار آورد، بخشی از فرایند بهینه سازی است. تعداد (N - K) محدودیت که انتخاب نمی‌شوند، در واقع از مسئله حذف

می‌گردند، اگر چه ممکن است جوابهایی که از بقیه محدودیتها به‌دست می‌آید تصادفاً در آنها هم صدق نماید.

مسئله قبلی، با $K = 1$ و $N = 2$، حالت خاص این مورد بود. فرض کنید که محدودیتها به‌شکل زیر باشند

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) \le d_1$$
$$f_2(x_1,x_2,\dots,x_n) \le d_2$$

با همان منطقی که در حالت قبلی مطرح شد، فرموله کردن مسئله، دقیقاً معادل است با اینکه K محدودیت از محدودیتهای زیر، برقرار باشد.

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) \le d_1 + My_1$$
$$f_2(x_1,x_2,\dots,x_n) \le d_2 + My_2$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = N - K$$

$y_i = 0$ یا 1 $\quad i = 1,2,\dots,N$ بازاء

M عدد فوق‌العاده بزرگی است. از آنجا که محدودیتهای مربوط به y_i ایجاب می‌کند که K عدد از این متغیرها صفر و بقیه یک باشند، لذا K عدد از محدودیتهای اصلی هم بدون تغییر برقرار خواهند بود و بقیه آنها بی‌اثر و در واقع حذف می‌شوند. اینکه کدام K محدودیت انتخاب شود، جزئی از الگوریتم است که از بین تمام جوابهای موجه، جواب بهینه را انتخاب می‌کند.

توابع با N مقدار محتمل

حالتی را در نظر بگیرید که تابع مشخصی باید یکی از N مقدار معلوم را انتخاب کند.

این شرط به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = d_1, \quad \text{یا} \quad d_2,\dots, \quad \text{یا} \quad d_N$$

در حالت خاص، تابع فوق می‌تواند یک تابع خطی باشد یعنی

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

حالت خاص دیگر وقتی است که تابع فوق به‌شکل $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_j$ باشد و در نتیجه لازم است که x_j یکی از N مقدار مشخص را انتخاب نماید.

برای آنکه شرط فوق در قالب برنامه‌ریزی عدد صحیح قرار گیرد، از فرموله کردن زیر استفاده می‌شود

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{N} d_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1$$

$y_i = 0$ یا 1 $\quad i = 1,2,\dots,N$ بازاء

در نتیجه، این مجموعه جدید محدودیتها، جایگزین شرط مورد نظر خواهد شد. زیرا دقیقاً یکی از y_i ها برابر با یک و بقیه برابر با صفر هستند. بهاین ترتیب، فقط یکی از d_i ها انتخاب می‌شود و مقدار تابع نیز برابر با همین مقدار خواهد شد. در این حالت، N سوال از نوع بله – یا – نه مطرح می‌شود. بهاین معنی که آیا مقدار d_i انتخاب شود یا نه (بهازای $i = 1, 2, \dots N$)؟ هر y_i بیانگر یکی از این تصمیمهایی است که معادله دوم آنها را ناسازگار می‌نماید.

برای تشریح این حالت، مجدداً مسئله در و پنجره‌سازی بخش ۱ - ۲ را در نظر بگیرید. در حال حاضر، هیجده درصد کل ظرفیت کارخانه آزاد است که می‌توان از آن برای تولید دو محصول جدید، و یا محصولات بالقوه دیگری که شاید در آینده مطرح شود، بهره گرفت. فرض کنید، برای آنکه بتوان در آینده از این ظرفیت به بهترین وجه

استفاده نمود لازم است که در حال حاضر ۶ یا ۱۲ یا ۱۸ درصد ظرفیت به کار گرفته شود. بنابراین، محدودیت سوم مسئله اصلی (یعنی $3x_1 + 2x_2 \le 18$) به‌محدودیت زیر تبدیل می‌گردد.

$$3x_1 + 2x_2 = 6 \quad \text{یا} \quad 12 \quad \text{یا} \quad 18.$$

در اینجا $N = 3$، $d_1 = 6$، $d_2 = 12$، و $d_3 = 18$ است. لذا، این محدودیت به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$3x_1 + 2x_2 = 6y_1 + 12y + 18y_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \quad 0 \text{ یا } 1$$

بدین ترتیب، مدل کلی مسئله نظیر مدل قبلی است، با این تفاوت که محدودیتهای فوق جایگزین محدودیت سوم می‌شود. مدل حاضر، یک مسئله برنامه‌ریزی مختلط است.

مسئله هزینه ثابت

عملیات تولید، معمولاً مستلزم صرف هزینه‌ثابت[1]، یا هزینه راه‌اندازی[2] است. به‌عنوان نمونه، برای تولید محصولی باید تجهیزات مربوطه تنظیم و راه اندازی شود، که این عمل هزینه‌هایی در بر خواهد داشت. در چنین حالاتی، مجموع هزینه متغیر (متناسب با حجم فعالیت) و هزینه ثابت (برای راه‌اندازی آن)، کل هزینه این فعالیت را تشکیل می‌دهد. غالباً هزینه متغیر تقریباً با حجم فعالیت متناسب است. (بنابراین اگر x_j معرف حجم فعالیت شماره j و k_j معرف هزینه راه‌اندازی آن و

1) Fixed Charge

2) Set Up Cost

c_j معرف هزینه انجام هر واحد از این فعالیت باشد، هزینه کل برابر خواهد بود با

$$f_j(x_j) = \begin{cases} k_j + c_j x_j & x_j > 0 \quad \text{اگر} \\ 0, & x_j = 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

چنانچه هزینه راه‌اندازی مطرح نباشد، سطح بهینه فعالیتها با کمک برنامه‌ریزی خطی تعیین می‌شود. لیکن، خوشبختانه حتی با وجود k_j، باز هم می‌توان برنامه‌ریزی عددصحیح را برای این منظور به کار گرفت.

فرض کنید، در مدلی با n فعالیت، هزینه ثابت برای راه‌اندازی بعضی از فعالیتها مثبت باشد $k_j > 0$. فرموله کردن مسئله در حالت کلی، به‌شکل زیر در می‌آید

$$\text{Minimize} \quad Z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n)$$

در رابطه با

محدودیتهای برنامه‌ریزی خطی

برای اینکه این مسئله در چارچوب یک مسئله برنامه‌ریزی مختلط قرار گیرد، از n سوال، با جوابهای بله یا نه، شروع می‌کنیم. آیا فعالیت j (به‌ازاء $j = 1, 2, \ldots, n$) باید اجراء شود یا نه؟ (آیا $x_j > 0$ باشد؟). هر کدام از این تصمیمها با یک متغیرصفرویک، y_j بیان می‌شود. به‌این ترتیب

،

که

$$y_j = \begin{cases} 1, & x_j > 0 \quad \text{اگر} \\ 0, & x_j = 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

بنابراین، y_j ها متغیرهایی وابسته، شبیه آنچه که قبلاً در بخش ۱-۹ بیان گردید، هستند (البته نه کاملاً معادل آن). فرض کنید که M عدد مثبت فوق‌العاده بزرگی باشد که از حداکثر مقادیر موجه همه متغیرهای x_j (به‌ازاء $j = 1,2,\dots,n$) بزرگتر است. آنگاه، محدودیت زیر تضمین می‌کند که چنانچه $x_j > 0$ باشد، لزوماً y_j برابر با یک خواهد بود و نمی‌تواند صفر گردد

$$x_j \le My_j \qquad \text{بازاء} \quad j = 1,2,\dots,n,$$

تنها اشکالی که هنوز باقی‌مانده این است که اگر $x_j = 0$ باشد، مقدار y_j می‌تواند هم صفر و هم یک گردد. خوشبختانه، این مشکل نیز در اثر ماهیت تابع هدف خود به‌خود برطرف می‌گردد. از بررسی حالتی که $k_j = 0$ است صرف‌نظر می‌شود زیرا در این صورت y_j از مدل حذف می‌گردد. بنابراین، فقط حالت دیگر، یعنی $k_j > 0$ را در نظر بگیرید. اگر $x_j = 0$ باشد، از بین دو انتخاب یعنی $y_j = 0$ و $y_j = 1$ اولی انتخاب می‌شود زیرا در این صورت مقدار تابع هدف کمتر خواهد شد. به‌طور خلاصه، فرموله کردن این مسئله معادل است با

$$\text{Minimize} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} (c_j x_j + k_j y_j)$$

در رابطه با محدودیتهای اصلی مسئله

$$x_j - My_j \le 0$$

برای تشریح این نحوه برخورد، مسئله کنترل آلودگی هوا در بخش ۴ - ۲ را مجدداً در نظر بگیرید. در اولین روش، یعنی روش افزایش طول دودکشها، علاوه بر هزینه متغیر که متناسب با میزان افزایش است، هزینه‌ثابت قابل توجهی نیز وجود دارد. این هزینه مربوط به‌راه‌اندازی و تهیه و تدارک افزایش طول دودکشهاست. فرض کنید،

هزینه راه‌اندازی این روش برای کوره بلند و با کوره باز ۲ میلیون دلار برآورد می‌شود، هزینه‌های متغیر همان مقادیری است که در جدول ۱ - ۲ نشان داده شده‌اند. به‌این ترتیب، $k_1 = 2$ ، $k_2 = 2$ ، $c_1 = 8$ ، $c_2 = 10$ خواهد بود. چون در سایر روشها هزینه راه‌اندازی وجود ندارد، لذا به‌ازای $j = 3,4,5,6$ ، $k_j = 0$ خواهد بود. در نتیجه، فرموله کردن مسئله در قالب برنامه‌ریزی مختلط به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\text{Minimize} \quad Z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 9x_6 + 2y_1 + 2y_2$$

در رابطه با محدودیتهای مسئله که در بخش ۴ - ۲ ارائه شد

$$x_1 - My_1 \le 0$$
$$x_2 - My_2 \le 0$$
$$y_1, y_2 \quad 0 \text{ یا } 1$$

قبل از آنکه بحث فرموله کردن مسائل با استفاده از متغیرهای صفر و یک را به‌پایان برسانیم، لازم است که یک نکته را مطرح نمائیم. در این روش، گاهی ضرورت ایجاب می‌کند که تعداد بسیار زیادی از این نوع متغیرها اضافه شود، به‌طوری که حل مسئله از نظر محاسباتی عملاً غیر ممکن می‌گردد. در قسمت بعد خواهیم دید که حل مسائلی که دهها متغیر صفر و یک داشته باشند بسیار مشکل است.

۳-۹ دیدگاههائی درباره حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح

عدد صحیح < خطی

تنها تفاوت یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح با مسئله برنامه‌ریزی خطی این است که تعداد جوابهای آن به مراتب کمتر است. در واقع، تعداد جوابها تضمین می‌کند که دسترسی به جواب بهینه آسان است. در واقع، عدد متناهی می‌تواند به طور نجومی بزرگ باشد. مثلاً، یک برنامه‌ریزی عدد صحیح با متغیرهای صفر و یک را در نظر بگیرید. اگر این مسئله دارای n متغیر باشد، تعداد جوابها 2^n خواهد بود (البته،

بعضی از جوابها که در محدودیتها صدق نکنند در بررسی‌های بعدی کنار گذاشته می‌شوند). اگر یک واحد به n اضافه شود، تعداد جوابها دوبرابر می‌گردد. از این رو، اصطلاحاً گفته می‌شود که پیچیدگی مسئله با رشدنمائی[1] افزایش می‌یابد. اگر $n = 10$ باشد، بیش از هزار (دقیقاً ۱۰۲۴) جواب و با $n = 20$، بیش از یک میلیون و با $n = 30$ بیش از یک میلیارد جواب وجود دارد. از این رو، حتی سریعترین کامپیوترها نیز قادر به شمارش[2] همه جوابهای مسئله‌ای که فقط دهها متغیر داشته باشد نخواهد بود (منظور از شمارش، بررسی، موجه بودن یا نبودن هرجواب، و در صورت موجه بودن، محاسبه مقدار تابع هدف بازاء آن جواب است). این مشکل، در مورد حالت کلی برنامه‌ریزی عدد صحیح جدی‌تر می‌شود. هرچند، الگوریتمهای پیشرفته‌ای توسعه یافته‌اند که می‌توانند تا حدودی بهتر از شمارش عمل نمایند و در بخشهای بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرند، لیکن به علت رشدنمائی پیچیدگی، حتی این الگوریتمها هم کلاً نمی‌توانند مسائلی را حل کنند که بیش از دهها متغیر صفر و یک و یا عدد صحیح داشته باشند.

اشتباه دوم در مورد آسان بودن حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح این است که حذف قسمتی از منطقه موجه برنامه‌ریزی خطی (جوابهای غیرعدد صحیح) حل آنرا آسانتر می‌سازد. برعکس، وجود همین جوابهای موجه برنامه‌ریزی خطی تضمین می‌نماید که جواب بهینه بریکی از گوشه‌های منطقه موجه (مجموعه جوابهای اساسی) منطبق باشد (به بخش ۱−۳ مراجعه شود). نکته اصلی در کارائی روش سیمپلکس وجود همین حقیقت است. در نتیجه، حل مسائل برنامه‌ریزی خطی به مراتب آسانتر از مسائل برنامه ریزی عدد صحیح است.

نتیجتاً، موفقترین الگوریتمهای حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح در صورت امکان، از روش سیمپلکس استفاده می‌کنند. برای انجام این کار، قسمتهائی از مسئله را با یک مسئله برنامه‌ریزی خطی متناظر با آن (یعنی مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح که

1) *Exponential Growth*   2) *Enumeration*

محدودیتهای عدد صحیح آن حذف شده باشد) مرتبط می‌سازند. چنین مسئله‌ای را اصطلاحاً **برنامه‌ریزی خطی آزادشده**[1] می‌نامند. در بخش ۶−۹، نشان داده می‌شود که برای حل مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح می‌توان یک رشته برنامه‌ریزی‌های خطی را به کار گرفت. چنانچه جواب بهینه یک برنامه‌ریزی خطی آزاد شده عدد صحیح باشد، آنگاه چنین جوابی برای برنامه‌ریزی عدد صحیح هم بهینه است. زیرا این جواب در بین جوابهای موجه برنامه‌ریزی خطی آزاد شده که مسلماً شامل تمام جوابهای موجه برنامه‌ریزی عدد صحیح هم می‌شود، از همه بهتر است. از این رو، هر الگوریتم برنامه‌ریزی عدد صحیح، ابتدا با حل مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده شروع می‌گردد. آنگاه، بررسی می‌شود که آیا جواب بدست آمده عدد صحیح است یا خیر؟

اگرچه به ندرت پیش می‌آید که جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی آزاد شده عدد صحیح باشد، لیکن، در چند حالت خاص چنین موردی حتماً اتفاق می‌افتد. دو نمونه از این حالتها را قبلاً در فصل چهارم دیده‌اید، یکی مسئله حمل و نقل (در حالتی که تمام مقادیر مربوط به عرضه و تقاضا عدد صحیح باشند) و مورد دیگر مسئله کارگماری[2] است. این مسائل دارای ساختار ویژه‌ای هستند که تضمین می‌کند تمام جوابهای اساسی آنها عدد صحیح باشد. نتیجتاً، می‌توان با حالتهای خاص برخوردی شبیه مسائل برنامه‌ریزی خطی داشت (به همین دلیل، در فصل چهارم این گونه عمل شد). زیرا با روشهای ساده شده سیمپلکس می‌توان آنها را کاملاً حل کرد.

اگرچه ساده کردن مسئله تا حد مسائل خاص فوق ناممکن است، اما در عمل، بسیاری از مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح دارای ساختار ویژه‌ای هستند که برای ساده کردن مسئله به کار گرفته می‌شوند. گاهی، گونه‌هائی از این مسائل که خیلی بزرگ هستند را می‌توان با موفقیت حل کرد. در برنامه‌ریزی عدد صحیح، الگوریتمهائی که مشخصاً با بهره‌گیری از ساختارهای ویژه طراحی شده‌اند به طور روزافزون اهمیت پیدا می‌کنند.

1) *Linear Proggramming- Relaxation*   2) *Assignment problem*

با توجه به آنچه گفته شد، پیچید گی محاسبات یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح به دو عامل بستگی دارد که عبارتند از

الف– تعدادمتغیرهای عدد صحیح

ب– ساختار مسئله

این عوامل با عامل پیچید گی در برنامه‌ریزی خطی، که تعداد محدودیتهای کارکردی باشد، متفاوت است. در برنامه‌ریزی عدد صحیح هم اگر چه تعداد محدودیتها (به خصوص، برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده) مهم است، اما نسبت به دو عامل فوق اهمیت کمتری دارد. در حقیقت، گاهی افزایش تعداد محدودیتها باعث کاهش حجم محاسبات می‌شود، زیرا از تعداد جوابهای موجه می کاهد. در مورد برنامه‌ریزی مختلط، تعداد متغیرهای عدد صحیح بیش از تعدادکل متغیرها اهمیت دارد، زیرا متغیرهای پیوسته تقریباً اثری روی میزان محاسبات ندارند.

از آنجا که حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح عملاً بسیار مشکلتر از حل مسائل برنامه‌ریزی خطی است، لذا گاهی منطقی به نظر می‌رسد که با حذف محدودیتهای عدد صحیح، مسئله را به برنامه‌ریزی خطی آزاد شده تبدیل ساخت و سپس آنرابا‌روش‌سیمپلکس حل و جوابها را گرد کرد. چنین روشی ممکن است برای بعضی از مسائل کاربردی، بخصوص اگر مقادیر متغیرها به اندازه کافی بزرگ باشند مناسب باشد، لیکن باید از وجود دو اشکال در این روش آگاه بود.

یک مشکل این است که جواب بهینه‌ای که گرد شود شاید دیگر موجه نباشد. غالباً تشخیص اینکه گرد کردن جواب در کدام جهت باعث می‌شود که جواب همچنان موجه بماند کار دشواری است. گاهی، حتی ضرورت ایجاب می کند که برای گرد کردن بعضی از متغیرها، مقدار آنها را به اندازه یک واحد و یا حتی بیشتر تغییر داد. برای روشن شدن موضوع، فرض کنید که بعضی از محدودیتها به شرح زیربودهو جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی آزاد شده آن $x_1 = 6\frac{1}{2}, x_2 = 10$ باشد.

$$-x_1 + x_2 \le 3\frac{1}{2} \qquad x_1 + x_2 \le 16\frac{1}{2}$$

باید توجه داشت که با گردکردن x_1 به ٦ یا ٧ (یا هر عدد صحیح دیگر) نمی‌توان موجه بودن جواب را حفظ کرد. تنها با تغییر x_2 امکان دارد که جوابی موجه بدست آورد. حال، می‌توان تصور کرد که اگر تعداد متغیرها و محدودیتها به دهها وصدها افزایش یابد با چه مشکلاتی مراجهه خواهیم شد.

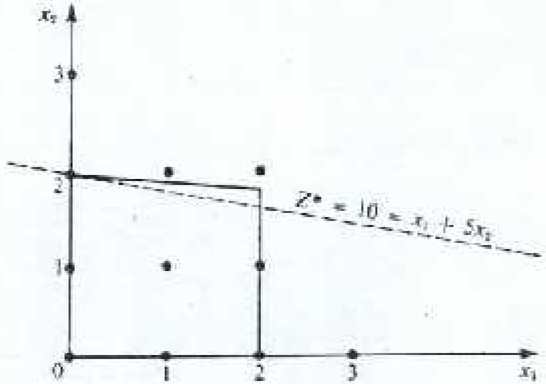
حتی اگر بتوان جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی آزاد شده را هم به راحتی گرد کرد، مشکل دیگری نیز می‌تواند وجود داشته باشد. هیچ تضمینی نیست که چنین جواب گردشده‌ای باز هم بهینه باشد. در واقع، مقدار تابع هدف مربوط به این جواب، ممکن است اختلاف زیادی با مقدار تابع هدف جواب بهینه داشته باشد. این موضوع را با استفاده از مثال زیر نشان می‌دهیم

$$\text{Maximize} \quad Z = x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 10x_2 &\le 20 \\ x_1 \qquad &\le 2 \\ x_1 \ge 0 \qquad & x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \qquad & \text{عددصحیح} \end{aligned}$$

چون مسئله فقط دارای دو متغیر تصمیم است، لذا، با استفاده از شکل ۱–۹ آنرا به صورت ترسیمی بررسی می کنیم. جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی مربوطه را می‌توان با روش ترسیمی یا روش سیمپلکس بدست آورد که $x_1 = 2$ ، $x_2 = 9/5$ و $Z = 11$ است. چنانچه حل ترسیمی مسئله مقدور نباشد (که در مورد مسایل با بیش از دو متغیر چنین است)، متغیری که مقدارش عدد صحیح نیست، یعنی $x_2 = 9/5$ ، را معمولاً به عدد صحیح $x_2 = 1$ گرد می کنند. جواب حاصل $x_1 = 2, \; x_2 = 1$ و $Z = 7$ است. توجه کنید که این جواب با جواب بهینه، یعنی $(x_1, x_2) = (0, 2)$ و $Z = 10$ اختلاف زیادی دارد.

به علت وجود مشکل فوق، روش مناسب در مورد مسائل عدد صحیح بسیار



شکل ۱-۹ حل ترسیمی مسئله برنامه‌ریزی عددصحیح

بزرگ این است که به جای حل دقیق آنها، از یکی از الگوریتمهای ابتکاری[1] استفاده شود. اگرچه کارآئی این نوع الگوریتمها برای حل مسائل بزرگ بسیار بالاست، ولی تضمینی وجود ندارد که بتوان جواب بهینه را بدست آورد. معذلک، به نظر می‌رسد که کارآئی این الگوریتمها، از کارآئی روش گردکردن جوابهای بهینه به مراتب بالاتر باشد.

در حال حاضر، الگوریتمهای متعددی وجود دارند که می‌توانند جواب بهینه مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح را بدست آورند، مشروط بر آنکه به اندازه کافی کوچک باشند. متاسفانه، کارآئی هیچکدام از این روشها از نظر محاسباتی، قابل مقایسه با روش سیمپلکس نیست (به جز مسائل حالتهای خاص). از این رو، تحقیقات در زمینه توسعه الگوریتمهای حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح به طرز چشمگیری در جریان است و مرتباً پیشرفتهائی نیز بدست می‌آید.

1) *Heuristic*

متداولترین الگوریتم برای حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح، فن انشعاب و تحدید[1] است که نکته اصلی در آن، شمارش ضمنی[2] جوابهای موجه است. بخش بعدی به بررسی کلیات روش انشعاب و تحدید اختصاص می‌یابد. در بخش ۵-۹، الگوریتمی از نوع انشعاب و تحدید برای حل مسائل برنامه‌ریزی صفر و یک ارائه خواهد شد. الگوریتم دیگری از همین نوع نیز در بخش ۶-۹ برای حل مسائل مختلط بررسی می‌شود.

۴-۹ انشعاب و تحدید

چون تعداد جوابهای موجه یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح محدود، عددی متناهی است، لذا طبیعی بنظر می‌رسد که برای پیدا کردن جواب بهینه آن از روشی شمارشی[3] استفاده شود. همان طور که گفته شد، تعداد جوابهای موجه اگرچه متناهی است ولی متاسفانه عملاً عددی بسیار بزرگ خواهد بود. لذا، هر روش شمارشی که به کار گرفته می‌شود باید آگاهانه طوری طراحی گردد که تنها درصد کوچکی از جوابهای موجه را بررسی نماید. برای نمونه، برنامه‌ریزی پویا (فصل هشتم)، نوعی از چنین فرایند شمارشی است که برای حل بسیاری از مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرد، اما کارآئی آن برای حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح بالا نیست. فن انشعاب و تحدید[4] نیز نوعی

1) *Branch and Bound* 2) *Implicit Enumeration*

3) *Enumeration Procedure*

۴- در اکثر کتابها، موقعی که صحبت از انشعاب و تحدید می‌شود، منظور الگوریتمی است که برای حل مسائل برنامه‌ریزی مختلط *(Mixed Integer Programming)* به کار گرفته می‌شود. لیکن، آنچه در این بخش تحت عنوان فن انشعاب و تحدید ارائه می‌شود روشی کلی‌تر و برای حل مسائلی است که به طور کلی دارای متغیرهای گسسته باشند. روش حل مسائل برنامه‌ریزی مختلط درهمین چارچوب و در بخش ۶-۹ بیان می‌گردد (م).

فرایند شمارشی و دارای گونه‌های متعدد است. اگرچه، این فن در حل مسائل مختلف تحقیق در عملیات موفق بوده است، لیکن، شهرت آن از حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح ناشی می‌شود.

مبنای اصلی کار فن انشعاب و تحدید به شرح زیر است: فرض کنید تابع هدف مسئله مورد نظر باید حداقل شود و مشخص باشد که مقدار تابع هدف نیز از مقدار مشخصی که آنرا حدبالائی[1] می‌نامیم (و بـا Z_U نشان می‌دهیم) تجاوز نخواهد کرد. این حدبالائی معمولاً مقدار تابع هدف، بازاء بهترین جواب موجهی است که تاکنون شناخته شده است (که آنرا بهترین جواب موجود[2] می‌نامیم). ابتدا منطقه موجه به چند زیرمجموعه منشعب می‌شود. آنگاه، حدپائینی[3] هر زیرمجموعه (Z_L) بدست می‌آید. این حدپائینی معرف آن است که مقدار تابع هدف بهینه زیر مجموعه نمی‌تواند از آن پائین‌تر باشد و معمولاً مربوط به جواب بهینه همان زیر مجموعه است که محدودیت عدد صحیح آن حذف شده باشد. زیرمجموعه‌هائی که حدپائینی آنها از حدبالائی موجود بیشتر باشد دیگر مورد بررسی قرار نمی‌گیرند و حذف می‌شوند (زیرا بهترین جواب آنها از بهترین جواب موجود کل منطقه بدتر است). علاوه بر آن، هر زیرمجموعه‌ای که یا اصولاً فاقد جواب موجه باشد و یا اینکه بهترین جواب موجه آن شناخته شده باشد نیز دیگر مورد بررسی قرار نمی‌گیرد. (وقتی بهترین جواب موجه زیر مجموعه‌ای مشخص گردید، آنرا ثبت کرده و بقیه زیرمجموعه را کنار می‌گذاریم). به هر زیرمجموعه‌ای که به هرکدام از دلایل فوق حذف شود اصطلاحاً می‌گویند به ته رسیده[4] است. پس از آنکه یکی از زیرمجموعه‌های مربوطه به ته برسد، یکی دیگر از زیرمجموعه‌های باقیمانده، مثلاً زیر مجموعه‌ای که بهترین حد را داشته باشد، به چند زیرمجموعه دیگر تقسیم می‌شود. حدپائینی این زیرمجموعه‌ها نیز به همین ترتیب بدست

1) *Upper Bound*
2) *Incumbent Solution*
3) *Lower Bound*
4) *Fathomed*

می‌آید، و باز هم بعضی از آنها از بررسی بیشتر کنار گذاشته می‌شوند. از بین تمام زیرمجموعه‌های باقیمانده یکی برای انشعاب مجدد انتخاب می‌گردد. این کار ادامه می‌یابد تا موقعی که جواب موجهی بدست آید که مقدار تابع هدف آن از حد پائینی هیچکدام از زیر مجموعه‌های باقیمانده بیشتر نباشد، چنین جوابی بهینه است، زیرا هیچ زیرمجموعه دیگری نمی‌تواند جواب بهتری داشته باشد.

خلاصه فن انشعاب و تحدید

قدم ابتدائی $Z_U = \infty$ قرار دهید. کل جوابهای مورد بحث (شامل جوابهای غیرموجهی که به سادگی قابل تشخیص و حذف نیستند) را به عنوان زیرمجموعه موجود در نظر بگیرید. در مورد این زیرمجموعه، قدمهای تحدید[1] به ته رسیدن و آزمون بهینگی را به شرح زیر اجرا کنید (به این کارها تکرار صفر می‌گویند). آنگاه، تکرارهای عادی را انجام دهید.

قدم انشعاب[2] یکی از زیرمجموعه‌های باقیمانده (یعنی زیرمجموعه‌هائی که نه به ته رسیده و نه منشعب شده است) را برای انشعاب انتخاب نمائید. برای این منظور یکی از قواعد انتخاب زیرمجموعه را به کار بگیرید. آنگاه، زیرمجموعه انتخاب شده را به دو یا چند زیرمجموعه جدید تقسیم کنید.

قدم تحدید[3] حدپائینی مقدار تابع هدف (Z_L) را بازاء جوابهای موجه این زیرمجموعه تعیین کنید.

1) *Bound Step*
2) *Branch Step*
3) *Bound Step*

قدم به ته رسیدن[1]، هر زیرمجموعه جدید که دارای یکی از شرایط زیر باشد از بررسی بیشتر کنار گذاشته می‌شود (به ته می‌رسد).

آزمون ۱ $Z_L \geq Z_U$ است؛

آزمون ۲ زیرمجموعه مورد نظرشامل هیچ جواب موجهی نیست.

آزمون ۳ بهترین جواب موجه این زیرمجموعه (و همچنین Z_L مربوط به تابع هدف آن) مشخص شده است. اگر $Z_L < Z_U$ باشد، این جواب جایگزین بهترین جواب موجود شده و $Z_U = Z_L$ منظور می گردد. سپس، آزمون ۱ در مورد بقیه زیرمجموعه‌ها انجام می گردد.

آزمون بهینگی هنگامی که زیرمجموعه دیگری برای انشعاب باقی نمانده باشد (همه زیرمجموعه‌ها به ته رسیده باشند) توقف کنید. بهترین جواب موجود همان جواب بهینه است. در غیر این صورت، به قدم انشعاب بروید.

اگر به جای حداقل کردن تابع هدف، حداکثر کردن آن مورد نظر باشد، آنگاه فقط نقش حدبالائی و پائینی عوض می‌شود. لذا، Z_U و Z_L با یکدیگر جابه‌جا می گردند و ∞ به $-\infty$ تبدیل می‌شود و جهتهای نامعادلات نیز تغییر می کند.

در طراحی الگوریتمهای مربوطه، انعطاف قابل توجهی در قدم انشعاب و همچنین قدم تحدید وجود دارد که روی کارآئی محاسباتی بسیار موثر است. در مورد انتخاب زیرمجموعه برای انشعاب، دو قاعده متداول وجود دارد که یکی قاعده بهترین حد[2] و دیگری قاعده جدیدترین[3] حد است. در قاعده بهترین حد، مجموعه‌ای برای انشعاب انتخاب می‌شود که دارای مطلوبترین حد باشد (در مورد مسائل با هدف حداقل کردن، پائینترین حد منظور می‌شود)، زیرا، به نظر می‌رسد که چنین مجموعه‌ای بهترین

1) *Fathoming Step*
2) *The Best Bound Rule*
3) *The Newest Bound Rule*

شانس رسیدن به جواب بهینه را داشته باشد. استفاده از چنین قاعده‌ای می‌تواند تعداد تکرارهای مورد نیاز الگوریتم را به حداقل برساند. در قاعده جدیدترین حد، آخرین زیرمجموعه برای انشعاب انتخاب می‌شود، به شرط اینکه هنوز به ته نرسیده باشد. مزیت این قاعده، علاوه بر نگهداری اطلاعات کمتر، امکان بدست آوردن حدود به طور مؤثرتری است (که در بخشهای ۵-۹ و ۶-۹ ملاحظه خواهید کرد). برای محاسبه حدود، معمولاً روشی انتخاب می‌شود که حالتی بینابین در میان دقت و سرعت داشته باشد.

مثالی با استفاده از قاعده بهترین حد

برای تشریح فن انشعاب و تحدید (با استفاده از قاعده بهترین حد)، آن را برای حل مسئله کارگماری که جدول هزینه آن طبق جدول ۲-۹ است به کار می گیریم (برای یادآوری مجدد مسئله کارگماری به بخش ۴-۴، جلد اول مراجعه نمائید). به این ترتیب، هدف این است که هر کدام از کارها منحصراً به یکی از چهار نفر (گمارده) طوری تخصیص داده شود که مجموع هزینه‌های انجام چهار کار حداقل گردد. این مسئله دارای ۲۴ = !۴ جواب موجه است.

جدول ۲-۹ جدول هزینه در موردمسئله کارگماری

کار

گمارده (نفر)		۱	۲	۳	۴
	A	۹	۵	۴	۵
	B	۴	۳	۵	۶
	C	۳	۱	۳	۲
	D	۲	۴	۲	۶

ویژگیهای قدم انشعاب علاوه بر قاعده انتخاب انشعاب (قاعده بهترین حد)، باید مشخص نمود که چگونه یک زیرمجموعه، به دو یا چند زیرمجموعه جدید تقسیم شود. یک روش طبیعی برای انجام این کار شمارش انواع حالتهائی است که می‌توان شغلهای تخصیص نیافته را به افراد اختصاص داد. برای نمونه، با تخصیص هر کدام از گمارده‌های A ، B ، C یا D ، مجموعه ۲٤ جواب موجه این مسئله به چهار زیرمجموعه منشعب می‌شود که هر کدام از آنها دارای شش جواب موجه خواهد بود. آنگاه، با تخصیص هر کدام از سه گمارده باقیمانده به کار شماره ۲، هر زیرمجموعه به سه زیر مجموعه جدید (هر کدام با دو جواب موجه) منشعب می‌شود. سرانجام، با تخصیص کار ۳ به هر کدام از دو گمارده باقیمانده، هر کدام از زیرمجموعه‌های ۲ جوابی نیز به دو زیرمجموعه یک جوابی منشعب می‌شود. در این بخش، از این فرایند برای انشعاب استفاده خواهد شد. فهرست گمارده‌هائی که به هر زیرمجموعه تخصیص یافته است مشخص کننده آن زیرمجموعه خواهد بود.

ویژگیهای قدم تحدید برای هر زیرمجموعه جوابهائی که در قدم انشعاب بدست می‌آید یک حدپائینی مناسب Z_L در قدم تحدید باید تعیین شود. روشی که برگزیده‌ایم جمع کردن حداقلهای ممکن هزینه تخصیصها (یعنی مجموع اعداد حداقل ستونهای جدول هزینه) است[1]. در مورد موجه بودن یا نبودن جواب، جای نگرانی نیست. برای نمونه، در مورد مجموعه همه جوابهای موجه، مجموع حداقل ضرایب هرستون جدول ۲–۹، یعنی ۷ = ۲+۱+۲+۲ است. (این هزینه ۷ مربوط به هیچکدام از جوابهای موجه نیست زیرا مربوط به جوابی است که به هر کدام از افراد C و D دو کار اختصاص یافته است در حالی که A و B کاری ندارند. لیکن، هزینه ۷

۱) به جای مجموع حداقلهای ستونها می‌توان مجموع حداقلهای سطرها، یا حداکثر این دو مجموع را به عنوان حدپائینی انتخاب کرد.

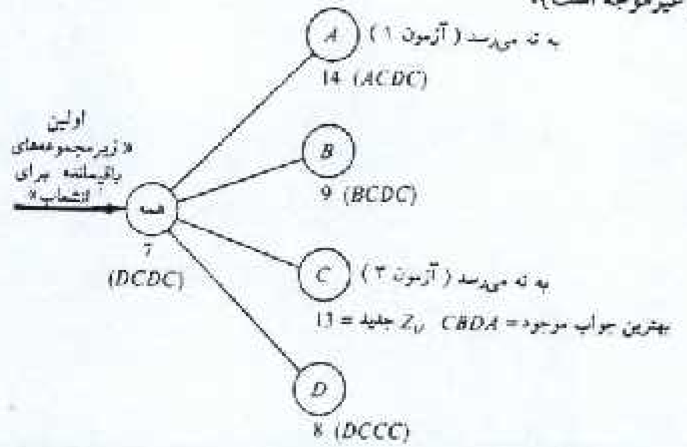
یک حدپائینی معتبر محسوب می‌شود). هنگام محاسبه Z_L برای هر زیرمجموعه‌ای که در آن تخصیص انجام یافته باشد، لازم است که دو تغییر نیز در این روش منظور شود: ۱) به جای هزینه حداقل در هر ستون، هزینه واقعی تخصیصها محاسبه شود و ۲) سطرهای مربوط به افرادی که تا اینجا تخصیص یافته‌اند حذف شود و بعد از آن هزینه حداقل هر ستون مشخص گردد. برای نمونه، فرض کنید کار ۱ به C تخصیص یافته باشد. حدپائینی این زیرمجموعه (با ٦ جواب موجه)، که با C مشخص می‌شود هزینه همین تخصیص باضافه مجموع حداقل هزینه‌های سه ستون دیگر (پس از حذف سطر C) و برابر با ۱۳ = (۳+۲+۵)+۳ است. (این جواب تصادفاً جوابی موجه است که تخصیصهای آن عبارتند از $CBDA$).

ویژگیهای قدم توقف (به ته رسیدن) این قدم دقیقاً طبق آنچه که در خلاصه فن انشعاب و تحدید گفته شد اجرا می‌گردد به استثنای اینکه آزمون شماره ۲ (زیرمجموعه فاقد جواب موجه است) کاربردی ندارد، زیرا زیر مجموعه جدیدی که طبق قدم انشعاب ایجاد می‌شود حتماً دارای جواب موجه خواهد بود. در مورد آزمون ۳، اگر Z_L بدست آمده در قدم تحدید، مربوط به یک جواب موجه باشد، چنین جوابی بهترین جواب موجه آن زیرمجموعه نیز خواهد بود.

تکرار صفر تمام مجموعه ۲٤ جواب موجه را در نظر بگیرید. حدپائینی آن یعنی $Z_L = 7$ ، قبلاً هنگام تشریح قدم تحدید بدست آمد. چون این حد مربوط به یک جواب غیرموجه است (DCDC) لذا آزمون ۳ عمل نمی‌کند. در این مرحله که هنوز مقدار $Z_U = \infty$ است آزمون ۱ نیز عمل نمی‌کند. در نتیجه، این مجموعه آماده برای انشعاب به زیرمجموعه‌های جدید است که در تکرار ۱ انجام می‌شود.

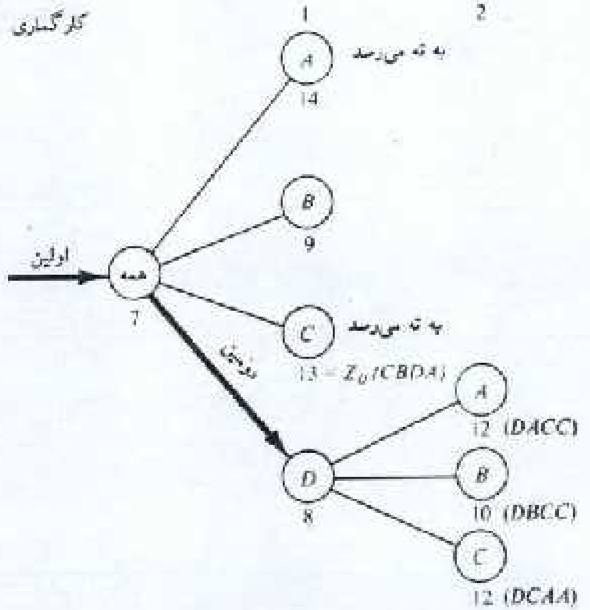
تکرار ۱ با تخصیص کار شماره یک به هر کدام از افراد (گمارده‌ها)، کل مجموعه

جوابهای موجه که ۲۴ عدد است به چهار زیرمجموعه منشعب می‌شود. حدپائینی تابع هدف روی زیرمجموعه A (یعنی زیرمجموعه‌ای که کار شماره ۱ به A اختصاص داده شده است) برابر با ۱۴ = (۱+۲+۲)+۹ است. حدپائینی زیرمجموعه B، ۹ = (۱+۲+۲)+۴ و برای زیرمجموعه C برابر با ۱۳ و برای D برابر با ۸ است. چون حدپائینی زیرمجموعه C، یعنی ۱۳ به جواب موجه CBDA مربوط می‌شود لذا، حد بالائی جواب بهینه نیز بیش از همین مقدار نخواهد بود و مقدار Z_U را برابر با ۱۳ قرار می‌دهیم. بدین ترتیب، بهترین جواب موجود تا این مرحله نیز همین جواب خواهد بود. از این رو، طبق آزمون ۳، بررسی بیشتر زیرمجموعه C متوقف می‌شود، یعنی این زیرمجموعه به ته می‌رسد. علاوه بر این، در اینجا زیرمجموعه A نیز طبق آزمون ۱ و با در نظرگرفتن Z_U جدید به ته می‌رسد (زیر ۱۳ < ۱۴ است). تا اینجا، زیرمجموعه‌های باقیمانده قابل انشعاب، فقط B و D هستند. در شکل ۲-۹، خلاصه نتایج بوسیله یک درخت نشان داده شده است. در این شکل، اعداد معرف حد پائینی هرزیر مجموعه و جواب مربوط به آن حدپائینی نیز، در داخل پرانتز نوشته شده است (گاهی غیرموجه است).



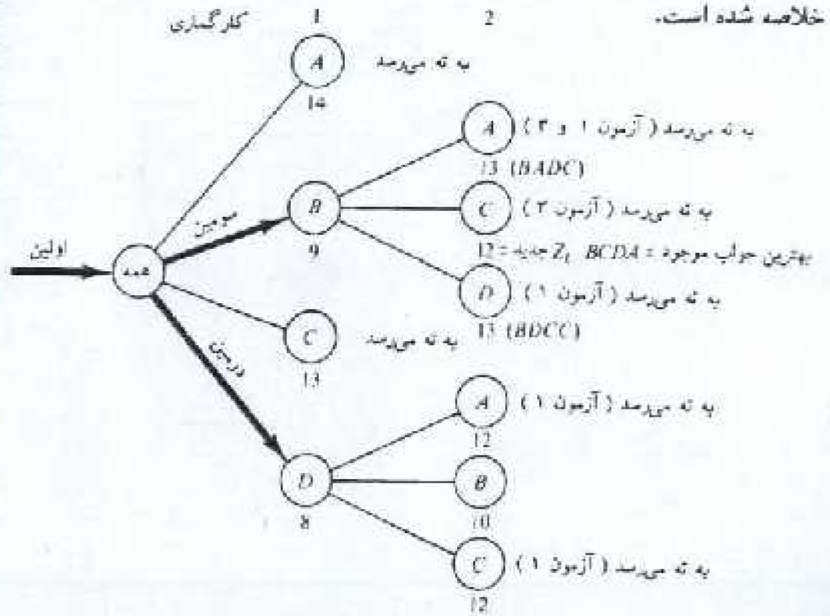
شکل ۲-۹ نتایج حاصل از اولین تکرار انشعاب و تحدید (باقاعده بهترین حد، درموردمسئله کارگماری)

تکرار ۲ از بین دو زیرمجموعهٔ باقیمانده، طبق قاعده بهترین حد، زیرمجموعه D که دارای حد پائین‌تری نسبت به B است (۹ > ۸) انتخاب می‌شود. در این زیرمجموعه که کار ۱ به D تخصیص داده شده است، کار ۲ را هم می‌توان به A یا B یا C تخصیص داد. درنتیجه، این زیرمجموعه را می‌توان به سه زیرمجموعه DA، DB، DC منشعب کرد. در زیرمجموعه DA، کار ۱ به D و کار ۲ به A تخصیص یافته است، لذا حدپائینی Z_L برابر با ۱۲ = (۲+۳)+۵+۲ است. به همین ترتیب، حدپائینی Z_L برای زیرمجموعه DB، برابر با ۱۰ = (۲+۳)+۳+۲ و برای زیرمجموعه DC برابر با ۱۲ = (۵+۴)+۱+۲ است. هیچکدام از آزمونهای توقف در مورد این سه زیرمجموعه عمل نمی‌کند. در نتیجه، زیرمجموعه‌های باقیمانده که هنوز به ته نرسیده‌اند عبارتند از B و DA، DB و DC. تا اینجا، به درختی که در شکل ۳-۹ نشان داده شده است رسیده‌ایم.



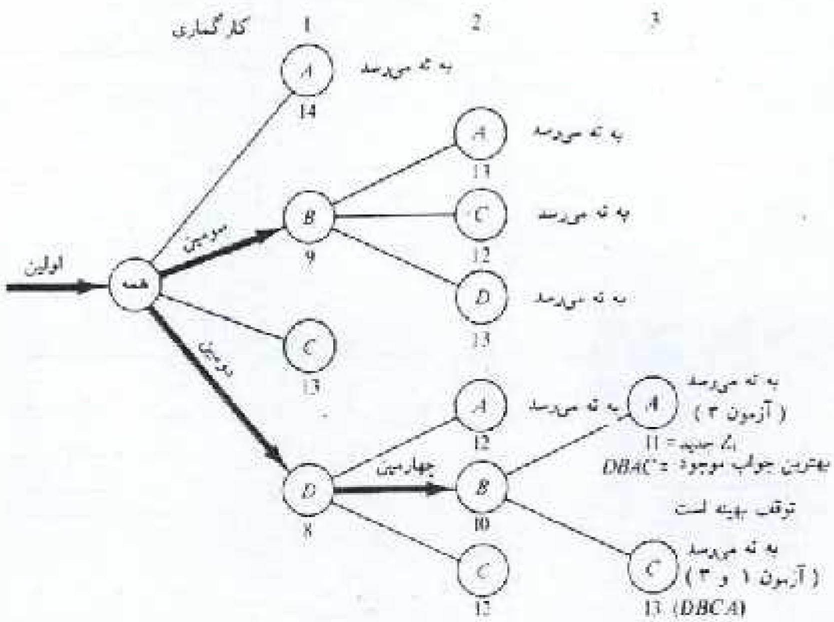
شکل ۳-۹ نتایج حاصل از دو تکرار انشعاب و تحدید، مسئله کارگماری

تکرار ۳ از بین چهار زیرمجموعه باقیمانده، زیرمجموعه B که دارای کمترین مقدار Z_L است انتخاب و به سه زیرمجموعه BA و BC و BD منشعب می‌شود. حدپائینی آنها به ترتیب برابر با ۱۳ = ۴+۵+(۲+۲) و ۱۲ = ۴+۱+(۲+۵) و ۱۳ = ۴+۴+(۳+۲) خواهد بود. چون حدپائینی دو زیرمجموعه اول مربوط به جوابهای موجه است و حدپائینی زیرمجموعه آخر (و همچنین زیرمجموعه اول) برابر با حدبالائی است، لذا هرسه زیرمجموعه به ته می‌رسند. علاوه بر این، مقدار تابع هدف جوابی که مربوط به حدبالائی زیرمجموعه BC (یعنی جواب BCDA) است ازمقدار تابع هدف بهترین جواب موجود بهتر است (یعنی ۱۳ > ۱۲)، لذا جواب BCDA بهترین جواب موجود جدید محسوب می‌شود. از آنجا که $Z_L = 12$ برابر با Z_L مربوط به DA و DC است، لذا این دو مجموعه نیز به ته می‌رسند. بنابراین، تنها زیرمجموعه‌ای که تا این لحظه بجا مانده است زیرمجموعه DB است. تمام نتایج بدست آمده در شکل ۴–۹ خلاصه شده است.



شکل ۴–۹ نتایج حاصل ازسه تکرار انشعاب و تحدید، مسئله کارگماری

تکرار ۴ تنها زیرمجموعه باقیمانده یعنی DB را به زیرمجموعه‌های DBA و DBC تقسیم می‌کنیم. حدپائینی آنها به ترتیب ۱۱ = ۲+۳+۴+(۲) و ۱۳ = ۲+۳+۳+(۵) است. چون این هر دو حد به جوابهای موجه مربوط می‌شوند، لذا هر دو زیرمجموعه به ته می‌رسند. علاوه بر اینها، جواب موجه DBAC مربوط به زیرمجموعه DBA از بهترین جواب موجود فعلی بهتر است (۱۲ > ۱۱) لذا همین جواب به عنوان جواب آماده جدید انتخاب می‌شود. چون زیرمجموعهٔ دیگری که هنوز به ته نرسیده باشد باقی نمانده است (به شکل ۵–۹ مراجعه شود)، لذا بهترین جواب موجود، یعنی DBAC بهینه است و الگوریتم به پایان می‌رسد.



شکل ۵–۹ نتایج چهارتکرار (نهائی) انشعاب وتحدید، مسئله کارگماری

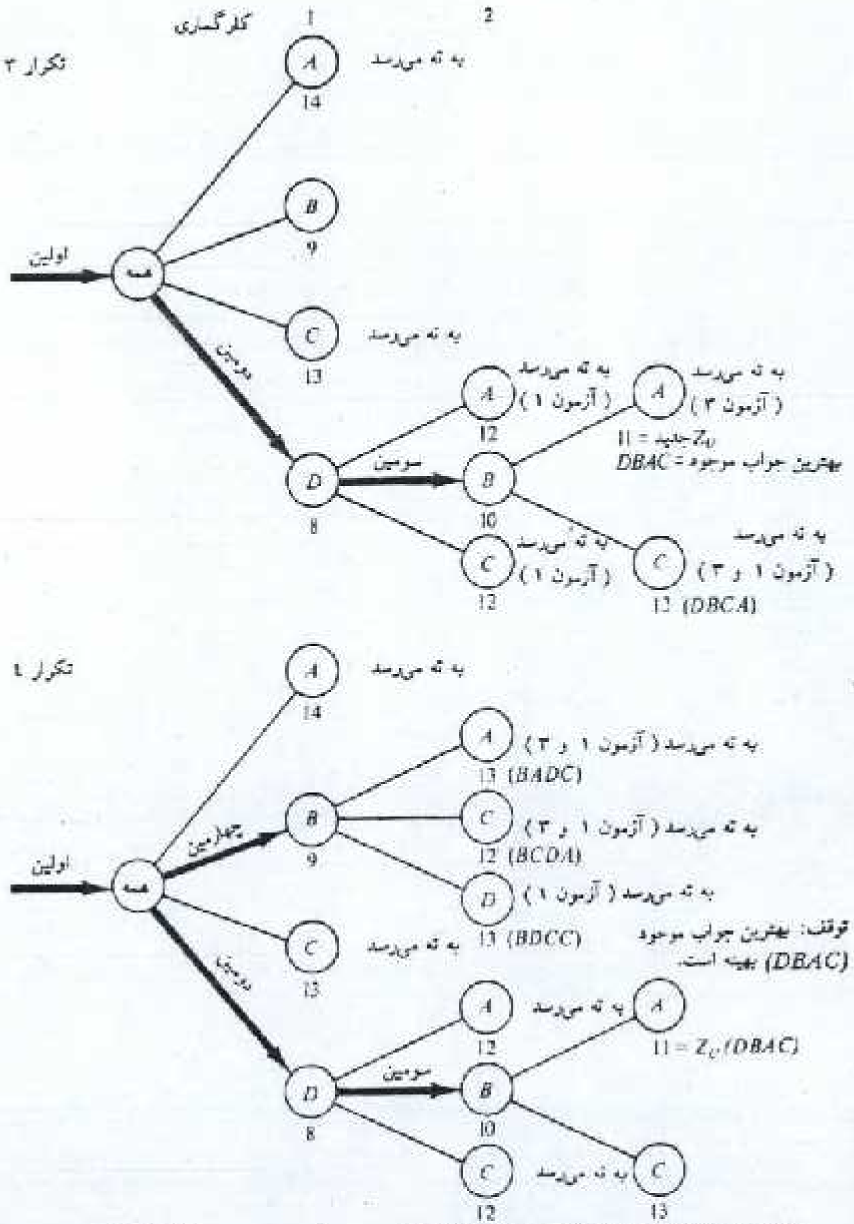
همان مسئله با استفاده ازقاعده جدیدترین حد

حال ببینیم اگر **قاعدهٔ جدیدترین حد** برای انتخاب زیرمجموعه‌ای برای انشعاب به کار گرفته شود، نتایج بدست آمده چه تفاوتهائی با نتایج قبلی خواهد داشت.

تکرار ۱ مثل حالت قبل انجام‌می‌گردد (به شکل ۲—۹ مراجعه شود)، زیرا فقط یک حق انتخاب وجود دارد. در تکرار ۲ نیز تغییری به وجود نمی‌آید. (شکل ۳—۹)، زیرا هر چهار زیرمجموعه باقیمانده (D, C, B, A) همزمان ایجاد شده (یعنی $Z_L = 8$) برای انشعاب انتخاب می گردد.

اولین تغییر در تکرار ۳ به وجود می‌آید (شکل ٤—۹) که زیرمجموعه‌های باقیمانده عبارت از B ، DA ، DB و DC خواهد بود (شکل ۳—۹). چون زیرمجموعه B در تکرار اول زودتر از زیرمجموعه‌های دیگر (در تکرار دوم) حاصل شده است، لذا یکی از سه زیرمجموعه اخیر برای انشعاب انتخاب می‌شود. زیرمجموعه DB که نسبت به DA و DC دارای حد بهتری است ($Z_L = 10$ در مقایسه با ۱۲) برای انشعاب بر گزیده می گردد. این موضوع در قسمت بالای شکل ٦—۹ نشان داده شده است. این انشعاب به یک جواب موجه منتهی می‌شود (DBAC با $Z_U = 11$) که بهترین جواب موجه جدید محسوب می گردد. با اجرای آزمونهای توقف، تنها زیرمجموعه‌ای که برای انشعاب باقی می‌ماند همان زیرمجموعه B است. بنابراین، در تکرار ٤ نیز این زیرمجموعه خود به خود انتخاب می‌شود (قسمت پائین شکل ٦—۹). در این تکرار هیچ زیرمجموعه‌ای باقی نمی‌ماند و لذا DBAC جواب بهینه است و الگوریتم به پایان می‌رسد.

در این مثال مشخص، تعداد تکرار طبق قاعده جدیدترین حد با تعداد تکرارهای قاعده بهترین حد برابر بود (در هر دو چهار تکرار). اما همیشه چنین نیست. تعداد تکرارها در قاعده جدیدترین حد معمولا زیادتر است گرچه در مواردی هم ممکن است برعکس آن باشد، زیرا در قاعده جدیدترین حد، زیرمجموعه‌ای که انتخاب می‌شود



شکل ٦—۹ نتایج انشعاب وتحدیدباقاعده جدیدترین حد،مسئله‌کارگماری

بهترین شانس (از نقطه نظر Z_L) را ندارد. در مورد مثال کارگماری، قاعده جدیدترین حد مزایای قابل ملاحظه دیگری هم ندارد. لذا برای این نوع مسائل، قاعده بهترین حد بهتر است. لیکن، در بخشهای ۵-۹ و ۶-۹ خواهیم دید که قاعدهٔ جدیدترین حد مزایای چشمگیری در حل بعضی از مسائل دیگر دارد.

مشاهدات کلی

از نظر کلی، فن انشعاب و تحدید را می‌توان به صورت یک درخت، نظیر آنچه که در شکلهای ۲-۹ تا ۶-۹ نشان داده شد، بیان کرد. ریشهٔ این درخت به مجموعه همه جوابهای موجه مربوط می‌شود. این مجموعه به چند زیرمجموعه تقسیم می‌گردد. مبنای انشعاب، معمولاً مقادیر یکی از متغیرهای تصمیم است. هر مقدار آن متناظر با یکی از گره‌هائی است که از ریشه منشعب می‌شود. در مورد هر گره، بازاء تمام جوابهای موجه مربوط به آن گره، یک حدپائینی برای تابع هدف تعیین می‌گردد. چنانچه قاعده بهترین حد به کار گرفته شود، روی یکی از گره‌های انتهای درخت که دارای کمترین حدپائینی باشد انشعاب انجام می‌گردد و آنگاه برای هرکدام از گره‌های حاصل از انشعاب جدید، مجدداً یک حدپائینی محاسبه می‌شود. فرایند انشعاب و تعیین حدود مرتباً تکرار و هربار انشعابات جدیدی به درخت افزوده می‌شود تا اینکه به گرهی با کمترین حدپائینی برسد و این حد هم مربوط به یک جواب موجه باشد. این جواب، در واقع بهینه است و الگوریتم به پایان می‌رسد.

تا اینجا نحوه استفاده از فن انشعاب و تحدید برای یافتن فقط یک جواب بهینه تشریح شد. لیکن، چنانچه جوابهای بهینه چندگانه وجود داشته باشد شاید بخواهیم همه آنها را مشخص کنیم. در این صورت، پس از بدست آوردن کلیه جوابهای بهینه مسئله، می‌توان عوامل دیگری که در مدل در نظر گرفته نشده است را بررسی و انتخاب نهائی را با توجه به آنها انجام داد. برای یافتن همه این جوابها، باید دو تغییر مختصر در

قدم توقف اعمال گردد. اول اینکه، آزمون توقف ۱، از $Z_L \ge Z_U$ به $Z_L > Z_U$ تغییر کند. دوم، در آزمون ۳، اگر بهترین جواب زیرمجموعه شناخته شد و $Z_L = Z_U$ بود، آنگاه این جواب هم به عنوان یکی از بهترین جوابهای موجود منظور شود. در این صورت، چنانچه براساس آزمون بهینگی هیچ زیرمجموعه دیگری برای انشعاب باقی نمانده باشد، تمام جوابهائی که به عنوان بهترین جوابهای موجود منظور شده‌اند بهینه هستند.

سرانجام، توجه به این نکته ضروری است که در انشعاب و تحدید، می‌توان به جای یک جواب بهینه به یک جواب تقریباً بهینه[1] با محاسباتی خیلی کمتر، دست یافت. هنگامی که درصد (یا مقدار) اختلاف بین بالاترین حدپائینی Z_L و حدبالائی فعلی Z_U از میزان مشخصی کمتر باشد، ادامه فرایند متوقف می‌گردد. جواب موجه مربوط به حدبالائی فعلی یعنی Z_U، همان جواب زیربهینه[2] مورد نظر است که تفاوت مقدار تابع هدف مربوط به این جواب با مقدار بهینه تابع هدف از حد تعیین شده کمتر است.

۵-۹ الگوریتم انشعاب و تحدید برای برنامه‌ریزی صفر و یک

همان طور که در بخش ۱-۹ گفته شد، ویژگی بسیاری از مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح این است که تمام متغیرهای آن از نوع صفر و یک هستند. به علاوه، بعضی از متغیرهائی هم که بیش از دو مقدار انتخاب می‌کنند را می‌توان به متغیرهای صفر و یک تبدیل کرد. به طور مشخص، یک متغیر عدد صحیح x را در نظر بگیرید که دارای حدودی به شرح زیر باشد

$$0 \le x \le u$$

1) nearly optimal solution 2) Suboptimal Solution

که $2^N \leq u < 2^{N+1}$ است. هرمقدار موجه x را می‌توان به شکل زیر، که ضمناً شکلی منحصر به فرد است، بیان کرد.

$$x = \sum_{i=0}^{N} 2^i y_i$$

که متغیرهای کمکی y_i از نوع صفر و یک هستند. از این رو، در کل مسئله، متغیر x با (N +۱) متغیر صفر و یک جایگزین می‌شود.

بنا به دلائل فوق، در سالهای اخیر به الگوریتمهای کارآ برای حل مسائل برنامه‌ریزی صفر و یک توجه زیادی معطوف شده است. یک شکل مناسب برای برخورد با این مسئله به صورت زیر است

$$\text{Minimize} \quad Z \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m \text{ بازاء}$$

$$x_j \quad 0 \text{ یا } 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n \text{ بازاء}$$

که $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$ است. فرض مربوط به پارامترهای c_j، در واقع محدودیتی ایجاد نمی‌کند زیرا اگر $c_j < 0$ باشد، x_j را می‌توان با $(1 - x'_j)$ جایگزین کرد که در این صورت x'_j نیز یک متغیر صفر و یک و ضریب آن در تابع هدف نیز، مثبت خواهد بود. ترتیب متغیرها را هم می‌توان طوری تغییر داد که ضرایب آنها افزاینده باشد.

به طور کلی، در مورد مسئله‌ای به شکل فوق، تا آنجا که محدودیتها اجازه می‌دهند باید به متغیرها مقدار صفر تخصیص یابد و در صورت لزوم، برای تخصیص مقدار یک به متغیرها، آنهائی که شماره پائین‌تری دارند در اولویت قرار گیرند. از این

رو، منطقی به نظر می‌رسد که ابتدا بررسی شود آیا جوابی که تمام متغیرهای آن برابر با صفر باشد موجه است یا نه (که اگر موجه باشد لزوماً بهینه هم خواهد بود). چنانچه این جواب موجه نباشد فقط با قرار دادن $x_1 = 1$ موجه بودن جواب بررسی می‌گردد. سپس، در صورت لزوم، $x_1 = 1$ و $x_2 = 1$ و به همین ترتیب، تا آخر ادامه می‌یابد.

در چارچوب روش فوق، قدمهای انشعاب و تحدید را در مورد برنامه ریزی صفر و یک شرح می‌دهیم. (برای آشنائی با جریان کلی الگوریتم، به خلاصه فن انشعاب و تحدید که در بخش قبلی ارائه شده، مراجعه نمائید). مبنای این روش، الگوریتم جمع‌پذیر[1] که توسط بالاس[2] توسعه یافته است خواهد بود. لیکن، برای سهولت بیشتر، تغییراتی در آن اعمال شده است. (کلمه جمع‌پذیر را از آن رو به کار می‌گیرند که در این الگوریتم، فقط از عملیات جمع و تفریق استفاده می‌شود).

ویژگیهای قدم انشعاب در این صورت الگوریتم، با تخصیص مقدار صفر یا یک به بعضی از متغیرها، مثلاً $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ یک زیرمجموعه تعریف می‌شود. (همیشه N را معرف تعداد متغیرهائی در نظر می‌گیریم که تا این مرحله مقدار آنها مشخص شده است و مقدار $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ را جواب جزئی[3] فعلی می‌گویند. حال همین جواب جزئی را در نظر بگیرید. تکمیل[4] این جواب عبارت از جواب کاملی است که N متغیر اول آن برابر با متغیرهای جواب جزئی باشد. زیرمجموعه جوابهائی که مقدار N متغیر اول آنها برابر با متغیرهای جواب جزئی باشند را مجموعه جوابهای تکمیل آن جواب جزئی می‌گویند). برای انشعاب بعدی، از قاعده جدیدترین حد استفاده می‌شود. اگر $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ مربوط به جواب آخرین حد باشد، در این

1) *Additive Algorithm*
2) *Balas*
3) *Partial Solution*
4) *completion*

صورت، به دو زیرمجموعه جدید تقسیم می‌شود که در یکی از آنها $x_{N+1} = 1$ و در دیگری $x_{N+1} = 0$ است (که از اینجا به بعد، N با N +۱ جایگزین می‌شود).

ویژگیهای قدم تحدید حدپائین Z_L مربوط به یک جواب جزئی $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ که موجه باشد (و همچنین در ابتدا و انتهای شاخه‌های $N = 0$ و $N = n$) به صورت زیر تعریف می‌شود

اگر $N = 0$ یا n و $x_N = 1$

$$Z_L = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j$$

چنانچه جواب جزئی فوق موجه نباشد، می‌توان حدپائینی را به شرح زیر تعریف کرد

اگر $x_N = 0$

$$Z_L = \sum_{j=1}^{N-1} c_j x_j + c_{N+1}$$

علت اینکه در حالت دوم c_{N+1} نیز اضافه می‌شود آن است که چون این جواب غیرموجه است برای اینکه به جواب موجه تبدیل شود لازم است که یکی ازمتغیرهای بعدی هم برابر با یک در نظر گرفته شود، که در نتیجه، مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد. چنین افزایشی حداقل برابر با c_{N+1} است.

ویژگیهای قدم توقف (به‌ته‌رسیدن) در صورتی که جواب جزئی فعلی در یکی از آزمونهای سه گانه، که در قسمت قبلی تشریح شد صدق کند، دیگر نیازی به انشعاب در آن زیرمجموعه نخواهد بود. در مورد برنامه‌ریزی صفر و یک، این آزمونها به شرح زیر بیان می‌شوند:

آزمون ۱

$$Z_L \ge Z_U$$

که Z_U مقدار تابع هدف بهترین جواب موجهی است که تا این مرحله بدست آمده است (در صورتی که تاکنون جواب موجهی بدست نیامده باشد $Z_U = \infty$ منظور می‌شود).

در آزمون ۲ (مربوط به نبودن وجود جواب موجه در زیرمجموعه مورد نظر) بررسی می‌شود که با تکمیل جواب جزئی فعلی آیا ممکن است که حداقل یکی از محدودیتها هرگز برقرار نشود؟ از این رو، طبق این آزمون، در صورتی که بازاء یکی از مقادیر $i = 1, \ldots, m$، رابطه زیر صدق نماید، آنگاه، انشعاب جواب جزئی فعلی متوقف می‌شود.

آزمون ۲

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j + \sum_{j=N+1}^{n} \max\{a_{ij}, 0\} < b_i$$

زیرا $\max\{a_{ij}, 0\} = \max\{a_{ij}x_j \mid x_j = 0 \text{ یا } 1\}$ است

درآزمون ۳ (مربوط به‌رسیدن‌به‌بهترین جواب‌موجه زیرمجموعه) بررسی می‌شود که آیا جواب جزئی فعلی (با فرض اینکه بقیه متغیرها برابر با صفر باشد) موجه هست یا خیر؟ چنانچه جواب جزئی فعلی به $x_N = 0$ ختم شود به جای بررسی موجه بودن جواب جزئی فعلی، موجه بودن جواب جزئی بعدی که در آن $x_{N+1} = 1$ است بررسی می‌شود (با فرض اینکه بقیه متغیرها برابر باصفر باشند). از این رو، سومین علتی که جواب جزئی فعلی را به ته می‌رساند این است که به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$، رابطه زیر برقرار باشد

آزمون ۳

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j + a_{i,N+1}(1 - x_N) \ge b_i$$

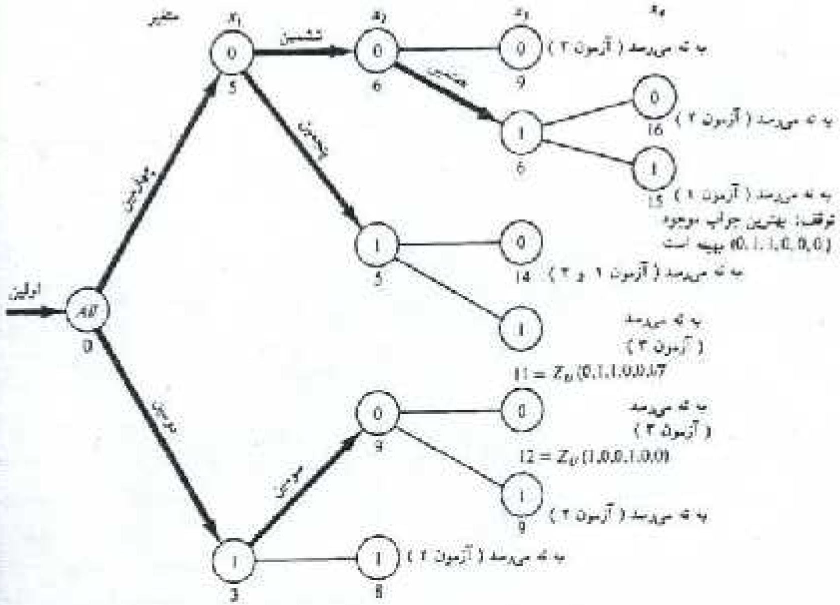
چنانچه این حالت اتفاق بیفتد و $Z_L < Z_U$ باشد، طبق دستورالعمل انشعاب و تحدید با قرار دادن $Z_U = Z_L$، این جواب را به عنوان بهترین جواب موجود در نظر می‌گیریم.

مثال برای تشریح بیشتر الگوریتم، مسئله زیر را با استفاده از آن حل می‌کنیم

$$\text{Minimize} \quad Z = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 10x_6$$

$$-2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 - 2x_6 \geq +2$$
$$-5x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 \geq -2$$
$$5x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 - x_6 \geq +3$$
$$x_j = 0 \text{ یا } 1 \quad j = 1,2,\ldots,6 \text{ بازاء}$$

نتایج بدست آمده، در شکل ۷−۹ خلاصه شده است. شماره‌های پررنگ (اول، دوم و...) ترتیب تقسیم زیرمجموعه جوابها (جوابهای جزئی) به دو زیرمجموعه جدید را نشان می‌دهد. در تکرار صفر، که همه مجموعه جوابها را دربرمی‌گیرد، نمی‌توان



شکل ۷−۹ نتایج حاصل ازالگوریتم صفر و یک

انشعاب را متوقف ساخت [$0 \quad Z_L \leq Z_U$ است و از طرفی هنوز دلیلی برای برقرار نبودن محدودیتها وجود دارد وجواب $(0,0,0,0,0,0)$ نیز غیرموجه است]. بنابراین، با انتخاب $x_1 = 0$ و $x_1 = 1$ ، این مجموعه به دو زیرمجموعه جدید منشعب و تکرار یک شروع می‌شود. هیچکدام از این دو جواب جزئی هم به ته نمی‌رسند زیرا آزمونهای یک و دو عمل نمی کنند. در مورد آزمون ۳ نیز، جوابهای $(0,1,0,0,0,0)$ $(1,0,0,0,0,0)$ غیرموجه هستند. در تکرار ۲، جواب جزئی مربوط به $x_1 = 1$ به جوابهای جزئی جدید $(1,0)$ و $(1,1)$ منشعب می‌شود.

طبق آزمون ۲، انشعاب در جواب جزئی $(1,1)$ به ته می‌رسد، زیرا هیچ جواب تکمیلی، حتی $(1,1,1,1,0,1)$ نمی‌تواند محدودیت دوم رابرقرار نماید. چون جواب جزئی دیگر، یعنی $(1,0)$ به ته نمی‌رسد، آنرا برای انشعاب برمی‌گزینیم (طبق قاعده جدیدترین حد). این جواب به دو جواب جزئی جدید تقسیم می‌شود، که هر دو آنها می‌توانند به ته برسند. یکی از آنها، یعنی $(1,0,1)$ ، طبق آزمون ۲ متوقف می‌شود زیرا هیچکدام از جوابهای تکمیلی آن، حتی $(1,0,1,1,1,0)$ نمی‌تواند محدودیت اول را برقرار نمایند. در مورد جواب جزئی دیگر، یعنی $(1,0,0)$ بهترین جواب تکمیلی آن $(1,0,0,1,0,0)$ جوابی موجه است و لذا به عنوان بهترین جواب موجود، با مقدار تابع هدف $Z_U = 12$ مشخص می گردد.

تا اینجا، شاخه مربوط به $x_1 = 1$ به انتها می‌رسد و تکرارهای بعد (از ۴ تا ۷) در شاخه $x_1 = 0$ انجام می‌شود. در تکرار ۴، جواب جزئی مربوط به $x_1 = 0$ به دو جواب جدید $(0,0)$ و $(0,1)$ تقسیم می‌شود که هیچکدام از آنها به ته نمی‌رسند. تکرار ۵ به جواب جزئی جدید، $(0,1,1)$ ، می‌رسد که بهترین جواب تکمیلی آن، یعنی $(0,1,1,0,0,0)$ موجه است و مقدار تابع هدف مربوط به آن ۱۱، از مقدار تابع هدف بهترین جواب موجود بهتر است (Z_U نیز برابر با ۱۱ قرار داده می‌شود). در دو تکرار نهائی مربوط به انشعاب جواب جزئی $(0,0)$ و سپس $(0,0,1)$ مشخص می‌شود که تنها جواب جزئی باقیمانده، یعنی $(0,0)$ به جواب بهتری منتهی نمی گردد

و در نتیجه، جواب بهینه عبارت از $x_1 = 0$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = 1$ ، $x_4 = 0$ ، $x_5 = 0$ و $x_6 = 0$ است.

اکنون، در موقعیتی هستیم که بتوانیم اظهار نظر کنیم چرا قاعده جدیدترین حد نسبت به قاعده بهترین حد ارجح است. در مورد این مثال، تعداد تکرارهای لازم در هر دو مورد یکسان بوده و تفاوت آنها در ترتیب تکرارهاست. اگرچه، در بعضی از مسائل تعداد تکرارها در قاعده بهترین حد کمتر است، لیکن، ازنظر حجم محاسبات، قاعده جدیدترین حد معمولاً در بسیاری از تکرارها کاراتر است. به طور مشخص، چنانچه جواب جزئی فعلی به ته نرسد و بلافاصله دو آن انشعاب بوجود آید (که معمولاً چنین است) آنگاه، فقط با جمع یا تفریق می‌توان کمیتهای مورد نیاز آزمونهای ۱ و ۲ و ۳ را از مقادیر جوابهای جزئی فعلی بدست آورد. (از لحاظ نظری، در قاعده بهترین حد نیز می‌توان این کار را انجام داد ولی لازمه آن نگهداری تمام مقادیر مربوطه در تمام جوابهای جزئی که به ته نرسیده‌اند خواهد بود که برای مسائل بزرگ توصیه نمی‌شود.)

کارآئی آزمون ۲ برای تشخیص اینکه جواب جزئی دارای جوابهای تکمیلی موجه هست یا خیر، گاهی چندان بالا نیست، به ویژه موقعی که تعداد محدودیتها زیاد باشد. غالباً، جوابهای تکمیلی مختلف یک جواب جزئی را می‌توان یافت که در یک محدودیت معین صدق نمایند، اگرچه شاید نتوان هیچ جواب تکمیلی را پیدا کرد که در همه محدویتها صادق باشد. کوششهای زیادی برای رفع این اشکال الگوریتم در جریان است. مهمترین پیشرفت در این زمینه، استفاده از برنامه‌ریزی خطی برای بدست آوردن یک محدودیت جابگزین[1] است به طوری که بتواند همه محدودیتهای کارکردی را درهم ادغام نماید.

1) Surrogate constraint

۶-۹ الگوریتم انشعاب و تحدید برای برنامه‌ریزی مختلط

در این بخش، یک برنامه‌ریزی مختلط را بررسی می‌کنیم که در حالت کلی، بعضی از متغیرهای آن عدد صحیح (نه لزوماً صفر و یک) و بقیه آنها از نوع متغیرهای پیوسته هستند. شکل کلی این مسئله به صورت زیر است

$$\text{Minimize} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{بازاء} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_j \text{ عددصحیح } j = 1, 2, \ldots, I (I \le n)$$

(در حالت $I = n$، این مسئله به یک برنامه‌ریزی عدد صحیح **خالص** تبدیل می‌شود).

در بخش ۵-۹، روش حل حالت خاصی از مسئله فوق (یعنی برنامه‌ریزی صفر و یک که همه متغیرها $x_j \le 1$ باشند)، با استفاده از محاسباتی ساده بررسی شد. چنانچه آن ساختار ویژه برقرار نباشد، دیگر امکان بدست آوردن یک حدپائینی مانند Z_L و اجرای آزمونهای توقف، با محاسباتی ساده وجود ندارد. لیکن، در مورد این مسئله هم می‌توان اطلاعات مورد نظر را به نحوی موثر وبا استفاده از برنامه‌ریزی خطی (روش سیمپلکس و یا روش سیمپلکس ثانویه) بدست آورد. اکنون، الگوریتمی را شرح می‌دهیم که از برنامه‌ریزی خطی برای حل مسئله استفاده می‌نماید. این الگوریتم، توسط داکین[1] و براساس الگوریتم انشعاب و تحدیدی که توسط بنیانگذاران آن لند و دویک[2] ابداع شده بود توسعه یافته است. این الگوریتم از نظر ساختاری کاملاً شبیه الگوریتم جمع‌پذیر (برای برنامه‌ریزی صفر و یک) است و در چارچوب کلی فن انشعاب و تحدید که در بخش ۴-۹ ارائه شد می‌گنجد. برای انشعاب با انتخاب قاعده جدیدترین حد، زیرمجموعه موجود به دو زیرمجموعه جدید تقسیم می‌شود. لیکن، چون متغیرها دارای بیش از دو مقدار هستند. لذا مقادیر یکی از متغیرها به دوفاصله تقسیم

1) R.I.Dakin 2) Land & Doig

می‌گردد (درنتیجه‌این متغیر ممکن است بیش از یک بار منشعب شود).

شروع الگوریتم (تکرار صفر) با حذف محدودیت عدد صحیح و حل مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده انجام می‌شود. اگر جواب حاصل بازاء تمام متغیرهای x_j ، $j = 1, 2, \ldots, I$ عدد صحیح باشد، در این صورت، جواب بهینه بدست آمده است. در غیر این صورت، در هر تکرار متغیری مانند x_j را برمی‌گزینند که مقدار آن عدد صحیح نباشد، به طوری که اگر k عدد صحیح باشد،

$$k < x_j < k+1$$

سپس، زیرمجموعه موجود را به دو زیرمجموعه جدید تقسیم می‌کند.

۱ـ جوابهائی که در آن $x_j \le k$

۲ـ جوابهائی که در آن $x_j \ge k+1$ باشد.

که البته این جوابها باید در کلیه محدودیتهای مربوط به زیرمجموعه نیز صدق کند (مانند محدودیتهای اصلی و محدودیت حدی روی متغیرها که در تکرارهای قبلی منظور شده‌اند). سپس، با حذف محدودیت عدد صحیح و حل مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده، یک حد پائینی برای این زیرمجموعه بدست می‌آید. لیکن، لزومی ندارد که هر کدام از این مسائل را به طور کامل حل کرد بلکه به مدد فرایند تحلیل حساسیت (بخش ۳ـ۵، جلد اول) و با استفاده از جواب بهینه‌ای که قبل از اضافه شدن محدودیت جدید بدست آمده است، مسئله جدید حل می‌شود. (باید توجه داشت که قاعده جدیدترین حد، امکان استفاده کارآتر از جواب بهینه قبلی را افزایش می‌دهد). سپس، با استفاده از جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده که با روش سیمپلکس ثانویه بدست می‌آید، آزمونهای به ته رسیدن انجام می‌شود. به طور مشخص، زیرمجموعه تحت شرایط زیر به ته می‌رسد.

آزمون ۱ $Z_L \ge Z_U$

آزمون ۲ باروش سیمپلکس ثانویه درمی‌یابیم که جواب موجهی وجود ندارد

آزمون ۳ درجواب بهینه، تمام متغیرهای x_j (بازاء $j = 1, 2, \ldots, I$) عدد صحیح هستند.

اگر زیرمجموعه‌ای با آزمون ۳ به ته برسد و $Z_L < Z_U$ باشد، آنگاه $Z_U = Z_L$ قرار داده شده و این جواب به عنوان بهترین جواب موجود ذخیره می‌شود (لیکن، لزومی ندارد که آزمون ۱ برای زیرمجموعه‌های باقیمانده مجدداً اجرا گردد). پس از اینکه تمام زیرمجموعه‌های باقیمانده به ته رسیدند، آنگاه بهترین جواب موجود همان جواب بهینه است.

مثال فرض کنید که برای حل مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح بخش ۳ـ۹ (شکل ۹ـ۱)، که در آن $I=n=2$ است، از این الگوریتم استفاده شود.

در تکرار صفر، جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی آزاد شده عبارتست از $(x_1, x_2) = (2, \frac{9}{5})$ در نتیجه برای این جواب،

$$1 < x_2 < 2$$

با انشعاب کل مجموعه جوابها به دو مجموعه زیر، تکرار ۱ شروع می‌شود

۱ـ جوابهائی که در آنها $x_2 \le 1$

۲ـ جوابهائی که در آنها $x_2 \ge 2$

در مورد اولین زیرمجموعه، جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی آزاد شده، یعنی(۱ ، ۲) دارای مقادیر عدد صحیح است، لذا طبق آزمون ۳ به ته می‌رسد. این جواب به عنوان بهترین جواب موجود ذخیره گردیده و $Z_U = Z_L = -7$ قرار داده می‌شود. در مورد دومین زیرمجموعه، برنامه‌ریزی خطی آزاد شده آن فقط دارای یک جواب موجه

(۲ ، ۰) با مقادیر عدد صحیح است. لذا، این جواب هم طبق آزمون ۳ به ته می‌رسد. ضمناً، این جواب که از جواب قبلی بهتر است $(Z = Z_L = -10 < Z_U)$ به عنوان بهترین جواب موجود جدیدانتخاب می‌شود، $Z_U = -10$ قرار می‌گیرد. چون هیچ زیرمجموعه دیگری که به ته نرسیده باشد باقی نمانده است، لذا جواب (۲ ، ۰) را باید به عنوان جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح منظور کرد.

۷ـ۹ نتیجه

از آنجا که در دنیای واقعی، بعضی یا تمام متغیرهای تصمیم باید عدد صحیح باشند، لذا، غالباً با مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح سروکار داریم. در موارد متعددی، تصمیمات از نوع بله – یا – نه (و یا روابطی ترکیبی این نوع تصمیمها) وجود دارد. این تصمیمها با متغیرهای صفر و یک بیان می‌شوند. مسائل عدد صحیح پیچیده‌تر ازمسائلی هستند که متغیرهای آنها محدودیت عددصحیح نداشته باشند. بدین لحاظ الگوریتمهای موجود برای برنامه‌ریزی عدد صحیح عموما کارآئی خیلی کمتری نسبت به روش سیمپلکس دارند. مهمترین عامل تعیین کننده در مورد زمان محاسبات، تعداد متغیرهای تصمیم و ساختار مسئله است. برای بعضی از مسائل بزرگ با ساختار ویژه راه‌حلهای موفقی به مدد ساختار آنها، پیدا کرده‌اند. با همه اینها، بجز مسائلی که ساختار نسبتاً ساده‌ای دارند، بقیه مسائل را در صورتی می‌توان حل کرد که بیش از ده‌ها متغیر عدد صحیح نداشته باشند. (در مورد متغیرهای صفر و یک، این تعداد می‌تواند تا حدودی بیشتر باشد).

در حال حاضر، در بسته‌های نرم‌افزاری موجود برای برنامه‌ریزی ریاضی، برنامه‌هائی هم برای حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح وجود دارد. این الگوریتمها، معمولا بر اساس یکی از گونه‌های فن انشعاب و تحدید ساخته شده‌اند. بعضی از

الگوریتمهائی که قبلا مورد استفاده قرار می‌گرفتند ازروش دیگری به نام صفحات برشی[1] استفاده می‌کردند، که در آنها مرتبا محدودیتهای جدیدی به مسئله اضافه می‌گردد و هربار قسمتی از جوابهای غیر عددصحیح (و از جمله جواب بهینه همان مرحله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده) حذف می‌شود. لیکن، هیچکدام از مقادیر عدد صحیح کنار گذاشته نمی‌شوند. این کار ادامه می‌یابد تا جواب بهینه برنامه‌ریزی آزاد شده دارای مقادیر عدد صحیح گردد. الگوریتمهائی که برمبنای صفحات برشی ساخته شده‌اند موفقیت چندانی بدست نیاوردند، مگر در مورد مسائلی که ساختار ویژه‌ای داشتند. (از طرف دیگر، شواهدی در دست است که تلفیق روشهای صفحات برشی و انشعاب و تحدید می‌تواند در مواردی بسیار مفید باشد). روش دیگری نیز با استفاده از کاربرد نظریه ریاضی گروه[2] ، توسعه یافت ولی موفقیت چندانی نداشت.

مسائل واقعی غالباً بسیار بزرگتر از آن هستند که بتوان با استفاده از الگوریتمهای موجود آنها را حل کرد. در چنین مواردی، معمولا مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده را با روش سیمپلکس حل می‌کنند و سپس جواب بهینه حاصل را به یک جواب موجه عدد صحیح گرد می‌نمایند. لیکن، این روش معمولا رضایت‌بخش نیست زیرا بسیار مشکل (و شاید غیرممکن) باشد که بتوان از این طریق جواب عدد صحیحی بدست آورد. جوابی که بدست می‌آید ممکن است از جواب بهینه بسیار دور باشد. پیشرفتهای قابل ملاحظه‌ای در توسعه الگوریتمهای ابتکاری بدست آمده است تا بتوان به جواب عدد صحیح موجهی رسید، که هرچند لزوماً بهینه نیست، لیکن از جوابهای حاصل از گرد کردن به مراتب بهتر است.

در سالهای اخیر، کوششهای قابل ملاحظه‌ای جهت توسعه الگوریتمهای برنامه‌ریزی عدد صحیح غیرخطی به عمل آمده است و تحقیقات در این زمینه جریان دارد.

1) Cutting planes

2) Mathematical group theory

مسائل

۱ـ یک زن و شوهر جوان می‌خواهند کارهای خانه (خرید، آشپزی، ظرف شوئی و لباس شوئی) را بین خود طوری قسمت کنند که به هرکدام دو کار تخصیص یابد و مجموع زمانی که صرف انجام کارها می‌شود حداقل گردد. کارآئی آنها در انجام این وظایف متفاوتست. زمانی که هرکدام از آنها برای هروظیفه صرف می‌کنند به شرح زیر است

زمان مورد نیاز درهفته

	خرید	آشپزی	ظرف‌شوئی	لباس‌شوئی
زن	۴/۵	۷/۸	۳/۶	۲/۹
مرد	۴/۹	۷/۲	۴/۳	۳/۱

الف ـ این مسئله را به شکل یک برنامه‌ریزی صفرویک فورموله کنید.

ب ـ با استفاده از روش انشعاب وتحدید آنرا حل کنید.

۲ـ شرکتی سرمایه گذاری در هفت طرح بزرگ را بررسی می‌نماید. میزان بازده این سرمایه گذاریها در دراز مدت (به قیمتهای فعلی) و همچنین میزان سرمایه مورد نیاز این طرحها در جدول زیر (برحسب میلیون دلار) نشان داده شده است

شماره‌طرح	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
میزان‌بازده	۱۷	۱۰	۱۵	۱۹	۷	۱۳	۹
سرمایه‌موردنیاز	۴۳	۲۸	۳۴	۴۸	۱۷	۳۲	۲۳

کل میزان بودجه موجود برای سرمایه گذاری در این طرحها معادل ۱۰۰ میلیون دلار است. طرحهای ۱ و ۲ ناسازگارند و نمی‌توان هر دو آنها را اجرا کرد. طرحهای ۳ و ۴

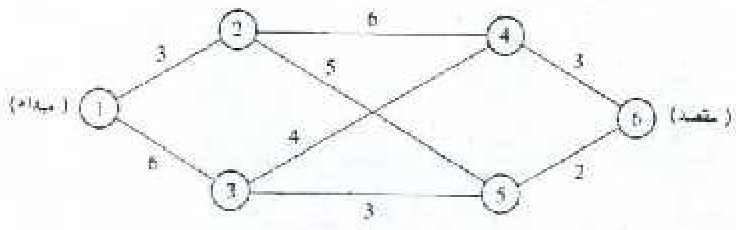
نیز چنین هستند. علاوه بر این، هیچکدام از طرحهای ۳ و ۴ را نمی‌توان اجرا کرد مگر اینکه یکی از دو طرح ۱ و ۲ هم اجرا شود. در مورد سایر طرحها چنین محدودیتهائی وجود ندارد. هدف مسئله انتخاب ترکیبی از سرمایه گذاری‌هائی است که مجموع بازده را حداکثر نماید.

الف ـ این مسئله را به شکل برنامه‌ریزی صفر و یک فورموله کنید

ب ـ تغییرات لازم را در مدل اعمال نمائید به طوری که بتوان آنرا با الگوریتم صفر و یک حل نمود (حل آن لازم نیست).

۳ـ مسئله ۲۲ فصل ۴ (جلد اول) را در نظر بگیرید. آنرا به شکل مدل صفر و یک فرموله کنید.

۴ـ مسئله کوتاهترین مسیر شبکه زیر را در نظر بگیرید. اعداد روی شاخه‌ها معرف فاصله است. هدف مسئله پیدا کردن کوتاهترین مسیری است که مبداء را به مقصد متصل نماید.



با استفاده از متغیرهای صفر و یک و با در نظرگرفتن گزینه‌های ناسازگار و تصمیمهای وابسته، این مسئله را به شکل یک برنامه‌ریزی صفر و یک فورموله کنید.

۵ـ محل دو ایستگاه آتش‌نشانی یک شهرک جدید باید مشخص گردد. از نقطه نظر طراحی، شهرک به پنج محله تقسیم می‌شود و به هیچ محله‌ای نباید بیش از یک ایستگاه تخصیص یابد. هر ایستگاه مسئول خاموش کردن تمام آتش‌سوزیهای محله خود به اضافه تمام محلاتی است که تحت پوشش آن قرار می‌گیرند. بنابراین،

تصمیمات زیر باید اتخاذ شود.

۱ – محلاتی که باید در آنها ایستگاه ایجاد گردد

۲ – محلاتی که فاقد ایستگاه هستند تحت پوشش چه ایستگاهی قرارگیرند.

هدف مسئله حداقل کردن متوسط کل زمان لازم برای رسیدن به محل آتش‌سوزی است.

جدول زیر، متوسط فاصله زمانی رسیدن از هرایستگاه به هر محل آتش‌سوزی را نشان می‌دهد. در سطر پائین جدول، میانگین تعداد آتش‌سوزیهای روزانه هرمحله نشان داده شده است.

زمان رسیدن ازیک ایستگاه به یک محله

		۱	۲	۳	۴	۵
محل‌ایستگاه	۱	۵	۱۲	۳۰	۲۰	۱۵
	۲	۲۰	۴	۱۵	۱۰	۲۵
	۳	۱۵	۲۰	۶	۱۵	۱۰
	۴	۲۵	۱۵	۲۵	۴	۱۰
	۵	۱۰	۲۵	۱۵	۱۲	۵
	تعداد	۲	۱	۲	۱	۳

این مسئله را به صورت مدل برنامه‌ریزی صفر و یک فورموله کرده محدودیتهای مربوط به گزینه‌های ناسازگار و تصمیمهای وابسته را مشخص کنید.

۶ـ مسئله توازن نژادی بخش ۴ –۵، جلد اول، را مجدداً در نظر بگیرید. فرض کنید هیئت امنای مدارس، سیاست فعلی را تغییر داده‌اند به طوری که دانش آموزان یک محله فقط به یک مدرسه تخصیص داده شوند. لیکن، این سیاست که نسبت دانش‌آموزان سفید (یا سیاه) بین $\frac{۱}{۳}$ تا $\frac{۲}{۳}$ باشد همچنان پابرجاست. این مسئله را به شکل یک مدل برنامه‌ریزی صفر و یک فورموله کنید.

۷ـ فرض کنید که تعداد نمایندگان یک ایالت در مجلس R نفر است. در آن ایالت D بخش وجود دارد $(D > R)$ و می‌خواهیم این بخشها را به R ناحیه تقسیم نمائیم به طوری که هرناحیه یک نماینده به مجلس بفرستد. کل جمعیت ایالت P نفر است و مسئولین مایلند جمعیت هر یک از نواحی جدید تقریبا برابر با $p = P/R$ باشد. فرض کنید کمیته‌ای انواع حالتهائی را بررسی کرده است که می‌توان بخشهای نزدیک به یکدیگر را در یک ناحیه متمرکز ساخت. تعداد حالتهای پیشنهادی این کمیته N ناحیه است $(N > R)$ در هر کدام از این نواحی پیشنهادی، تعدادی بخش نزدیک به یکدیگر قرار دارند که جمعیت آنها را برابر با p_j (بازای $j = 1, 2, \dots, N$) و نزدیک به p است. کمیت $c_j = |p_j - p|$ ، را تعریف کنید. هربخش حداقل در یکی از نواحی پیشنهادی قرار دارد، لیکن ممکن است در نواحی دیگری نیز قرار گرفته باشد (زیرا انواع حالتهای مختلف برای تعیین R ناحیه پیشنهادی در نظر گرفته شده است). بنابرتعریف،

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگربخش } i \text{ درناحیه پیشنهادی } j \text{ منظور شده باشد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

با توجه به مقادیر c_j و a_{ij} ، هدف انتخاب R ناحیه از بین کلیه N تقسیم‌بندی ممکن است به طوری که هربخش دقیقا در یک ناحیه قرار گیرد و بزرگترین مقدار c_j نیز به حداقل مقدار برسد.

این مسئله را به شکل یک مدل برنامه‌ریزی صفر و یک فورموله کنید.

۸ـ یک شرکت هواپیمائی در صدد خرید هواپیمای مسافربری جدیدی است که در سه اندازه بزرگ، متوسط و کوچک عرضه می‌شود. قیمت خرید هواپیماهای بزرگ، متوسط و کوچک به ترتیب، ۳۳/۵، ۲۵ و ۱۷/۵ میلیون دلار است. شرکت، حداکثر سرمایه‌گذاری جدید را ۷۵۰ میلیون دلار تعیین کرده است. صرفنظر ازاینکه چه هواپیمائی خریداری شود تخمین زده می‌شود که باندازه کافی مسافر وجود دارد که

هواپیماها با ظرفیت کامل پرواز کنند. برآورد می‌شود که سودسالیانه هریک از هواپیماهای بزرگ، متوسط و کوچک به ترتیب ۲/۱، ۱/۵ و ۱/۱۵ میلیون دلار باشد.

پیش‌بینی می‌شود که بتوان مجموعاً سی خلبان برای هدایت این هواپیماها در اختیار داشت. تجهیزات و امکانات موجودفقط برای نگهداری و تعمیر ۴۰ هواپیمای کوچک کافی است. لیکن، تجهیزات و امکانات لازم برای نگهداری و تعمیر یک هواپیمای متوسط و بزرگ به ترتیب $1\frac{1}{3}$ و $1\frac{2}{3}$ برابر تجهیزات و امکانات مورد نیاز یک هواپیمای کوچک است.

مدیریت مایل است بداند چند هواپیما از هرنوع بخرد تا سودش حداکثر گردد.

الف – مسئله را به شکل یک برنامه‌ریزی عدد صحیح فرموله کنید.

ب – با استفاده از الگوریتم انشعاب و تحدید آنرا حل کنید.

ج – مسئله را مجدداً به صورت یک برنامه‌ریزی صفر و یک فرموله کنید.

۹ـ قسمت طرح و توسعه شرکتی در حال طراحی چهار محصول تولیدی جدید است. مدیریت باید تصمیم بگیرد که کدامیک از این محصولات را با چه میزان تولید کند. از این رو، از بخش تحقیق در عملیات شرکت خواسته شده است که با کمک یک مدل برنامه‌ریزی سودآورترین ترکیب تولید را تعیین نماید.

همان طور که اولین سطر جدول زیر نشان می‌دهد، هزینه مربوط به راه‌اندازی تولید هر محصول مقداری قابل ملاحظه است. سود نهائی حاصل از تولید هرواحد اضافی از یک محصول نیز در سطر دوم جدول نشان داده شده است

محصول	۱	۲	۳	۴
هزینه‌راه‌اندازی	۵۰۰۰۰	۴۰۰۰۰	۷۰۰۰۰	۶۰۰۰۰
سود نهائی	۷۰	۶۰	۹۰	۸۰

فرض کنید که متغیرهای تصمیم پیوسته x_1, x_2, x_3, x_4 به ترتیب معرف حجم

تولید محصولات ۱ و ۲ و ۳ و ٤ باشد. سیاست مدیریت، محدودیتهای زیر را نیز منظور می‌دارد

۱ – بیش از دو محصول تولید نشود

۲ – تولید محصول ۳ یا ٤ منوط به تولید محصول ۱ یا ۲ است

۳ – حداقل یکی از دو محدودیت زیر صدق کند

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \le 6000$$
$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 6000$$

با معرفی متغیرهای صفر و یک، مسئله را به شکل یک مدل برنامه‌ریزی مختلط فرموله کنید.

۱۰ـ برنامه‌ریزی ریاضی زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize} \quad Z = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

در رابطه با محدودیتهای زیر

۱ – یا $x_1 \ge 3$ و یا $x_2 \ge 3$ باشد

۲ – حداقل یکی از محدودیتهای زیر صدق کند

$$2x_1 + x_2 \ge 7$$
$$x_1 + x_2 \ge 5$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 7$$

۳– $|x_1 - x_2| = 0$, یا 3, یا 6

٤– $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 7 + 5x_1 & x_1 > 0 \\ 0 & x_1 = 0 \end{cases}$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 5 + 6x_2 & x_2 > 0 \\ 0 & x_2 = 0 \end{cases}$$

این مسئله را به شکل یک مدل برنامه‌ریزی • خلط فورموله کنید

۱۱– مدل ریاضی زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad Z = 3x_1 + 2f(x_2) + 2x_3 + 3g(x_4)$$

در رابطه با محدودیتهای زیر

۱– $2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 15$

۲– حداقل یکی از دو محدودیت زیر صدق کند

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 4$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 3$$

۳– حداقل دو محدودیت از محدودیتهای زیر صدق کند

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 10$$
$$2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 10$$
$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 10$$
$$3x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10$$

۴– $x_3 = 1$ یا 2, یا 3

۵– $x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4)$,

که

$f(x_2) = \begin{cases} -5 + 3x_2, & x_2 > 0 \\ 0 & x_2 = 0 \end{cases}$ اگر

$g(x_4) = \begin{cases} -3 + 5x_4 & x_4 > 0 \\ 0 & x_4 = 0 \end{cases}$ اگر

این مسئله را به شکل یک مدل برنامه‌ریزی مختلط فورموله کنید

۱۲– برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad Z = 5x_1 + x_2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$4x_1 + x_2 \leq 12$$
$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$
x_1, x_2 عدد صحیح

الف– این مسئله را با روش ترسیمی حل کنید

ب– برنامه‌ریزی خطی آزاد شده آنرا با روش ترسیمی حل کنید. جواب حاصل را به نزدیکترین جواب عدد صحیح گرد کنید؛ آیا موجه است یا نه؟ آنگاه، تمام جوابهای گردشده را محاسبه کنید (هرمقدار غیر عددصحیح را به عدد صحیح بزرگتر و یا کوچکتر خود گرد کنید) و موجه بودن آنها را بررسی و مقدار Z مربوط به جوابهای موجه را محاسبه نمائید. آیا هیچکدام ازاین جوابها بهینه هست؟

ج– با الگوریتم انشعاب و تحدید، که در بخش ۶–۱۰ ارائه شد، و با کمک روش ترسیمی مسئله را حل کنید

۱۳– مسئله کارگماری با جدول هزینه زیر را در نظر بگیرید

		کار				
		۱	۲	۳	۴	۵
	۱	۳۹	۶۵	۶۹	۶۶	۵۷
	۲	۶۴	۸۴	۲۴	۹۲	۲۲
گمارده(نفر)	۳	۴۹	۵۰	۶۱	۳۱	۴۵
	۴	۴۸	۴۵	۵۵	۲۳	۵۰
	۵	۵۹	۳۴	۳۰	۳۴	۱۸

با استفاده از فن انشعاب و تحدید، کارها را به گمارده‌ها طوری تخصیص دهید که کل هزینه‌ها حداقل شود.

الف– با استفاده از قاعده بهترین حد

ب– با استفاده از قاعده جدیدترین حد

۱۴– مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad Z = 220x_1 + 80x_2$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 16$$
$$2x_1 - x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_1, x_2 \text{ عددصحیح}$$

بندهای الف و ب و ج مسئله ۱۲ را در مورد این مسئله نیز اجرا کنید

۱۵– مسئله کارگماری با جدول هزینه زیر را در نظر بگیرید

		۱	۲	۳	٤
	A	٤	۱	۰	۱
گمارده(افراد)	B	۱	۳	٤	۰
	C	۳	۲	۱	۳
	D	۲	۲	۳	۰

الف– با استفاده از فن انشعاب و تحدید (قاعده بهترین حد)، تمام جوابهای بهینه مسئله را بدست آورید.

ب– اکنون با فن انشعاب و تحدید (قاعده بهترین حد)، تمام جوابهای خوبی را بدست آورید که اختلاف مقدار تابع هدف آنها از مقدار تابع هدف بهینه حداکثر یک واحد باشد.

ج– حال فرض کنید اعدادی که در جدول نوشته شده‌اند معرف سود باشند و هدف تخصیص کارها به افراد است به طوری که سود حاصل حداکثر گردد.

با استفاده از فن انشعاب و تحدید (قاعده بهترین حد) تمام جوابهای بهینه این مسئله را بدست آورید.

۱۶– مسئله ۲۵ فصل ٤ را مجدداً در نظر بگیرید. بندهای الف و ب مسئله ۱۵ را در مورد آن اجرا کنید.

۱۷– با استفاده از فن انشعاب و تحدید (قاعده بهترین حد) مسائل زیر را حل کنید.

الف– مسئله ۲۱ فصل ٤ جلد اول.

ب– مسئله ۲۲ فصل ٤ جلد اول.

۱۸– روی ماشینی باید پنج کار سفارشی مختلف انجام شود، لیکن، همان طور که جدول زیر نشان می‌دهد، زمان راه‌اندازی هر کار بستگی به کاری دارد که قبل از آن روی ماشین انجام شده است. هدف مسئله زمان‌بندی و ترتیب اجرای کارهاست به طوری که مجموع زمانهای راه‌اندازی حداقل شود.

زمان راه‌اندازی کار با توجه به کارقبلی

		۱	۲	۳	٤	۵
	هیچ کار	٤	۵	۸	۹	٤
	۱	—	۷	۱۲	۱۰	۹
کارقبلی	۲	٦	—	۱۰	۱٤	۱۱
	۳	۱۰	۱۱	—	۱۲	۱۰
	٤	۷	۸	۱۵	—	۷
	۵	۱۲	۹	۸	۱٦	—

الف– یک الگوریتم انشعاب و تحدید برای تعیین توالی عملیات[1] از این نوع طراحی کنید، قدمهای انشعاب، تحدید و به ته رسیدن را مشخص نمائید.

1) Sequence

ب– با استفاده از این الگوریتم، مسئله را حل کنید

۱۹– مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad Z = 80x_1 + 60x_2 + 40x_3 - 20x_4 - (7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2$$

$$x_j \ \ 0 \text{ یا } 1 \qquad j = 1,2,3,4 \ \text{ بازاء}$$

اگر مقدار k متغیر اول معلوم باشد ($k = 1,2,3$)، در این صورت حد فوقانی مقدار Z یک جواب موجه عبارتست از

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j - \left(\sum_{j=1}^{k} d_j x_j\right)^2 + \sum_{j=k+1}^{n} \max\left\{0, c_j - \left[\left(\sum_{i=1}^{k} d_i x_i + d_j\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} d_i x_i\right)^2\right]\right\}$$

که $c_1 = 80, c_2 = 60, c_3 = 40, c_4 = 20, d_1 = 7, d_2 = 5, d_3 = 3, d_4 = 2$ است.

با استفاده از این حد و قاعده بهترین حد، مسئله را با روش انشعاب و تحدید حل کنید.

۲۰– با استفاده از الگوریتم جمع‌پذیر (برنامه‌ریزی صفر و یک)، مثال نمونه که در ابتدای همین فصل ارائه شد را حل کنید.

۲۱– با استفاده از الگوریتم جمع‌پذیر، مسئله زیر را حل کنید

$$\text{Minimize} \quad Z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \geq 2$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \geq 0$$
$$-x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 1$$
$$x_j \ \ 0 \text{ یا } 1 \qquad j = 1,2,\ldots,5 \ \text{ بازاء}$$

۲۲– با استفاده از الگوریتم جمع‌پذیر، مسئله زیر را حل کنید.

$$\text{Maximize} \quad Z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5$$
$$3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \leq 6$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \leq 0$$
$$x_j \ \ 0 \text{ یا } 1 \qquad j = 1,2,\ldots,5 \ \text{ بازاء}$$

۲۳– مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح که در بخش ۳–۹ ارائه شد را در نظر بگیرید

الف– با استفاده از متغیرهای صفر و یک، مسئله را مجدداً فورموله کنید.

ب– مسئله را با کمک الگوریتم جمع‌پذیر حل کنید.

۲٤– برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad Z = -3x_1 + 5x_2$$
$$5x_1 - 7x_2 \geq 3$$
$$x_j \leq 3$$
$$x_j \geq 0$$
$$x_j \ \text{ عدد صحیح } \quad j = 1,2 \ \text{ بازاء}$$

الف– متغیرهای عدد صحیح را با متغیرهای صفر و یک جایگزین کرده و مسئله را به یک مسئله برنامه‌ریزی صفر و یک تبدیل کنید.

ب– مسئله را با کمک الگوریتم جمع‌پذیر حل کنید.

۲۵– با استفاده از الگوریتم جمع‌پذیر که در بخش ۵–۹ ارائه شد، مسئله زیر را حل کنید.

$$\text{Maximize} \quad Z = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5$$
$$-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 5x_5 \geq 5$$
$$x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 - 3x_5 \leq 0$$
$$x_j \ \ 0 \text{ یا } 1 \qquad j = 1,2,\ldots,5 \ \text{ بازاء}$$

۲٦– مسئله زیر را با استفاده از الگوریتم جمع‌پذیر حل کنید.

$$\text{Minimize} \quad Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \ \text{ عددصحیح}$$

۲۷– مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Maximize}\quad Z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + 5x_3 &\le 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\le 1 \\ 6x_1 - 5x_2 \qquad &\le 0 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0 \qquad x_3 \ge 0$$

x_1, x_2, x_3 عددصحیح

فرض کنید که برنامه‌ریزی خطی آزاد شده این مسئله با روش سیمپلکس حل شده و دستگاه معادلات آن در پایان به شرح زیر باشد.

$$\begin{aligned} Z \qquad\quad + \frac{17}{12}x_4 + \frac{1}{12}x_5 + \frac{5}{12}x_6 &= 14\tfrac{1}{4} \\ x_3 + \frac{11}{60}x_4 - \frac{1}{12}x_5 - \frac{1}{60}x_6 &= 1\tfrac{3}{4} \\ x_2 \quad + \frac{1}{10}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{10}x_6 &= 1\tfrac{1}{2} \\ x_1 \quad + \frac{1}{12}x_4 + \frac{5}{12}x_5 + \frac{1}{12}x_6 &= 1\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده عبارتست از (1.25, 1.5, 1.75)

الف– با سعی و خطا نشان دهید از گرد کردن جواب فوق هیچ جواب‌مرجعی (عدد صحیح) بدست نمی‌آید.

ب– با استفاده از الگوریتم انشعاب و تحدید مسئله را حل کنید.

۲۸– با استفاده از الگوریتم انشعاب و تحدید برنامه‌ریزی مختلط زیر را حل کنید.

$$\text{Minimize}\quad Z = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\begin{aligned} x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 &\ge -2 \\ 5x_1 - x_2 \qquad\qquad + x_5 &\ge 7 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 \qquad &\ge 4 \end{aligned}$$

$x_j \ge 0$ $\quad j = 1,2,3,4,5$ بازاء

x_j عددصحیح $\quad j = 1,2,3.$ بازاء

فصل دهم

برنامه‌ریزی غیرخطی

ازآنجا که برنامه‌ریزی خطی را می‌توان شالودهٔ تحقیق در عملیات دانست، لذا علاوه بر شش فصل اول کتاب که مستقیماً به این موضوع اختصاص یافته است، بسیاری از فصول دیگر نیز به نحوی با آن سروکار دارند. فرض اصلی برنامه‌ریزی خطی این است که همه توابع (اعم از تابع هدف یا محدودیتها) خطی باشند. اگرچه این فرض در بسیاری از مسائل واقعی برقرار است لیکن در موارد زیادی هم صادق نیست. اغلب اقتصاددانان دریافته‌اند که در مسایل برنامه‌ریزی‌های اقتصادی، غیرخطی بودن توابع نه استثناهای موردی بلکه‌یک قاعدهٔ کلی‌است. از این‌رو، گستردگی دامنه کاربردهای برنامه‌ریزی غیرخطی ایجاب می‌کند که این مقوله مهم نیز مورد توجه قرار گیرد.

هدف مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی در شکل کلی آن، پیدا کردن مقادیر $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ است به طوری که

$$\text{Maximize}\quad f(\mathbf{x})$$

$$g_i(\mathbf{x}) \le b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\mathbf{x} \ge 0$$

که $f(x)$ و $g_i(x)$ توابعی معلوم از n متغیر تصمیم هستند[1].

الگوریتمی وجود ندارد که بتواند همه مسائلی که در چارچوب فوق می‌گنجند را حل کند. لیکن، چنانچه فرضیات مشخصی در مورد این توابع به کار گرفته شود، آنگاه مدلهای متعدد ویژه و مهمی بدست می‌آیند، که در رابطه با حل آنها پیشرفتهای چشمگیری حاصل شده است و تحقیقات جدید نیز همچنان در جریان است. دامنهٔ برنامه‌ریزی غیرخطی گسترده‌تر از آن است که بتوان همهٔ انواع آنرا بررسی کرد. در این فصل، ابتدا چند نمونه از کاربرد برنامه‌ریزی غیرخطی و سپس اصول و مفاهیم اساسی حل پاره‌ای از انواع مهم مسائل آن ارائه می‌گردد.

چون پیوستهای ۱ و ۲ (جلداول کتاب، برنامه‌ریزی خطی) پیشنیاز مناسبی برای درک مطالب این فصل به حساب می‌آیند، لذا توصیه می‌شود که مجدداً آنها را مطالعه نمائید.

۱۰-۱ کاربردهای نمونه

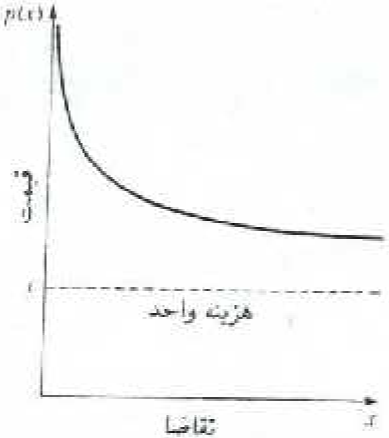
مثالهای زیر نمونه‌هائی از انواع متعدد مسائل مهمی است که می‌توان برنامه‌ریزی غیرخطی را در آنها به کار گرفت.

مسئله ترکیب محصولات با در نظرگرفتن کشش قیمتی تقاضا.

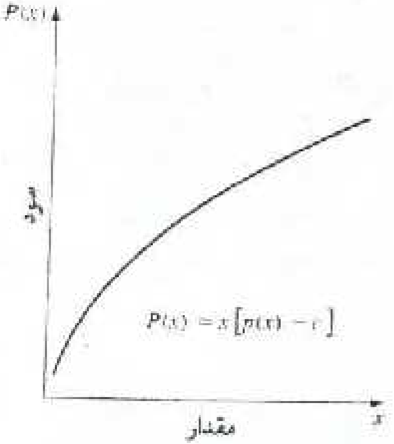
در مسئله ترکیب محصولات، نظیر مسئله در و پنجره‌سازی بخش ۱-۲ (جلد اول)، هدف تعیین میزان تولید هریک از محصولات است به طوری که با توجه به محدودیت منابع مورد نیاز، بتوان حداکثر سود را بدست آورد. چنانچه سود حاصل از یک واحد هر محصول مقدار ثابتی باشد، آنگاه یک تابع هدف خطی بدست می‌آید. لیکن، در

۱) در این فصل، برای سهولت فرض می‌شود که تمام توابع مشتق‌پذیرباشند.

بسیاری از مسائل ترکیب محصولات، تابع هدف به علل مختلف غیرخطی می‌گردد. برای نمونه، یک تولیدکننده بزرگ ممکن است با کشش قیمتی تقاضا روبرو باشد. در این صورت، مقدار محصولی که می‌توان فروخت رابطه معکوس با قیمت فروش دارد. منحنی قیمت- تقاضا قاعدتاً شبیه شکل ۱-۱۰ است. براساس این منحنی،



شکل ۱-۱۰ منحنی قیمت - تقاضا



شکل ۲-۱۰ تابع سود

برای فروش x واحد محصول لزوماً باید قیمت آن حداکثر به p(x) برسد. حال اگر هزینه تولید ثابت و برابر با C باشد (منحنی خط چین در شکل ۱-۱۰)، در این صورت سود حاصل از فروش x واحد محصول تابعی غیرخطی است که ازرابطه زیر بدست می‌آید و در شکل ۲-۱۰ نشان داده شده است.

$$P(x) = x\,p(x) - cx$$

اگر هر کدام از n محصول این موسسه نیز دارای تابع تولید مشابهی باشند، یعنی سود حاصل از فروش x_j واحد محصول برابر با $P_j(x_j)$ باشد (بازاء $j = 1, 2, \ldots, n$)، در این صورت تابع هدف مجموعی از توابع غیرخطی، به شرح زیر خواهد بود

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} P_j(x_j)$$

عامل دیگری که می‌تواند به غیرخطی شدن تابع هدف منجر گردد، متغیر بودن هزینه نهائی[1] (یعنی هزینه تولید آخرین واحد محصول) نسبت به حجم تولید است. برای نمونه، افزایش کارآئی کارکنان در اثر تولید و تجربه بیشتر، باعث کاهش هزینه‌نهائی‌می‌شود. برعکس، در مواردی نیز ممکن است به عللی، از جمله پرداخت اضافه‌کاری یا احتیاج به تجهیزات تولیدی گرانتر افزایش یابد.

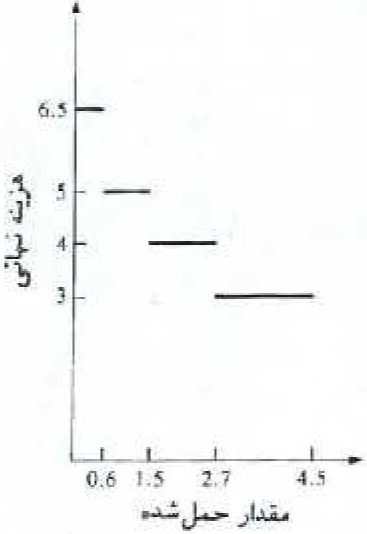
گاهی هم بدلایل مشابه، تابع محدودیت $g_i(x)$ غیر خطی می‌شود. برای نمونه، چنانچه یکی از محدودیتها به بودجه مربوط باشد و هزینه نهائی تولید نیز تغییر نماید، در این صورت تابع هزینه و محدودیت مربوطه غیرخطی خواهد شد. در مورد محدودیتهای مربوط به منابع، چنانچه مصرف کاملاً متناسب با حجم تولید نباشد، آنگاه $g_i(x)$ غیرخطی می‌شود.

مسئله حمل ونقل با تخفیف هزینه حمل نسبت به‌میزان بار

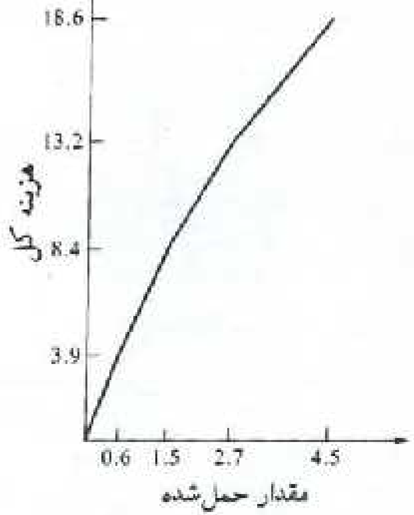
همان طور که در فصل چهارم (جلد اول کتاب) گفته شد با معلوم بودن میزان عرضه و تقاضا، هدف مسئله حمل و نقل تعیین برنامه بهینه حمل کالا از مبادی گوناگون به مقصدهای مختلف است، به طوری که کل هزینه‌ها حداقل شود. در آنجا فرض بر این بود که هزینه حمل هر واحد کالا بین هرمبداء، و مقصد مشخص، صرفنظر از میزانی که حمل می شود مقداری ثابت باشد. در عمل، ممکن است این هزینه ثابت نبوده و برای محموله‌های بزرگ تخفیفهائی منظور گردد، به طوری که هزینه نهایی حمل یک واحد دیگر کالا، شبیه شکل ۳ــ۱۰ باشد. در این شرایط هزینه حمل x واحد محصول

1) Marginal Cost

به صورت تابع غیرخطی $C(x)$ از نوع تابع خطی شکسته است. مطابق شکل ۴ــ۱۰ شیب این منحنی در هر نقطه برابر با هزینه نهایی است.



شکل ۳ــ۱۰ هزینه نهائی حمل



شکل ۴ــ۱۰ تابع هزینه حمل

بنابراین، در صورتی که چنین فرضی در مورد هر مبداء و مقصد صدق نماید، یعنی هزینه حمل x_{ij} واحد از مبداء i (بازاء $i = 1,2,\ldots,m$) به مقصد j (بازاء $j = 1,2,\ldots,n$) برابر $C_{ij}(x_{ij})$ باشد، آنگاه تابع هدف به شکل زیر درمی‌آید.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}(x_{ij})$$

با این وجود، در چنین مسائلی حتی اگر تابع هدف هم غیرخطی باشد، محدودیتها عموماً دارای ساختار ویژه‌ای هستند که همچنان در چارچوب مدل حمل و نقل خطی که در بخش ۱ــ۴ ارائه شد فرموله می‌شوند.

انتخاب ترکیب سرمایه‌گذاری با بازده قطعی

امروزه جهت انتخاب گزینه‌های مناسب سرمایه‌گذاری، مدلهای کامپیوتری که بر مبنای برنامه‌ریزی غیرخطی پایه‌گذاری شده‌اند به صورت ابزاری متداول در خدمت مدیران حرفه‌ای بورسهای سهام درآمده‌اند. از آنجا که سرمایه‌گذاران به دو عامل، یعنی میزان بازدهی سرمایه‌گذاریها و همچنین خطرهائی (ریسکهائی) که در بطن آنها وجود دارد اهمیت می‌دهند، لذا ترکیب سرمایه‌گذاری باید طوری انتخاب شود که تحت شرایط موجود، بین بازده سرمایه و خطری که متوجه آن است رابطهٔ بهینه‌ای برقرار باشد.

در مورد چنین مسئله‌ای، مدل برنامه‌ریزی غیرخطی به شکل زیر فرموله می‌شود. فرض کنید که خرید n نوع سهام مختلف تحت بررسی است، و متغیر تصمیم x_j معرف تعداد سهام نوع j است که انتخاب می‌شود (بازاء $j = 1, 2, \ldots, n$). چنانچه μ_j و σ_{jj} به ترتیب بیانگر تخمین میانگین و واریانس بازده یک عدد از سهام نوع j باشند، در این صورت σ_{jj} معرف میزان خطر در این سرمایه‌گذاری است. ضمناً σ_{ij} کوواریانس بازده هر واحد از سهام i و j است. (از آنجا که تخمین یکایک σ_{ij} ها دشوار است لذا معمولاً این کمیتها با در نظر گرفتن پیش فرضهائی در مورد بازار، مستقیماً از σ_{ii}, σ_{jj} محاسبه می‌شوند). آنگاه میانگین R(x) و واریانس V(x) کل بازده سرمایه‌گذاری، به شرح زیر بدست می آید

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$$

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

که V(x) معیار سنجش خطر مجموع سرمایه‌گذاریهاست. تبادل بهینه بین دو عامل فوق، از طریق ترکیب نمودن آنها در تابع هدف انجام می گیرد.

$$f(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}) - \beta V(\mathbf{x})$$

در تابع هدف فوق که باید حداکثر شود، عدد غیرمنفی β بیانگر میزان مطلوب تبادل بین بازده و خطر سرمایه از دید سرمایه‌گذار است. معنای $\beta = 0$ این است که خطر سرمایه‌گذاری مطرح نیست و انتخاب مقدار بزرگ برای β به معنای اهمیت دادن زیاد به کم خطر بودن سرمایه‌گذاری خواهد بود [یا حداکثرمنفی $V(x)$].

مدل کامل برنامه‌ریزی غیرخطی این مسئله به صورت زیر در می‌آید

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j - \beta \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j \le B$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

که P_j بیانگر قیمت یک عدد از سهم نوع j و B کل بودجه‌ای است که برای سرمایه‌گذاری در نظر گرفته شده است. با پیش‌فرضهائی درباره تابع مطلوبیت[1] سرمایه‌گذار (که ارزش نسبی بازده‌های مختلف را از نقطه نظر سرمایه‌گذار بیان می‌دارد) می‌توان نشان داد که جواب بهینه این مسئله برنامه ریزی غیرخطی، امید ریاضی مطلوبیت سرمایه‌گذاری را حداکثر می کند.

چون شاخصهای اندازه‌گیری R(x) و V(x) با یکدیگر تفاوت دارند، لذا یک شکل فرموله کردن فوق انتخاب مقدار مناسب β است. از این رو، به جای انتخاب قطعی β، با استفاده از روش برنامه‌ریزی غیرخطی پارامتری، جواب بهینه به صورت تابعی از β محاسبه می گردد. آنگاه با بررسی بیشتر جوابها، مقدار مناسب برای این پارامتر انتخاب می‌شود. این روش را غالباً تولید جوابهای مرزی موثر[2] می‌نامند، زیرا موقعی که نقاط V(x) و R(x) بازاء تمام جوابهای موجه ترسیم شود، همه آنها روی مرزهای منطقه مورد نظر قرار می گیرند. علت موثر خواندن آنها از این روست که هیچ جواب موجه دیگری با یکی از شاخصهای (R یا V) نمی‌تواند به خوبی آنها باشند.

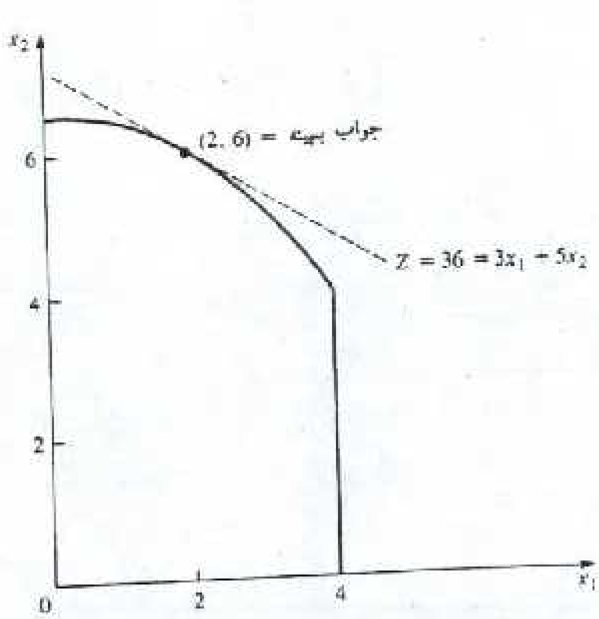
1) Utility

2) Efficient frontier

۲-۱۰ بیان ترسیمی مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی

درصورتی که مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی فقط یک یا دو متغیر داشته باشد، می‌توان آنرا با روش ترسیمی، شبیه مثال در و پنجره سازی در بخش ۱-۲، بیان نمود. ازآنجا که روش ترسیمی درک مسئله را آسانتر می کند، لذا چند مثال را با این روش بررسی می کنیم.

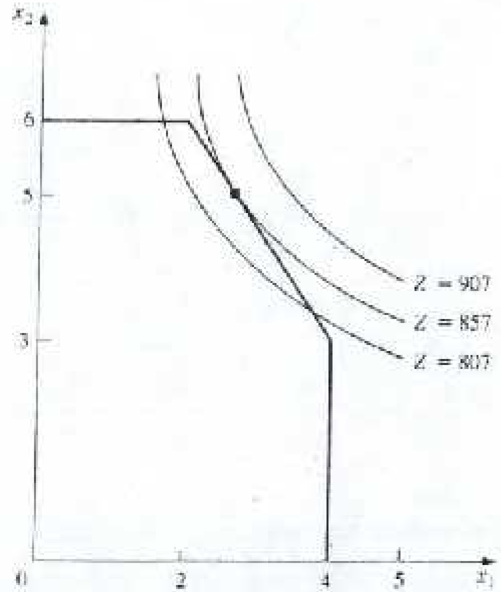
شکل ۵-۱۰ مثال شرکت در و پنجره‌سازی را نشان می‌دهد، با این تفاوت که محدودیتهای دوم وسوم با محدودیت $9x_1^2 + 5x_2^2 \leq 216$ جایگزین گردیده‌اند. این شکل را با شکل ۳-۲ مقایسه کنید. جواب بهینه باز هم $(x_1, x_2) = (2,6)$ خواهد بود.



شکل ۵-۱۰ مثال درو‌پنجره‌سازی با محدودیتهای غیرخطی

به علاوه، جواب همچنان روی مرز منطقه موجه قرار می گیرد. لیکن یک جواب گوشه موجه نیست. چنانچه تابع هدف نیز تغییر کرده بود (مثلاً $Z = 3x_1 + x_2$)، آنگاه جواب بهینه می‌توانست بر یک جواب گوشه موجه منطبق باشد. اما به هر حال، این واقعیت که جواب بهینه لزوماً در یک گوشه قرار ندارد به معنای آن است که نتیجهٔ بسیار مهمی که در برنامه‌ریزی خطی مورد استفاده قرارمی گرفت، یعنی فقط جستجوی جوابهای گوشه موجه، دیگر در مورد برنامه‌ریزی غیرخطی کارساز نیست.

حال فرض کنید که محدودیتهای خطی مثال فوق همچنان در مسئله باقی باشند، اما تابع هدف غیرخطی گردد. برای نمونه، اگر $Z = 126x_1 - 9x_1^2 + 182x_2 - 13x_2^2$ باشد، در این صورت بیان ترسیمی مسئله به صورت شکل ۶-۱۰ و جواب بهینه آن $x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = 5$ خواهد بود. این جواب هم روی مرز منطقه موجه قرار می گیرد. از طرف دیگر، اگر تابع هدف به شکل $Z = 54x_1 - 9x_1^2 + 78x_2 - 13x_2^2$ درآید،

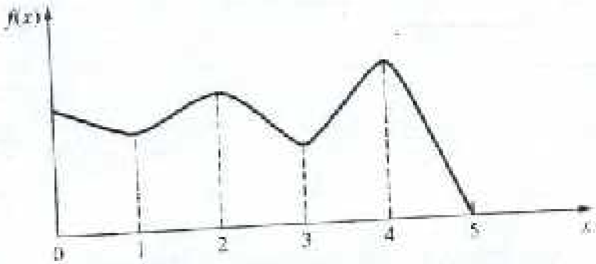


شکل ۶-۱۰ مثال شرکت درو‌پنجره‌سازی با تابع هدف غیرخطی

آنگاه جواب بهینه عبارت از $(x_1, x_2) = (3,3)$ خواهد بود که این بار روی مرز منطقه موجه نیست بلکه در داخل آن قرار می‌گیرد. (این جواب را می‌توان با استفاده از مشتق گیری تابع هدف و مساوی صفر قرار دادن آن و بدون در نظر گرفتن محدودیتها بدست آورد که خود به خود در محدودیتها هم صدق می‌کند.) از این رو، یک الگوریتم عمومی و کلی برای این نوع مسائل، نمی‌تواند تنها به جوابهای حدی بپردازد، بلکه باید تمام جوابهای داخلی را بررسی نماید.

پیچیدگی دیگری که در مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی ظاهر می‌شود این است که یک جواب حداکثر نسبی لزوماً یک جواب حداکثر مطلق نیست. برای نمونه، تابع یک متغیره‌ای که در شکل ۷−۱۰ ترسیم شده است را در نظر بگیرید. این تابع در فاصله $0 \le x \le 5$ سه جواب حداکثر نسبی یعنی $x=0$ و $x=2$ و $x=4$ دارد، در حالی که فقط یکی از آنها یعنی $x=4$ جواب حداکثر مطلق است. (به همین ترتیب تابع دارای سه حداقل نسبی $x=1,3,5$ و فقط یک حداقل مطلق $x=5$ است.)

از آنجا که الگوریتمهای برنامه‌ریزی غیرخطی تنها می‌توانند جوابهای حداکثر نسبی (یا حداقل نسبی) را بدست آورند، لذا آگاهی از این که یک جواب حداکثر نسبی تحت چه شرایطی، حداکثر مطلق نیز خواهد بود اهمیت زیادی دارد. یادآوری می‌شود که در مورد تابع یک متغیری و بدون محدودیت $f(x)$ (با فرض داشتن مشتقهای اول و دوم)، برای اثبات اینکه جواب حداکثر نسبی همان حداکثر مطلق است، کافی است

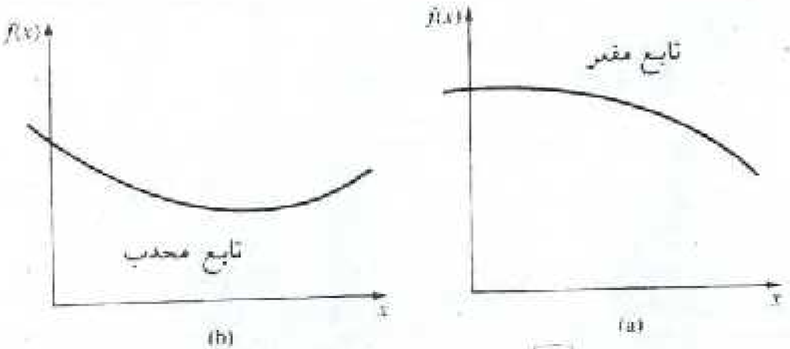


شکل ۷−۱۰ تابع با چند نقطه حداکثر نسبی

که رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$\frac{d^2f}{dx^2} \le 0 \qquad \text{به‌ازاء تمام مقادیر } x$$

چنین تابعی که خمیدگی آن همیشه به سمت پائین است (یا در حالت خاصی اصولاً خمیدگی ندارد) تابع مقعر[1] نامیده می‌شود. به همین ترتیب، اگر علامت $\le$ را با $\ge$ جایگزین کنیم، به تابع حاصل که خمیدگی آن همیشه به طرف بالا است تابع محدب[2] می‌گویند (بنابراین تابع خطی هم محدب و هم مقعر است). به مثالهای شکل ۸−۱۰ مراجعه شود. بدین ترتیب، شکل ۷−۱۰ تابعی را نشان می‌دهد که نه محدب و نه مقعر است زیرا خمیدگی آن گاهی به بالا و گاهی به پائین است.



شکل ۸−۱۰ مثالهای توابع محدب و مقعر

توابع چند متغیری نیز برحسب اینکه خمیدگیشان همیشه به سوی پایین یا بالا باشد، مقعر یا محدب خوانده می‌شوند. برای نمونه یک تابع چند جمله‌ای را در نظر بگیرید. چنانچه هر جمله آن مستقلاً مقعر باشد تابع نیز مقعر است (چنانچه هرجمله

1) Concave Function 2) Convex Function

فقط یک متغیر داشته باشد می‌توان مقعر بودن آنرا به کمک مشتق دوم آن بررسی کرد). به همین ترتیب، چنانچه هر یک از جملات تابعی محدب باشد آن تابع نیز محدب است. تعریف دقیق این مفاهیم همراه با سایر ریزه کاریها در پیوست ۱ (جلد اول) ارائه شده است.

وقتی یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی محدودیتی ندارد، مقعر بودن تابع هدف تضمین می‌کند که هر جواب حداکثر نسبی یک جواب حداکثر مطلق باشد. (به همین ترتیب، محدب بودن تابع برای حداقل مطلق بودن هر جواب حداقل نسبی کفایت می‌کند). چنانچه مسئله دارای محدودیت باشد، آنگاه برای اطمینان از مطلق بودن جواب نسبی باید شرط دیگری را نیز ملحوظ نمود، بدین معنی که منطقه موجه نیز یک مجموعه محدب[1] باشد. همان طور که در پیوست ۱ جلد اول گفته شد، مجموعه محدب به زبان ساده مجموعه‌ای از نقاط است که هر پاره‌خط رابط که دو نقطه دلخواه آن را به هم متصل نماید تماماً در داخل مجموعه قرار گیرد. بنابراین، منطقه موجه شکل ۷ — ۱۰ یعنی $0 \le x \le 5$ و همچنین منطقه موجه شکل ۳ — ۲ (یا منطقه موجه هر مسئله برنامه‌ریزی خطی دیگر) مجموعه‌های محدب هستند. به همین ترتیب، چنانچه توابع $g_i(\mathbf{x})$ محدب باشند، منطقه موجه شکل ۵ — ۱۰ (که از محدودیتهائی به صورت $g_i(\mathbf{x}) \le b_i$ تشکیل شده‌اند) نیز یک مجموعه محدب خواهد بود.

۳ — ۱۰ انواع مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی

مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی در شکلها و قالبهای مختلف ظاهر می‌شوند. برخلاف نقش روش سیمپلکس در برنامه ریزی خطی، هیچ الگوریتمی که بتواند همه نوع مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی را حل کند وجود ندارد. با این همه، الگوریتمهای مختلفی برای

1) Convex Set

حل بسیاری از این مسائل توسعه یافته‌اند. در بخش بعدی، مهمترین انواع مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی معرفی می‌شوند. در بخشهای بعد به تشریح نحوه حل بعضی ازآنها خواهیم پرداخت.

بهینه‌سازی بدون محدودیت

مسائل بهینه سازی بدون محدودیت[1] همان طور که از نامشان برمی‌آید هیچ محدودیتی ندارند، لذا هدف آنها حداکثر کردن تابع $f(\mathbf{x})$ بازاء $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ است. همان‌طور که در پیوست ۲ (جلد اول) بررسی شد، شرط لازم برای اینکه جواب مشخصی مانند $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ تابع $f(\mathbf{x})$ را بهینه سازد این است که در نقطه $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \qquad j = 1, 2, \ldots, n \text{ بازاء}$$

در صورتی که $f(\mathbf{x})$ مقعر باشد، آنگاه این شرط، کافی نیز خواهد بود. در این صورت، برای بدست آوردن مقدار $\mathbf{x}$ کافی است که جواب دستگاه n معادله‌ای حاصل از مساوی صفر قرار دادن n مشتق جزئی محاسبه گردد. متاسفانه، در مورد توابع غیرخطی $f(\mathbf{x})$، چنین معادلاتی نه تنها غالباً غیرخطی هستند، بلکه حل دستگاه حاصل نیز ناممکن است. راه‌حل چیست؟ در بخشهای ۴ — ۱۰ و ۵ — ۱۰، فرایندهای جستجو برای پیدا کردن $\mathbf{x}$، ابتدا برای حالت خاص $n = 1$ و سپس برای حالتهای $n > 1$ تشریح می‌شوند. این فرایندها نقش مهمی در حل بسیاری از انواع مسائل دیگر که حتی دارای محدودیت هم هستند بازی می‌کنند، زیرا بسیاری از الگوریتمهای حل مسائل محدودیت‌دار غیرخطی طوری طراحی شده‌اند که در هر تکرار می‌توانند به یک مسئله بهینه‌سازی بدون محدودیت تبدیل شوند.

چنانچه متغیر x_j دارای محدودیت غیرمنفی $x_j \ge 0$ باشد، در این صورت

1) Unconstrained Optimization

لازم است که در شرط لازم (و شاید) شرط کافی، در نقطه $x = x^*$ بازاء هر j، تغییر مختصری به شرح زیر صورت پذیرد.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\begin{cases}\le 0 & x = x^* \quad \text{اگر } x_j^* = 0 \text{ باشد}\\ = 0 & x = x^* \quad \text{اگر } x_j^* > 0 \text{ باشد}\end{cases}$$

مسئله‌ای که محدودیتهای غیرمنفی داشته اما محدودیتهای کارکردی نداشته باشد، حالت خاصی از مسئله بعدی است.

بهینه‌سازی با محدودیتهای خطی

مشخصه مسائل بهینه‌سازی با محدودیتهای خطی این است که محدودیتهای آنها کاملاً در چارچوب برنامه‌ریزی خطی قرار می‌گیرند به طوری که تمام توابع محدودیتهای $g_i(x^*)$ خطی هستند، اما تابع هدف غیرخطی است. مسئله‌ای که فقط با یک تابع غیرخطی روی منطقه موجه برنامه‌ریزی خطی سروکار داشته باشد، نسبت به سایر مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی ساده‌تر می‌شود. برای حل توابع هدف غیرخطی الگوریتمهای خاصی که شالوده آنها بر تعمیم برنامه‌ریزی خطی استوار است، توسعه یافته‌اند.

برنامه ریزی کوادراتیک[1] که در زیر مطرح می‌شود یک حالت خاص مهم ازاین نوع است.

برنامه‌ریزی کوادراتیک

در برنامه‌ریزی کوادراتیک همه محدودیتها خطی هستند، اما تابع هدف $f(x)$ باید کوادراتیک باشد. بنابراین، تنها تفاوت آن با یک مسئله برنامه‌ریزی خطی این است که بعضی ازعبارات تابع هدف یا به صورت مجذوریک متغیر و یا حاصلضرب دو

1) Quadratic Programming

متغیر هستند. الگوریتمهای متعددی برای حل این مسئله با شرط مقعر بودن تابع هدف توسعه یافته‌اند. در بخش ۷ـ۱۰ الگوریتمی که تعمیم مستقیم برنامه‌ریزی خطی است ارائه می‌شود.

برنامه‌ریزی کوادراتیک به واسطه آنکه در فرموله کردن بسیاری از مسائل علمی ظاهر می‌شود اهمیت زیادی دارد. برای نمونه، مسئله سرمایه‌گذاری با بازده غیرقطعی، که در بخش ۱ـ۱۰ تشریح شد، در چارچوب این مدل قرار می‌گیرد. لیکن، علت عمده دیگر اهمیت این مدل آن است که به عنوان روش متداول برای حل بسیاری از مسائل بهینه‌سازی با محدودیتهای خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد، بدین معنی که مسئله اصلی بایک رشته برنامه‌ریزیهای کوادراتیک تقریب زده می‌شود و از طریق حل آنها به جواب می‌رسد.

برنامه‌ریزی محدب

برنامه‌ریزی محدب[1] طیف وسیعی از مسائل را دربرمی‌گیرد. این برنامه‌ریزی بر فرضیات زیر استوار است.

۱ ـ $f(x)$ تابعی مقعر است.

۲ ـ تمام $g_i(x)$ ها توابعی محدب هستند.

همان‌طور که در انتهای بخش ۲ـ۱۰ بحث شد، این فرضیات برای مطلق بودن یک جواب حداکثر نسبی، کافی است. در بخش ۶ـ۱۰ خواهیم دید که شرایط لازم و کافی در مورد جواب بهینه چنین مسئله‌ای، تعمیم شرایط بهینه سازی بدون محدودیت و همچنین توسعه آن به طوری که محدودیتهای غیرمنفی‌را هم دربربگیرد خواهد بود. در بخش ۹ـ۱۰ الگوریتم حل مسائل برنامه‌ریزی محدب تشریح می‌شود.

برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر

برنامه‌ریزی تفکیک پذیر[2] حالت خاصی از برنامه‌ریزی محدب‌است که فرض دیگری

1) Convex Programming

2) Separable Programming

نیز، به شرح زیر، به آن اضافه می‌شود.

۳- تمام توابع $f(\mathbf{x})$ و $g_i(\mathbf{x})$ تفکیک پذیر هستند.

یک تابع تفکیک پذیر، به زبان ساده، تابعی است که هر جملهٔ آن فقط یک متغیر داشته باشد، به طوری که بتوان تابع را به مجموع توابع یک متغیری تفکیک نمود. برای نمونه، اگر $f(\mathbf{x})$ تفکیک پذیر باشد می‌توان آنرا به شکل زیر بیان نمود

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

که هر کدام از توابع $f_j(x_j)$ فقط شامل جملات مربوط به x_j می‌شوند. در برنامه‌ریزی تفکیک پذیر فرض جمع‌پذیری[1]، طبق تعاریف بخش ۳-۲، صدق می‌کند، در حالی که فرض تناسب[2] (به علت غیرخطی بودن توابع) برقرار نیست.

توجه داشته باشید که باید بین این مسائل و سایر مسائل برنامه‌ریزی محدب تمایز قائل شد، زیرا هر برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر را با تقریب خوبی می‌توان به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل کرد و از روش بسیار کارآی سیمپلکس استفاده نمود. این رویکرد در بخش ۸-۱۰ تشریح می‌شود (برای سهولت، در این بخش بر مسائل تفکیک‌پذیر با محدودیتهای خطی تاکید می‌شود که طبعاً روش ویژه حل آنها فقط در مورد تابع هدف به کار گرفته خواهد شد).

برنامه‌ریزی غیرمحدب

برنامه‌ریزی غیرمحدب طبعاً شامل همه مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی است که فرضیات برنامه‌ریزی محدب در مورد آنها صدق نمی‌کند. دراین مسائل، حتی اگر بتوان یک جواب بهینه نسبی هم بدست آورد، باز دلیلی ندارد که چنین جوابی بهینه مطلق هم باشد. از این رو، الگوریتمی یافت نمی‌شود که لزوماً بتواند جواب بهینه چنین مسائلی را تعیین کند. لیکن، الگوریتمهائی برای پیدا کردن جوابهای بهینه نسبی وجود دارد،

1) Additivity

2) Proportionality

بخصوص در مواردی که شکل توابع غیرخطی چندان با شکلی که برای برنامه‌ریزی محدب فرض شده تفاوت نداشته باشد. یکی از این الگوریتمها در بخش ۱۰-۱۰ ارائه می‌شود.

با وجود این، بعضی از انواع مشخص برنامه‌ریزی محدب را بدون گرفتاریهای مهمی می‌توان با روشهای خاص حل کرد. دو نوع مهم اینها درزیر شرح داده می شوند.

برنامه‌ریزی هندسی

هنگام استفاده از برنامه‌ریزی غیرخطی در حل مسائل طراحی مهندسی، به کرات با توابعی به شکل زیر برخورد می کنیم

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} c_i P_i(\mathbf{x})$$

$$P_i(\mathbf{x}) = x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \cdots x_n^{a_{in}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

در چنین مواردی ضرایب c_i و a_{ij} نوعاً مقادیر ثابت فیزیکی و x_j ها متغیرهای طراحی هستند. چون این توابع نه محدب و نه مقعرند، لذا نمی‌توان روشهای برنامه‌ریزی محدب را در مورد این مسائل، که به آنها برنامه‌ریزی هندسی می گویند، به کار گرفت. لیکن، مورد خاص و مهمی وجود دارد که می‌توان آنرا به یک برنامه‌ریزی محدب تبدیل نمود. در این حالت که حداقل کردن تابع هدف مورد نظر است، تمام ضرایب c_i در همه توابع مثبت هستند و به همین دلیل به آنها چندجمله‌ای‌های مثبت تعمیم یافته[1] (یا پوزی‌نومیال)[2] نیز می گویند، با تغییر متغیری به شرح زیر، می‌توان به یک برنامه‌ریزی محدب رسید.

$$x_j = e^{y_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

1) Generalized positive polynomials

2) Posynomial که مخفف دو کلمه Positive Polynomial است (م)

که r_j هامتغیرهای تصمیم جدید هستند. اکنون می‌توان از الگوریتمهای برنامه‌ریزی محدب برای حل این مسئله استفاده کرد. روشهای دیگری نیز برای حل مسائل برنامه‌ریزی پوزی نومیالو سایر انواع مسائل برنامه‌ریزی هندسی دیگر طراحی شده‌اند.

برنامه‌ریزی کسری

فرض کنید که تابع هدف به صورت کسری، یعنی نسبت دو تابع باشد.

$$\text{Maximize}\quad f(\mathbf{x}) = \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_2(\mathbf{x})}$$

این نوع مسائل برنامه‌ریزی کسری[1] موقعی مطرح می‌شوند که به عنوان مثال بخواهیم نسبت کل تولید به نفر ساعت صرف شده (بهره‌وری)[2] یا سود به سرمایه (نرخ بازدهی) یا میانگین سود حاصل از یک سرمایه گذاری نسبت به انحراف معیار (میزان ریسک) آن را حداکثر کنیم. روشهای ویژه‌ای برای بعضی از حالتهای خاص $f_1(\mathbf{x})$ و $f_2(\mathbf{x})$ توسعه یافته‌اند.

در مواردی که مقدور باشد، بهترین روش حل مسائل برنامه‌ریزی کسری تبدیل کردن آنها به حالتهای استانداردی است که روشهای مشخصی برای حل آنها یافت می‌شود. برای نمونه، فرض کنید که برنامه‌ریزی کسری به شکل زیر باشد.

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{cx}+c_0}{\mathbf{dx}+d_0}$$

که c و d بردارهای سطری، x بردار ستونی و c_0 و d_0 مقادیری ثابتی هستند. به علاوه، فرض کنید که توابع $g_i(\mathbf{x})$ نیز خطی و به شکل $\mathbf{Ax}\le\mathbf{b}$ و $\mathbf{x}\ge\mathbf{0}$ باشند. چنین مسئله‌ای، با تغییر متغیری به شرح زیر به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی معادل تبدیل می‌شود.

1) *Fractional Programming* 2) *Productivity*

$$\mathbf{y}=\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{dx}+d_0} \quad \text{و} \quad t=\frac{1}{\mathbf{dx}+d_0}$$

پس $\mathbf{x}=\mathbf{y}/t$ است. بدین ترتیب، مسئله زیر بدست می آید که با روش سیمپلکس قابل حل است.

$$\text{Maximize}\quad Z = \mathbf{cy} + c_0 t$$

$$\mathbf{Ay} - \mathbf{b}t \le \mathbf{0}$$
$$\mathbf{dy} + d_0 t = 1$$

$$\mathbf{y} \ge 0 \qquad t \ge 0$$

در حالت کلی‌تر، با استفاده از چنین روش تغییر متغیری، یک برنامه‌ریزی کسری را می‌توان به یک برنامه‌ریزی محدب تبدیل نمود، به شرط آنکه تابع $f_1(\mathbf{x})$ مقعر و توابع $f_2(\mathbf{x})$ و $g_i(\mathbf{x})$ محدب باشند.

مسئله مکمل

در برنامه‌ریزی کوادراتیک که در بخش ۱۰-۷ مطرح می‌شود، ملاحظه خواهید کرد که چگونه حل بعضی از مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی به حل مسائل مکمل[1] منجر می‌شود. با فرض معلوم بودن متغیرهای $w_1, w_2, \ldots, w_p$ و همچنین $z_1, z_2, \ldots, z_p$ مسئله مکمل عبارت است از پیدا کردن یک جواب موجه که در مجموعه محدودیتهای زیر

$$\mathbf{w}=F(\mathbf{z}) \qquad \mathbf{w}\ge 0 \qquad \mathbf{z}\ge 0$$

و همچنین محدودیتهای مکمل[2] صدق نماید.

$$\mathbf{w}^T\mathbf{z}=0$$

1) *Complementarity Problems* 2) *Complementarity Constraints*

در این رابطه، w و z بردارهای ستونی، F تابع برداری و T معرف ترانسپوز[1] ماتریس است (پیوست ۳ جلد اول). چون این مسئله تابع هدفی ندارد، لذا نمی‌توان آنرا یک برنامه‌ریزی غیرخطی نامید. چون رابطه مکمل بودن $w_i = 0$ یا $z_i = 0$، بازاء $i = 1, 2, \ldots, p$ (و یا هر دو) صدق می‌کند به آن مسئله مکمل می‌گویند.

یک حالت خاص و مهم، مسئله مکمل خطی است، یعنی

$$F(z) = \mathbf{q} + \mathbf{M}z$$

که q یک بردار ستونی و M یک ماتریس $p \times p$ است. با مفروضاتی مشخص در مورد M، الگوریتمهای کارآئی برای حل چنین مسائلی طراحی گردیده‌اند. یکی از اینها، حرکت از یک جواب موجه به جواب موجه بعدی با استفاده از روش سطر و ستون لولا و مشابه عملیاتی است که در روش سیمپلکس به کار گرفته می‌شود.

مسئله مکمل، علاوه بر برنامه‌ریزی غیرخطی، درنظریه بازیها، مسائل تعادل اقتصادی و مسائل تعادل در مهندسی نیز کاربردهائی دارد.

۴ـ۱۰ بهینه‌سازی توابع یک متغیری و بدون محدودیت

حال که پاره‌ای از انواع مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی معرفی گردیدند، بحث درباره چگونگی حل را از ساده‌ترین نوع آنها، یعنی بهینه‌سازی توابع یک متغیری و بدون محدودیت که هدف آن حداکثر کردن تابعی مشتق‌پذیر و مقعر است آغاز می‌کنیم. بدین ترتیب، همان‌طور که شکل ۹ــ۱۰ نشان می‌دهد، شرط لازم و کافی برای آنکه جواب مشخصی مانند $x = x^*$ بهینه (حداکثر مطلق) باشد این است که

$$\frac{df}{dx} = 0 \qquad x = x^* \quad \text{در}$$

1) Transpose

در صورتی که بتوان x^* را مستقیماً بدست آورد، آنگاه جواب بهینه حاصل شده است. لیکن چنانچه $f(x)$ تابع ساده‌ای نباشد، به طوری که مشتق آن به تابعی خطی یا درجه ۲ تبدیل نگردد، آنگاه ممکن است نتوان معادله را با روش تحلیلی حل نمود. در این صورت، فرایند جستجوی یک بعدی[1] روش عددی مناسبی برای حل این مسئله است.

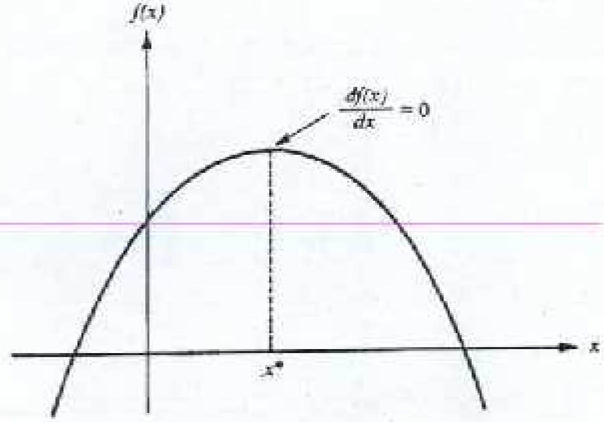
فرایند جستجوی یک بعدی

این فرایند نیز نظیر سایر فرایندهای جستجو، سلسله‌ای از جوابهای آزمایشی را دنبال می‌کند که به جواب بهینه منتهی می‌شوند. در هر تکرار، از جواب آزمایشی فعلی شروع کرده، با یک جستجوی منظم، یک جواب آزمایشی بهتر را می‌یابد.

فرایند جستجوی یک بعدی بر اساس یک نکته ساده، یعنی تشخیص مثبت یا منفی بودن شیب (مشتق) تابع در نقطه جواب آزمایشی فعلی ساخته شده است. با دانستن این موضوع معلوم می‌شود که برای حرکت به طرف یک جواب بهینه، آیابابد بدنبال جواب آزمایشی بزرگتر بود یا کوچکتر. از این رو، مثبت بودن مشتق بازاء جواب فعلی نشان می‌دهد که جواب بهینه از جواب فعلی x بزرگتر است (به شکل ۹ــ۱۰ مراجعه شود). بنابراین، در چنین حالتی x قبلی می‌تواند یک حد پائینی برای جوابهای آزمایشی بعدی باشد. به همین ترتیب، چنانچه مشتق منفی شود، جواب بهینه از x فعلی کوچکتر خواهد بود، و بنابراین جواب آزمایشی فعلی یک حد بالائی برای x^* خواهد شد. از این رو، بعد از آنکه هم حد پائینی و هم حد بالائی تعیین شدند، آنگاه هر جواب آزمایشی که بین آنها انتخاب شود به نوبت خود یک حد جدید می‌شود که به جواب بهینه نزدیکتر است و فاصله جستجو را کوچکتر می‌کند. مادامی که از یک قاعدهٔ منطقی برای انتخاب جوابهای آزمایشی پیروی گردد، سلسله نقاط بدست آمده به x نزدیکتر می‌شوند. در عمل، این فرایند به معنای پیگیری کار تا جائی است که

1) One-Dimensional Search Procedure

فاصله دو حد باندازه کافی کوچک شود، به طوری که جواب آزمایشی بدست آمده در فاصله خطای قابل گذشت[1] از x^* واقع گردد.



شکل ۹-۱۰ مسئله برنامه‌ریزی تابع‌مقعریک متغیری بدون محدودیت

برای بیان این فرایند باختصار، ازقراردادهای زیر استفاده می‌کنیم.

x' = جواب آزمایشی فعلی

$\underline{x}$ = حد پائینی برای x^*

$\bar{x}$ = حد فوقانی برای x^*

ε = فاصله خطای قابل گذشت برای x^*

قواعد منطقی گوناگونی برای انتخاب یک جواب آزمایشی جدید وجود دارد، اما در روش ساده زیر که **قاعده نقطه وسط**[2] نامیده می‌شود، هر بار نقطه وسط دو حد انتخاب می‌گردد (این راه حل به‌روش جستجوی بولانزو[3] نیز مرسوم است).

1) *Error Tolerence*
2) *Midpoint Rule*
3) *Bolanzo*

خلاصه فرایندجستجوی یك بعدی

قدم ابتدائی مقدار ε را مشخص نمائید. یک حد پائینی $\underline{x}$ و بالائی $\bar{x}$ را با روش جستجو (با پیدا کردن دو مقدار x که مشتق آنها به ترتیب مثبت و منفی باشد) پیدا کنید. جواب آزمایشی ابتدائی عبارتست از

$$x' = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}$$

قدم تکراری

۱ - درنقطه $x = x'$ مقدار $\frac{df(x)}{dx}$ را محاسبه نمائید.

۲ - اگر $\frac{df(x)}{dx} \geq 0$ باشد، مقدار حد پائینی را برابر با x' قرار دهید، یعنی $\underline{x} = x'$

۳ - اگر $\frac{df(x)}{dx} \leq 0$ باشد، $\bar{x} = x'$ قرار دهید.

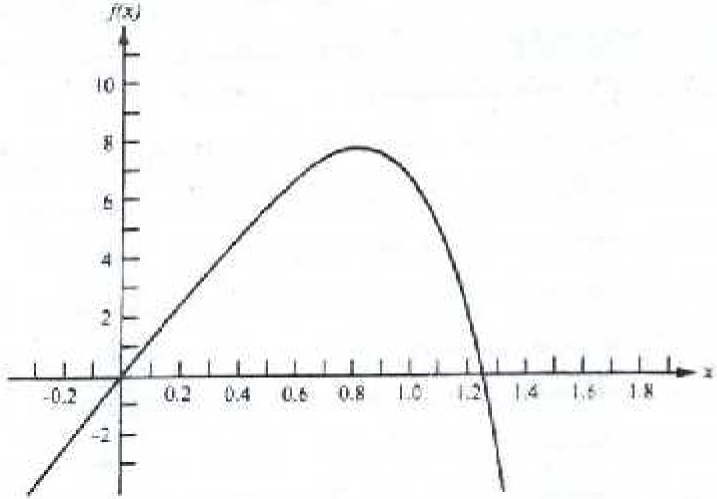
۴ - جواب آزمایشی جدید $x' = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}$ است

دستورتوقف اگر $(\bar{x} - \underline{x}) \leq 2\varepsilon$ باشد، یعنی جواب x' جدید در فاصله ε از x^* قرار دارد. در این صورت، توقف کنید. در غیر این صورت به قدم تکراری بازگردید.

اکنون با ارائه مثال زیر این رویه را تشریح می‌نمائیم.

مثال فرض کنید بخواهیم مقدار حداکثر تابع زیر که در شکل ۱۰-۱۰ نشان‌داده شده است را بدست آوریم.

$$f(x) = 12x - 3x^4 - 2x^6$$



شکل ۱۰–۱۰ مثال مربوط بروش فرایندجستجوی یک‌بعدی

مشتقهای اول و دوم این تابع عبارت است از

$$\frac{df(x)}{dx} = 12(1 - x^3 - x^5)$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -12(3x^2 + 5x^4)$$

چون مشتق دوم این تابع همیشه غیرمنفی است، پس $f(x)$ یک تابع مقعر است و می‌توان از فرایند جستجوی یک بعدی برای پیدا کردن حداکثر آن استفاده کرد. یک بررسی سریع (حتی بدون رسم منحنی) مشخص می‌کند که $f(x)$ بازاء مقادیر کوچک x مثبت و بازاء مقادیر $x < 0$ یا $x > 2$ منفی است، لذا $\underline{x} = 0$ و $\bar{x} = 2$ را به ترتیب حدپائینی و بالائی دانسته و نقطه وسط آنها یعنی $x' = 1$ را به عنوان جواب آزمایشی ابتدائی انتخاب می‌کنیم. فاصله خطای قابل گذشت در دستور توقف برای x^* را برابر با 0.01 فرض کنید. بنابراین، در تکرار نهائی لازم است که $(\bar{x} - \underline{x}) \le 0.02$ و

جواب نهائی نیز نقطه وسط این دو حد باشد. سلسله جوابهائی که بر اساس فرایند جستجوی یک بعدی بدست می‌آید در جدول ۱۰–۱ نشان داده شده‌اند. در این جدول، جهت اطلاع خواننده، هم مقدار تابع وهم مقدار مشتق جواب آزمایشی فعلی محاسبه شده‌اند. لیکن باید توجه داشت که در این الگوریتم اساساً به محاسبه مقدار $f(x)$ احتیاجی نیست، بلکه کافی است که علامت آن به نحوی مشخص گردد. در نتیجه، جواب مسئله به صورت زیر خواهد بود.

$$x^* \approx 0.836,$$
$$0.828125 < x^* < 0.84375.$$

جدول ۱۰–۱ کاربردفرایندجستجوی یک‌بعدی درموردمثال

تکرار	$\frac{df(x)}{dx}$	$\underline{x}$	$\bar{x}$	جدید x'	$f(x')$
0		0	2	1	7.0000
1	−12	0	1	0.5	5.7812
2	+10.12	0.5	1	0.75	7.6948
3	+4.09	0.75	1	0.875	7.8439
4	−2.19	0.75	0.875	0.8125	7.8672
5	+1.31	0.8125	0.875	0.84375	7.8829
6	−0.34	0.8125	0.84375	0.828125	7.8815
7	+0.51	0.828125	0.84375	0.8359375	7.8839
Stop					

۱۰–۵ بهینه‌سازی مسائل چندمتغیری بدون محدودیت

حال حداکثر کردن $f(x)$ که تابعی مقعر از چند متغیر $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ است و هیچ محدودیتی هم در مورد مقادیر موجه آن وجود ندارد را درنظر بگیرید. از مساوی صفر قراردادن مشتقهای جزئی این تابع، یک دستگاه معادلات حاصل می‌گردد که حل آن شرط لازم و کافی بهینگی است. چنانچه حل این دستگاه با روش تحلیلی

قابل قبول برابر با صفر گردد، یعنی اگر فاصله قابل قبول ε در نظر گرفته شود، در این صورت موقعی توقف می‌کنیم که

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right] \le \varepsilon \qquad j = 1, 2, \ldots, n \text{ بازاء }$$

شاید یک مقایسه بتواند به روشن شدن مطلب کمک نماید. تصور کنید که هدف شخصی صعود به قله تپه‌ای باشد. به علت نزدیک‌بینی، صعود کننده نمی‌تواند نوک تپه را ببیند. لیکن در هر محلی ایستاده باشد می‌تواند جهتی که حداکثر شیب را دارد تشخیص دهد. در جهت این شیب به طور مستقیم حرکت می‌کند و در موقع حرکت نیز می‌تواند بفهمد که همچنان در حال صعود است یا به شیب صفر رسیده است. در صورتی که تپه مقعر باشد، آنگاه می‌توان از روش جستجوی گرادیان[1] پیروی نمود. این مسئله دارای دو متغیر (x_1, x_2) است که موقعیت فعلی کوهنورد (صرفنظر از ارتفاع محل) را نشان می‌دهند. تابع $f(x_1, x_2)$ بیانگر ارتفاع تپه در این موقعیت مشخص است. در هر تکرار، کوهنورد از موقعیت فعلی خود (x_1, x_2) شروع کرده و جهتی را تعیین می‌کند که شیب حداکثر رادارد. آنگاه، در امتداد این جهت حرکت می‌نماید و تا وقتی که در حال صعود باشد به رفتن ادامه می‌دهد. هرگاه به نقطه‌ای برسد که تپه در امتداد آن جهت مسطح شده باشد متوقف می‌گردد و مجدداً جهت جدیدی با حداکثر شیب را تعیین می‌نماید. این تکرارها به صورت مسیرهای زیگزاگ ادامه می‌یابد تا به نقطه‌ای برسد که شیب تپه در همه جهات برابر با صفر باشد، در این صورت با فرض مقعر بودن تپه، به قله آن رسیده است.

در روش جستجوی گرادیان، مشکلترین قسمت هر تکرار تعیین t^*، یعنی مقداری که t را در جهت گرادیان حداکثر کند خواهد بود. از آنجا که مقادیر x' و $\nabla f(x')$ مشخص هستندو تابع نیز مقعر است، لذا حل مسئله به حداکثر کردن یک تابع

1) Gradinet Search Procedure

مقعر یک متغیری تبدیل می‌شود. ازاین رو، برای حل آن از روش جستجوی یک متغیری که در بخش ۴ – ۱۰ ارائه شد استفاده می‌شود. (در اینجا، حد پائینی t غیرمنفی است زیرا باید $t \ge 0$ باشد). در صورتی که f تابع ساده‌ای باشد با مساوی صفر قرار دادن مشتق تابع که برحسب t بیان شده، ممکن است بتوان جواب بهینه را با روش تحلیلی بدست آورد.

خلاصه روش گرادیان

قدم ابتدائی مقدار ε و یک جواب ابتدائی x' را تعیین کنید. به دستور توقف بروید.

قدم تکراری ۱ – تابع $f(x' + t\nabla f(x'))$ را به صورت تابعی از t بیان کنید. این کار با قرار دادن x_j به صورت زیر انجام می‌گیرد

$$x_j = x'_j + t\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\bigg|_{x = x'} \qquad j = 1, 2, \ldots, n \text{ بازاء }$$

سپس این عبارت در $f(x)$ قرار داده می‌شود.

۲ – با بهره‌گیری از روش جستجوی یک متغیری (یا مشتق گیری)، مقدار t^* که تابع $f(x' + t\nabla f(x'))$ را بازاء تمام مقادیر غیرمنفی t حداکثر می‌کند تعیین نمائید.

۳ – x' را برابر با $x' + t^*\nabla f(x')$ قرار دهید، به دستور توقف بروید

دستور توقف در نقطه $x = x'$، مقدار گرادیان را محاسبه نمائید. اگر رابطه زیر برقرار بودتوقف کنید.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right| \le \varepsilon \qquad j = 1, 2, \ldots, n \text{ بازاء }$$

مقدار فعلی x' با تقریب مورد نظر بهینه است. در غیر این صورت، به قدم تکراری بازگردید.

مثال مسئله دو متغیری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_2 - 2x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1 + 2 - 4x_2$$

به‌راحتی‌می‌توان نشان داد که $f(x)$ تابعی مقعر است. روش جستجوی گرادیان را از $x=(0,0)$ شروع می‌کنیم. چون در این نقطه مشتقهای جزئی به ترتیب برابر با صفر و دو است، لذا گرادیان برابر با

$$\nabla f(0,0) = (0,2)$$

خواهد بود. حال، اولین تکرار را به ترتیب زیر شروع می‌کنیم

$$x_1 = 0 + t(0) = 0$$
$$x_2 = 0 + t(2) = 2t$$

آنگاه این مقادیر را در تابع $f(x)$ قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}' + t\nabla f(\mathbf{x}')) &= f(0, 2t) \\ &= 2(0)(2t) + 2(2t) - (0)^2 - 2(2t)^2 \\ &= 4t - 8t^2 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه

$$f(0, 2t^*) = \max_{t \ge 0} f(0, 2t) = \max_{t \ge 0} \{4t - 8t^2\}$$

و همچنین

$$\frac{d}{dt}\{4t - 8t^2\} = 4 - 16t = 0$$

نتیجه می‌شود که

$$t^* = \frac{1}{4}$$

بنابراین، جواب جدید را جایگزین می‌کنیم

$$\mathbf{x}' = (0,0) + \frac{1}{4}(0,2) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

در این نقطه جدید گرادیان عبارتست از

$$\nabla f\left(0, \frac{1}{2}\right) = (1,0)$$

بنابراین، در تکرار دوم،

$$\mathbf{x} = \left(0, \frac{1}{2}\right) + t(1,0) = \left(t, \frac{1}{2}\right)$$

پس

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}' + t\nabla f(\mathbf{x}')) &= f\left(0 + t, \frac{1}{2} + 0t\right) = f\left(t, \frac{1}{2}\right) \\ &= (2t)\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right) - t^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= t - t^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه

$$f\left(t^*, \frac{1}{2}\right) = \max_{t \ge 0} f\left(t, \frac{1}{2}\right) = \max_{t \ge 0} \left\{t - t^2 + \frac{1}{2}\right\}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{t - t^2 + \frac{1}{2}\right\} = 1 - 2t = 0$$

پس

$$t^* = \frac{1}{2}$$

جواب جدید را جایگزین می‌کنیم.

$$x' = \left(0, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(1, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

برای مرتب کردن و سازمان دادن روش حل مسئله از جدولی شبیه ۲-۱۰ استفاده می‌کنیم، که در آن خلاصه عملیات دو تکرار فوق نشان داده شده است. ستون چهارم حاوی عبارتی برحسب x_i و t است که‌بایددر تابع $f(x)$ قرار گیرد و در ستون پنجم نوشته شود.

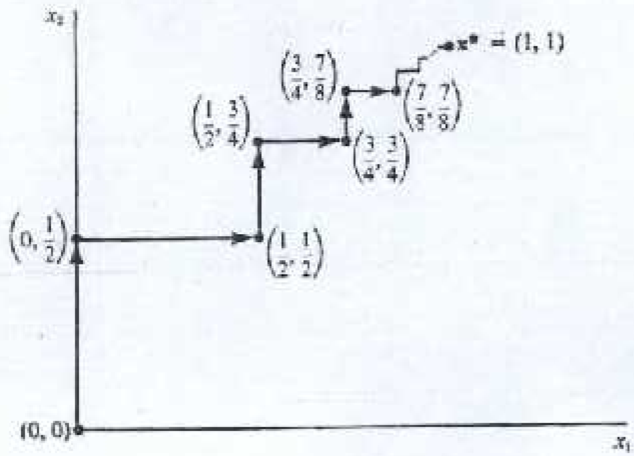
جدول ۲-۱۰ کاربردروش جستجوی‌گرادیان درموردمثال

تکرار	x'	$\nabla f(x')$	$x' + t\nabla f(x')$	$f(x' + t\nabla f(x'))$	t^*	$x' + t^*\nabla f(x')$
1	$(0, 0)$	$(0, 2)$	$(0, 2t)$	$4t - 8t^2$	$\frac{1}{4}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$(0, \frac{1}{2})$	$(1, 0)$	$(t, \frac{1}{2})$	$t - t^2 + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

چنانچه این عمل ادامه یابد، جوابهای بعدی یعنی (۰/۷۵ و ۰/۵) و (۰/۷۵ و ۰/۷۵) و (۰/۸۷۵ و ۰/۷۵) و (۰/۸۷۵ و ۰/۸۷۵) و... بدست می‌آیند که در شکل ۱۱-۱۰ نشان داده شده‌اند. چون این جوابها به‌جواب‌بهینه (۱ و ۱) = x^* میل می‌کنند، لذا این جواب بهینه است و می‌توان نشان داد که

$$\nabla f(1, 1) = (0, 0)$$

لیکن، چون این رشته از جوابهای همگرا هرگز به حدفوق نمی‌رسند، لذا این روش در نقطه‌ای پائین‌تر از (۱ و ۱)، که بستگی به ε دارد، توقف می‌کند و آنرا جواب نهائی می‌شناسد.



شکل ۱۱-۱۰ تشریح روش جستجوی‌گرادیان

همان‌طور که در شکل ۱۱-۱۰ دیده می‌شود، روش جستجوی گرادیان به جای حرکت مستقیم، در مسیری زیگزاک به طرف جواب بهینه حرکت می‌کند. از این رو، با در نظر گرفتن این نوع حرکت، تغییراتی نیز در روش داده شده است تا رسیدن به جواب بهینه با سرعت بیشتری میسر گردد.

در صورتی که $f(x)$ مقعر نباشد، استفاده از این روش به یک حداکثر نسبی می‌انجامد که لزوماً حداکثر مطلق نیست. در این حالت، تنها تغییری که در بیان این روش منظور می‌گردد آن است که t^* بدست آمده مربوط به نزدیکترین جواب حداکثر نسبی $f(x + t\nabla f(x))$ است که با افزایش t حاصل می‌شود.

چنانچه هدف مسئله حداقل کردن تابع $f(x)$ باشد، در این صورت در هر تکرار باید در جهت منفی گرادیان حرکت کرد. به عبارت دیگر، برای پیدا کردن جواب بعدی باید نقطه بعدی را به صورت زیر جایگزین کرد

$$x' = x' - t^*\nabla f(x')$$

تغییر لازم دیگر این است که برای محاسبه t^*، باید یک مقدار غیرمنفی برای t تعیین نمود که تابع $f(\mathbf{x}' - t\nabla f(\mathbf{x}'))$ را حداقل نماید، یعنی

$$f(\mathbf{x}' - t^* \nabla f(\mathbf{x}')) = \min_{t \geq 0} f(\mathbf{x}' - t \nabla f(\mathbf{x}'))$$

۱۰-۶ شرایط کان- تاکربرای بهینه‌سازی با محدودیت

در این بخش به چگونگی تشخیص جواب بهینه یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (با توابع مشتق‌پذیر) می‌پردازیم. شرایط لازم و کافی برای بهینه بودن چنین جوابی چیست؟

خلاصه شرایط بهینگی برای مسائل بدون محدودیت که در قسمتهای قبلی ارائه شد، در دو سطر اول جدول ۳-۱۰ نشان داده شده است. در ابتدای بخش ۳-۱۰ تعمیم این شرایط برای حالتی که محدودیتهای غیرمنفی را نیز شامل شود بررسی گردید. این شرایط که در سطر سوم جدول نشان داده شده است به نوبت خود حالت خاصی از شرایط حالت کلی است که در مورد بهینه‌سازی مسائل محدودیت‌دار صادق است. همان‌طور که در آخرین سطر جدول آمده است، این شرایط مربوط به حالت کلی است که به شرایط کان- تاکر[1] (یا به طور خلاصه شرایط KT) موسوم هستند و چکیده آن در قضیه زیر منعکس گردیده است

قضیه فرض کنید که توابع مشتق‌پذیر $f(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ دارای شرایط عادی هستند

۱ - به این شرایط، شرایط کاروش - کان‌تاکر (Karush-Kuhn- Tucher) نیز می‌گویند زیرا کاروش و کان - تاکر مستقلاً و به طور همزمان به این نتایج رسیدند.

۲ - این شرایط در مقاله زیر بیان شده است.

[2] Kuhn, H. W., and A. W. Tucker: "Nonlinear Programming," in Jerzy Neyman (ed.), *Proceedings of the Second Berkeley Symposium*, University of California Press, Berkeley, 1951, pp. 481-492.

جدول ۳-۱۰ شرایط لازم و کافی بهینگی

مسئله	شرایط لازم بهینگی	کافی است مشروط به‌آنکه
بهینه‌سازی بدون محدودیت و تک‌متغیری	$\frac{df}{dx} = 0$	$f(x)$ مقعر
بهینه‌سازی بدون محدودیت و چند متغیری	$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n)$	$f(x)$ مقعر
بهینه‌سازی با محدودیتهای غیرمنفی	$\frac{\partial f}{\partial x_j} \leq 0 \quad x_j\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n)$	$f(x)$ مقعر
حالت کلی بهینه‌سازی محدودیت‌دار	شرایط کان- تاکر	$f(x)$ مقعر

در این صورت، جواب زیر می‌تواند بهینه باشد.

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

به شرط آنکه بتوان m عدد $u_1, u_2, \ldots, u_m$ یافت که در شرایط زیر صدق نمایند.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} u_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0 \\ 2.\ x_j^*\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} u_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = 0 \end{array}\right\} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^*. \text{ در } j = 1,2,\ldots,n \text{ بازاء}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&3.\ g_i(\mathbf{x}^*) - b_i \le 0\\
&4.\ u_i(g_i(\mathbf{x}^*) - b_i) = 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{بازاء}\ i = 1, 2, \ldots, m
$$

$$
5.\ x_j^* \ge 0, \quad \text{بازاء}\ j = 1, 2, \ldots, n
$$

$$
6.\ u_i \ge 0, \quad \text{بازاء}\ i = 1, 2, \ldots, m
$$

در شرایط فوق u_i ها متناظر با متغیرهای ثانویه برنامه‌ریزی خطی هستند (این ارتباط متقابل بعداً در پایان همین بخش بسط داده می‌شود). و تعبیر اقتصادی مشابه نیز دارند. (لیکن u_i ها در ریاضیات به نام ضرایب لاگرانژ[1] خوانده می‌شوند). شرایط ۳ و ۵ فقط موجه بودن جواب را مورد بررسی قرار می‌دهند. سایر شرایط بسیاری از جوابهای موجه دیگر را از زمره آنها که می‌توانند نامزد بهینه بودن باشند حذف می‌نمایند. لیکن لازم به توضیح است که این شرایط، برای تضمین بهینه بودن جواب کافی نیست. همان طور که در آخرین ستون جدول ۳-۱۰ خلاصه شده است، شرط کافی برای تضمین بهینه بودن جواب، مقعر بودن تابع است. این فرضیات طی قضیه فرعی زیر که بسط قضیه فوق است بیان می‌گردد.

قضیه فرعی[2] فرض کنید که $f(\mathbf{x})$ تابعی مقعر و $g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ توابعی محدب باشند (یعنی فرضیات برنامه‌ریزی محدب برقرار است)، و تمام این توابع هم دارای شرایط عادی هستند. در این صورت، فقط و فقط در صورتی $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ یک جواب بهینه است که تمام شرایط فوق برقرار باشند.

مثال برای تشریح کاربرد شرایط KT ، مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی دو متغیری زیر را در نظر بگیرید

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & f(\mathbf{x}) = \ln(x_1 + 1) + x_2\\
& 2x_1 + x_2 \le 3\\
& x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

1) *Lagrange Multipliers.* 2) *Corollary*

در این مسئله، $m = 1$ ، $g_1(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2$ و در نتیجه $g_1(\mathbf{x})$ محدب است. به علاوه، می‌توان نشان داد که $f(\mathbf{x})$ مقعر است (به پیوست ۱ جلد اول مراجعه شود).

بنابراین، با کاربرد استنتاج فوق، جواب بهینه را می‌توان با حل شرایط KT بدست آورد.

این شرایط عبارتند از

$$
\begin{aligned}
&1(a).\ \frac{1}{x_1 + 1} - 2u_1 \le 0\\
&2(a).\ x_1\left(\frac{1}{x_1 + 1} - 2u_1\right) = 0\\
&1(b).\ 1 - u_1 \le 0\\
&2(b).\ x_2(1 - u_1) = 0\\
&3.\ 2x_1 + x_2 \le 3\\
&4.\ u_1(2x_1 + x_2 - 3) = 0\\
&5.\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\\
&6.\ u_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

برای حل این شرایط، باید توجه داشت که از شرط $1(b)$ نتیجه می‌شود که $u_1 \ge 1$. از $x_1 \ge 0$ رابطه $(x_1+1)^{-1} \le 1$ بدست می‌آید. $u_1 \ge 1$ به معنای آن است که $(x_1+1)^{-1} - 2u_1 < 0$ است، و در نتیجه از شرط $2(a)$ رابطه $x_1 = 0$ نتیجه خواهد شد. با روش مشابه، از شرط ۴ و با توجه به اینکه $u_1 \ge 1$ است، نتیجه می‌شود که $2x_1 + x_2 - 3 = 0$ و همچنین $x_2 = 3$ است.

در مورد مسائل پیچیده‌تر، بدست آوردن یک جواب بهینه که مستقیماً از شرایط KT بدست آید اگر هم اساساً غیرممکن نباشد حداقل بسیار مشکل است.

معذلک، این شرایط راهنمای بسیار مفیدی برای تشخیص یک جواب بهینه است و به کمک آنها می‌توان بهینه بودن یک جواب پیشنهادی را آزمود.

شرایط KT کاربردهای غیرمستقیم مفید دیگری هم دارد. یکی از این کاربردها را می‌توان در نظریه دوگانگی برنامه‌ریزی غیرخطی دانست، که شبیه نظریه دوگانگی برنامه‌ریزی خطی است که در فصل سوم کتاب ارائه گردید. به طور مشخص، در مورد

هر مسئله بهینه‌سازی با محدودیت و به شکل حداکثر کردن، که آنرا مسئله اولیه می‌نامیم، یک مسئله ثانویه متناظر با آن، به شکل حداقل کردن، تعریف می گردد. برای این منظور، از شرایط KT استفاده می‌شود. متغیرهای مسئله ثانویه شامل دو دسته متغیر، یعنی ضرایب لاگرانژ، u_i ، (بازاء $i=1,2,\dots,m$) ومتغیرهای اولیه x_j (بازاء $j=1,2,\dots,n$) است. در حالت خاص که مسئله اولیه یک برنامه‌ریزی خطی باشد، مسئله ثانویه فاقد متغیرهای x_j است و همان مسئله ثانویه برنامه‌ریزی خطی خواهد بود. (که u_i ها همان متغیرهای ثانویه y_i در فصل سوم هستند). چنانچه مسئله اولیه یک برنامه‌ریزی محدب باشد، آنگاه می‌توان رابطه‌ای بین مسئله اولیه و ثانویه تعریف کرد که شبیه روابط برنامه‌ریزی خطی باشد. برای نمونه، این خاصیت دوگانگی که مقدار توابع هدف دو مسئله با یکدیگر برابرند در اینجا نیز صادق است. به علاوه، دراینجا نیزمقادیر متغیرهای u_i را می‌توان به عنوان قیمتهای سایه تعبیر نمود. این مقادیر معرف آهنگ تغییر مقدار تابع هدف در اثر تغییر (ناچیز) مقدار سمت راست تابع محدودیت مربوطه است. از آنجا که نظریه دوگانگی برنامه‌ریزی غیرخطی مبحث نسبتاً پیشرفته‌ای است، لذا پیشنهاد می‌شود برای اطلاعات بیشتر به منابع دیگر مراجعه گردد.

در بخش بعدی یک کاربرد غیرمستقیم دیگر شرایط KT را ملاحظه خواهید کرد.

۷ـ۱۰ برنامه‌ریزی کوادراتیک

همان طورکه در بخش ۳ـ۱۰ اشاره شد، تفاوت برنامه‌ریزی کوادراتیک با برنامه‌ریزی خطی این است که تابع هدف آن می‌تواند شامل جملات x_j^2 و x_jx_k (بازاء $j \neq k$) نیز باشد. با استفاده ازقراردادهای ماتریسی، هدف مسئله‌پیدا کردن x است به‌طوری که

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} - \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Qx}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \quad \text{و} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

که c یک بردار سطری، x و b بردارهای ستونی، Q و A ماتریس و T علامت ترانسپوز ماتریس است. ضرایب q_{ij} (عناصر Q) مقادیر ثابتی هستند و $q_{ij} = q_{ji}$ است (وجود ضریب ۵/۰ در تابع هدف از همین ناشی می‌شود).

الگوریتمهای متعددی برای حالت خاصی که تابع هدف مقعر باشد توسعه یافته است. (یک روش بررسی مقعر بودن تابع هدف، تحقق شرط معادل آن است، یعنی بازاء تمام بردارهای x ، رابطه زیر برقرار باشد، که دراین صورت Q یک ماتریس نیمه معین مثبت[1] است)

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Qx} \geq 0$$

در اینجا به تشریح یکی از این الگوریتمها می‌پردازیم. چون این الگوریتم از روش سیمپلکس (باقدری تغییر) استفاده می‌نماید لذا بسیار متداول است.

روش سیمپلکس تغییر یافته[2]

اولین قدم در این الگوریتم، فورموله کردن شرایط KT مسئله است. یک راه آسان برای بیان این شرایط عبارتست از:

$$\begin{gathered}
\mathbf{Qx} + \mathbf{A}^T\mathbf{u} - \mathbf{y} = \mathbf{c}^T \\
\mathbf{Ax} + \mathbf{v} = \mathbf{b} \\
\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \qquad \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \qquad \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \\
\mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0
\end{gathered}$$

1) Positive Semi-Definite

(2) The Modified Simplex Method

که عناصر بردار ستونی U همان u_i های بخش قبلی، و عناصر بردارهای ستونی y و v متغیرهای لنگی هستند (تحقیق دربارهٔ اینکه روابط فوق در واقع یک شکل شرایط KT است در مسئله ۴۰ بررسی می‌شود). باید توجه داشت که دو سطر آخر این شرایط، دلالت بر وجود روابط مکمل دارند. به این ترتیب که بازاء $j=1,2,\ldots,n$ یا $x_j=0$ و یا $y_j=0$ (و یا هردو) برقرار است. همچنین، بازاء $i=1,2,\ldots,m$ یا $u_i=0$ و یا $v_i=0$ (و یا هردو) صدق می‌نماید. نتیجتاً، متغیرهای هرکدام از این زوجها به متغیرهای مکمل موسومند.

با توجه به فرض مقعر بودن تابع هدف و محدب بودن محدودیتها به علت خطی بودن آنها طبق استنتاج بخش ۶−۱۰، شرط کافی برقرار است. از این رو، x فقط و فقط وقتی بهینه است که مقادیری برای y و u و v یافت شود که در شرایط فوق صدق نمایند. بدین ترتیب، مسئله اصلی به مسئله معادل آن که یافتن یک جواب موجه برای این شرایط باشد تبدیل می‌گردد.

شایان توجه است که این مسئله معادل، در واقع یک نمونه از مسئله مکمل خطی است که در بخش ۳−۱۰ معرفی شد (به مسئله ۱۳ مراجعه شود)، که معادله آخر آن محدودیت مکمل خواهد بود.

نکته کلیدی دیگری که جدا از محدودیتهای مکمل باید مورد توجه قرار گیرد این است که شرایط KT درواقع محدودیتهای برنامه‌ریزی خطی با $2(n+m)$ متغیر است. به علاوه، طبق محدودیت مکمل، هر دو متغیر مکمل نمی‌توانند متغیرهای اساسی یک جواب اساسی (با شرایط غیرتبهگن بودن) باشند. بنابراین، مسئله تبدیل می‌شود به پیدا کردن یک جواب اساسی موجه یک برنامه‌ریزی خطی که محدودیتهای آن همین شرایط، به اضافه محدودیت فوق است. (این جواب اساسی ابتدایی ممکن است تنها جواب موجه موجود باشد).

همان طورکه در بخش ۷−۲ بحث شد، پیدا کردن یک جواب اساسی موجه نسبتاً سرراست است. در حالت ساده که (با احتمال ضعیف) $c^T \le 0$ و $b \ge 0$ باشد، متغیرهای اساسی ابتدایی همان عناصر y و v هستند (با ضرب کردن اولین مجموعه

معادلات در ۱−). به این ترتیب، جواب مورد نظر عبارت است از

$$x=0,\ u=0,\ y=-c^T,\ v=b$$

در غیر این صورت، باید با افزودن یک متغیر مصنوعی به هر معادله‌ای که در آن $c_j>0$ یا $b_i<0$ باشد مسئله را تغییر داد (در حالت اول با افزودن متغیر در سمت چپ و در حالت دوم با تفریق از سمت چپ و سپس ضرب کردن آن در ۱−). در این صورت، از متغیرهای مصنوعی (که آنها را z_1 و z_2 می‌نامیم) به عنوان متغیرهای اساسی ابتدایی استفاده می‌شود. (باید توجه داشت که این مقادیر متغیرهای اساسی ابتدایی در محدودیت مکمل صدق می‌کنند، زیرا $x=0$ و $u=0$ به عنوان متغیرهای غیراساسی خودبه خود برقرار است). آنگاه، با استفاده از فاز یک روش سیمپلکس دو فاز، یک جواب اساسی موجه ابتدایی برای مسئله پیدا می‌کنیم، یعنی این روش در مورد مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر اجراء می‌شود.

$$\text{Minimize} \quad Z=\sum_j z_j$$

در رابطه با محدودیتهای برنامه‌ریزی خطی که شامل متغیرهای مصنوعی نیز هستند، تنها تغییری که باید در نظر گرفته شود نحوه انتخاب متغیراساسی ورودی است که به صورت زیر انجام می‌گردد

قاعده ورود محدود متغیرهای غیراساسی که متغیرمکمل آنها در حال حاضر اساسی است را به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب نکنید. از بین سایر متغیرهای غیراساسی، طبق ضابطه متداول روش سیمپلکس، متغیر اساسی ورودی را مشخص کنید.

این قاعده باعث می‌شود که در طول اجرای الگوریتم، محدودیت مکمل همواره برقرار باشد. هنگامی که یک جواب بهینه به شکل زیر برای این مسئله پیدا شود، آنگاه x^* جواب بهینه مسئله اصلی کوادراتیک خواهد بود.

$$\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{v}^*, z_1 = 0, \ldots, z_n = 0$$

مثال روش فوق را در مورد مثال زیر به کار می‌گیریم

$$\text{Maximize} \quad f(x_1, x_2) = 15x_1 + 30x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

از پیوست ۱ نتیجه می‌شود که $f(x_1, x_2)$ تابعی کاملاً محدب است (به مسئله ٤۱ الف مراجعه شود)، یعنی

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

ماتریس معین مثبت است، و در نتیجه می‌توان الگوریتم فوق را به کار گرفت. با محاسبه شرایط KT و معرفی متغیرهای مصنوعی مورد نیاز، برنامه‌ریزی خطی که باید با روش سیمپلکس تغییر یافته حل شود به شرح زیر است

$$\text{Minimize} \quad Z = z_1 + z_2,$$

$$\begin{aligned} 4x_1 - 4x_2 + u_1 - y_1 \quad\quad + z_1 \quad\quad &= 15 \\ -4x_1 + 8x_2 + 2u_1 \quad\quad - y_2 \quad\quad + z_2 &= 30 \\ x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad + v_1 \quad\quad &= 30 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, u_1 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, v_1 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0$$

محدودیت مکمل اضافی که به طور صریح در نظر گرفته نشده عبارت است از

$$x_1y_1 + x_2y_2 + u_1v_1 = 0$$

قاعده ورود محدود باعث می‌شود که محدودیت فوق همواره برقرار باشد. به طور مشخص، در مورد سه زوج مکمل یعنی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (u_1, v_1) هر گاه یکی از متغیرهای هر کدام از زوجها، متغیری اساسی باشد، متغیر دیگر آن نمی‌تواند اساسی شود. یادآوری می‌شود که تنها متغیرهای اساسی می‌توانند غیرصفر باشند. از آنجا که مجموعه متغیرهای اساسی برنامه‌ریزی خطی یعنی z_1 و z_2 و v_1 یک جواب اساسی موجه است که در محدودیتهای مکمل هم صدق می‌کند، لذا این محدودیت بعداً هم هرگز نقض نخواهد شد.

جدول ٤-۱۰ کاربرد روش سیمپلکس تغییریافته درمورد مسئله برنامه‌ریزی کوادراتیک

تکرار	متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	u_1	y_1	y_2	v_1	z_1	z_2	Right side
0	Z	0	-1	0	-4	-3	1	1	0	0	0	-45
	z_1	1	0	4	$\boxed{-4}$	1	-1	0	0	1	0	15
	z_2	2	0	-4	$\boxed{8}$	2	0	-1	0	0	1	$\boxed{30}$
	v_1	3	0	1	$\boxed{2}$	0	0	0	1	0	0	30
1	Z	0	-1	-2	0	-2	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	-30
	z_1	1	0	$\boxed{2}$	0	2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	30
	x_2	2	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$3\frac{3}{4}$
	v_1	3	0	$\boxed{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\boxed{22\frac{1}{2}}$
2	Z	0	-1	0	0	$-\frac{5}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$-7\frac{1}{2}$
	z_1	1	0	0	0	$\boxed{\frac{5}{2}}$	-1	$-\frac{3}{4}$	-1	1	$\frac{1}{4}$	$\boxed{7\frac{1}{2}}$
	x_2	2	0	0	1	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{16}$	$9\frac{3}{8}$
	x_1	3	0	1	0	$\boxed{-\frac{1}{4}}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{8}$	$11\frac{1}{4}$
3	Z	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
	u_1	1	0	0	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	3
	x_2	2	0	0	1	0	$\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{40}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	9
	x_1	3	0	1	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{20}$	12

جدول ٤-۱۰ کاربرد روش سیمپلکس تغییر یافته را در برنامه‌ریزی کوادراتیک را نشان می‌دهد. اولین قسمت جدول، دستگاه معادلات اولیه را بعد از تغییر تابع هدف از حداقل کردن Z به حداکثر کردن $(-Z)$ و حذف متغیرهای اساسی از آن نشان می‌دهد. در سه تکرار این جدول، قواعد روش سیمپلکس رعایت شده است با این استثنا که از بعضی متغیرهای غیراساسی که می‌توانستند اساسی شوند به علت رعایت

قاعده ورود محدود صرفنظر گردیده است. در اولین قسمت، متغیر u_1 به عنوان متغیر اساسی ورودی منظور نشده، زیرا متغیر مکمل آن (y_1) در حال حاضر متغیر اساسی است. اما در هر حال x_1 که ضریب کوچکتری هم دارد انتخاب شده $-4 < -3$. در جدول دوم هر دو متغیر u_1 و y_2 حذف شده‌اند (زیرا y_1 و x_2 متغیر اساسی هستند)، و لاجرم x_1 به عنوان تنها متغیر غیراساسی که دارای ضریب منفی در سطر صفر است انتخاب می‌شود. (طبق روش سیمپلکس معمولی هر کدام از دو متغیر u_1 یا x_1 می‌توانستند به عنوان متغیرهای اساسی ورودی برگزیده شوند، زیرا ضرایب آنها در سطر صفر برابر بود). در قسمت سوم جدول، هر دو متغیر y_1 و y_2 حذف می‌شوند (زیرا x_1 و x_2 متغیرهای اساسی هستند). لیکن u_1 حذف نمی‌شود زیرا y_1 دیگر متغیر اساسی نیست، و در نتیجه u_1 به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب می‌گردد.

جواب بهینه مسئله $x_1 = 12, x_2 = 9, u_1 = 3$ و بقیه متغیرها برابر با صفر است (در مسئله ۱۰ ج تحقیق درباره برقراری شرایط KT برای مسئله اصلی بررسی می‌شود). از این رو، جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی کوادراتیک (که فقط شامل متغیرهای x_1 و x_2 است) به صورت $(x_1, x_2) = (12,9)$ خواهد بود.

۱۰ـ۸ برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر

در بخش قبلی چگونگی حل بعضی از مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی با استفاده از تعمیم روش سیمپلکس نشان داده شد. در اینجا دسته دیگری را بررسی می‌نمائیم که به برنامه‌ریزی تفکیک پذیر موسومند و می‌توانند مستقیماً با روش سیمپلکس حل شوند. این مسائل را می‌توان با تقریب دلخواه به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی که متغیرهای زیادی دارد تبدیل نمود.

همان‌طور که در بخش ۳ــ۱۰ اشاره شده در برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر، فرض بر این است که $f(x)$ مقعر و توابع محدودیت $g_i(x)$ محدب باشند، همچنین تمام این توابع نیز تفکیک‌پذیر فرض می‌شوند (یعنی توابعی که هر کدام از عبارات آنها تابعی از یک متغیر است). لیکن، برای آنکه مسئله زیاد پیچیده نشود، در اینجا فقط حالت خاصی را بررسی می کنیم که توابع محدب و تفکیک‌پذیر $g_i(x)$ توابعی خطی، نظیر برنامه‌ریزی خطی، باشند. بدین ترتیب، کافی است که تغییرات لازم فقط بر روی تابع هدف انجام گیرد.

در چارچوب فرضیات فوق، می‌توان تابع هدف را برحسب مجموع توابع مقعر یک متغیری به شرح زیر بیان نمود.

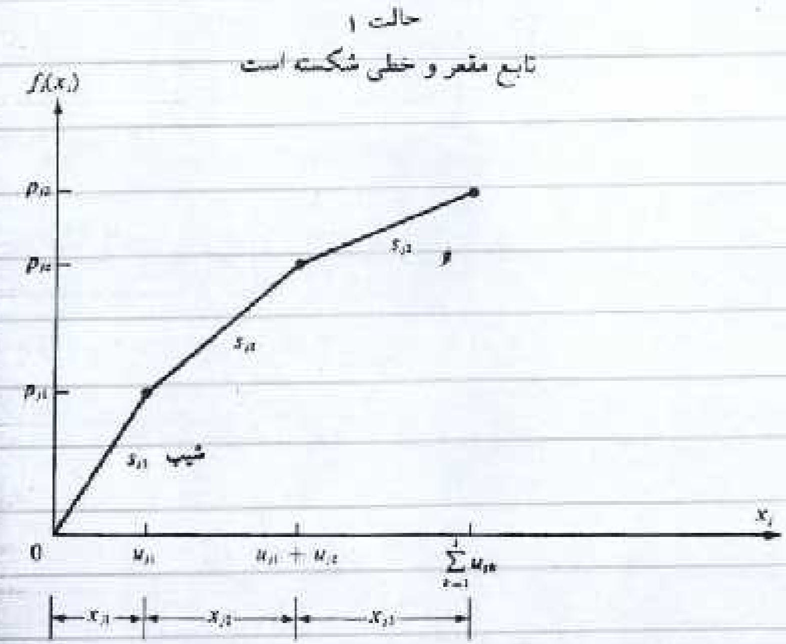
$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

که بازاء تمام مقادیر موجه x_j ، هر کدام از $f_j(x_j)$ ها به یکی از صورتهای شکل ۱۲ــ۱۰ است، چون $f(x)$ معیار عملکرد (مثلاً سود) تمام فعالیت‌هاست، لذ $f_j(x_j)$ بیانگر میزان سود حاصل از فعالیت j است وقتی که سطح آن x_j باشد. با شرط تفکیک‌پذیری $f(x)$ ، خاصیت جمع‌پذیری صادق است (به بخش ۳ــ۲ مراجعه شود)، یعنی رابطه متقابلی بین فعالیتها وجود ندارد که تأثیر جداگانه‌ای روی سود یکدیگر بگذارند. فرض مقعر بودن $f_j(x_j)$ به معنای این است که سودآوری نهائی (شیب منحنی سود)، با افزایش x_j یا ثابت است و یا کاهش می‌یابد (در هر حال هرگز افزایش پیدا نمی‌کند).

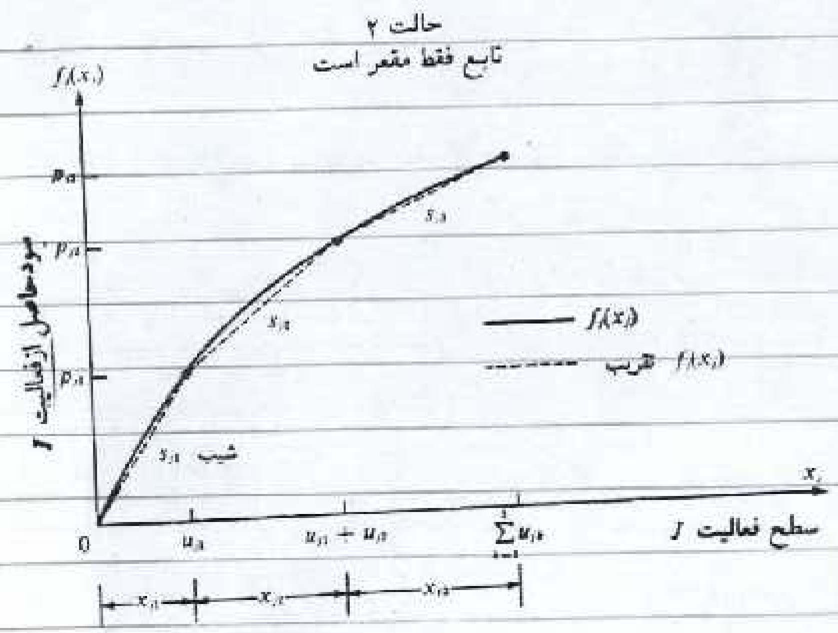
در عمل منحنی‌های سود متعددی وجود دارند که به شکل تابع مقعر هستند. برای نمونه، ممکن است با یک قیمت مشخص فقط بتوان مقدار محدودی از یک محصول را فروخت و فروش مقادیر بیشتر تنها با کاهش قیمت مقدور گردد، و شاید برای فروش بیشتر باز هم لازم باشد که قیمت پائینتر آورده شود. مورد دیگری که معمولاً در عمل پیش می‌آید، موقعی است که بالا بردن سطح تولید از مقداری مشخص، مثلاً ظرفیت عادی تولید، مستلزم هزینه‌های تولیدی بیشتری باشد (مثلاً پرداخت

اضافه کاری که از هزینه نیروی انسانی در ساعات عادی کار بیشتر است).

هریک از موارد فوق به یکی از منحنی‌های شکل ۱۲−۱۰ منجر می‌شود. در حالت ۱، شیب فقط در نقاط شکست کاهش می‌یابد، به طوری که $f_j(x_j)$ به یک تابع خطی شکسته (یک رشته پاره خطهای متصل) تبدیل می‌گردد. در حالت ۲، ممکن است با افزایش x_j، شیب منحنی به طور مداوم کاهش یابد، به طوری که $f_j(x_j)$ به یک تابع مقعر کلی تبدیل شود. هر تابع از این نوع را می‌توان با تقریب به یک تابع خطی شکسته که در برنامه‌ریزی تفکیک پذیر به کار می‌آید تبدیل نمود. (شکل ۱۲−۱۰ یک تابع که فقط از سه پاره‌خط تشکیل شده است را نشان می‌دهد. اما، می‌توان این تقریب را با افزایش تعداد نقاط شکست دقیقتر نمود). چنین تقریبی بسیار ساده است، زیرا یک تابع خطی شکسته یک متغیری را همواره می‌توان برحسب تابعی از چند متغیر، به ترتیبی که در زیر می‌آید بیان نمود.



شکل ۱۲−۱۰ شکل منحنی‌های سود در برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر



شکل ۱۲−۱۰ شکل منحنی‌های سود در برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر

فرموله کردن در قالب برنامه‌ریزی خطی

نکته اصلی در تعریف تابع خطی شکسته این است که هر قسمت منحنی را می‌توان بر حسب یک متغیر بیان نمود. برای تشریح این موضوع، تابع $f_j(x_j)$ در شکل ۱۲−۱۰ حالت ۱ و یا تقریب تابع در حالت ۲ را در نظر بگیرید که در محدوده مقادیر موجه x_j از سه قسمت تشکیل شده است. پس از معرفی سه متغیر جدید x_{j1}, x_{j2}, x_{j3} تغییر متغیری به شرح زیر انجام دهید.

$$x_j = x_{j1} + x_{j2} + x_{j3}$$

که

$$0 \le x_{j1} \le u_{j1} \qquad 0 \le x_{j2} \le u_{j2} \qquad 0 \le x_{j3} \le u_{j3}$$

آنگاه با استفاده از شیبهای s_{j1}, s_{j2}, s_{j3} تابع را از نو به صورت زیر بنویسد.

$$f_j(x_j) = s_{j1}x_{j1} + s_{j2}x_{j2} + s_{j3}x_{j3}$$

همچنین محدودیتهای ویژه زیر نیز باید اضافه شود

$$x_{j2} = 0 \qquad \text{هرگاه} \quad x_{j1} < u_{j1}$$
$$x_{j3} = 0 \qquad \text{هرگاه} \quad x_{j2} < u_{j2}$$

دلیل اضافه نمودن این محدودیتهای ویژه آن است که فرض کنید $x_j = 1$ وقتی $u_{jk} > 1\ (k = 1,2,3)$ باشد، در نتیجه، $f_j(1) = s_{j1}$ خواهد بود. باید توجه داشت که فرض $x_j = 1$ یا رابطه زیر

$$x_{j1} + x_{j2} + x_{j3} = 1$$

اجازه برقراربودن یکی از روابط زیر را می‌دهد

$$x_{j1} = 1 \quad x_{j2} = 0 \quad x_{j3} = 0 \Rightarrow f_j(1) = s_{j1}$$
$$x_{j1} = 0 \quad x_{j2} = 1 \quad x_{j3} = 0 \Rightarrow f_j(1) = s_{j2}$$
$$x_{j1} = 0 \quad x_{j2} = 0 \quad x_{j3} = 1 \Rightarrow f_j(1) = s_{j3}$$

و می‌تواند به همین ترتیب ادامه یابد، ضمناً رابطهٔ زیر برقرار است.

$$s_{j1} > s_{j2} > s_{j3}$$

لیکن، محدودیت ویژه، شرایطی را به وجود می‌آورد که فقط امکان اول بتواند برقرار گردد، و این تنها امکانی است که مقداردرست را به $f_j(1)$ اختصاص می‌دهد.

متاسفانه، محدودیت ویژه فوق در چارچوب محدودیتهای برنامه‌ریزی خطی نمی‌گنجد، و لذا توابع خطی شکسته را نمی‌توان در قالب برنامه‌ریزی خطی بیان کرد. اما تابع $f_j(x_j)$ را مقعر فرض کردیم، یعنی $s_{j1} > s_{j2} > \dots$ است. به واسطهٔ این

موضوع،الگوریتمی که برای حداکثر کردن $f_j(x_j)$ به کار گرفته می‌شود، هنگام افزایش x_j خود به خود بالاترین اولویت را به استفاده از x_{j1} و اولویت بعدی را به x_{j2} و به همین ترتیب به متغیرهای بعدی خواهد داد. این موضوع، بدون اینکه صراحتاً در مدل آورده شود، خود به خود در بطن آن وجود دارد. خاصیت کلیدی زیر بیانگر همین است.

خاصیت کلیدی برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر یک برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر پس از بیان تابع خطی شکسته حاصل به صورت توابع خطی و همچنین با حذف محدودیت ویژه، به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌گردد. جواب این برنامه ریزی خطی خود به خود در محدودیت ویژه نیزصدق خواهد کرد.

بحث بیشتر درباره منطق این خاصیت کلیدی را در همین بخش و درضمن یک مثال مشخص ادامه می‌دهیم (به مسئله ۴۰ – الف نیز مراجعه شود).

برای بیان مدل کامل برنامه‌ریزی خطی، با استفاده از قرارداد فوق و با فرض اینکه n_j معرف تعداد پاره‌خطهای $f_j(x_j)$ در تابع خطی شکسته باشد، تغییر متغیری به شرح زیر در تمام مدل اعمال می‌گردد

$$x_j = \sum_{k=1}^{n_j} x_{jk}$$

درتابع هدف نیز، بازاء $j = 1,2,\dots,n$ ، رابطه زیر جایگزین می‌شود

$$f_j(x_j) = \sum_{k=1}^{n_j} s_{jk}x_{jk}$$

مدل حاصل عبارتست از

$$\text{Maximize} \quad Z = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n_j} s_{jk}x_{jk}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n_j} x_{jk}\right) \le b_i, \quad \text{for } i = 1,2,\ldots,m \qquad \text{بازاء}$$

$$x_{jk} \le u_{jk}, \quad \text{for } k = 1,2,\ldots,n_j \quad \text{and} \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad \text{بازاء}$$

$$x_{jk} \ge 0, \quad \text{for } k = 1,2,\ldots,n_j \quad \text{and} \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad \text{بازاء}$$

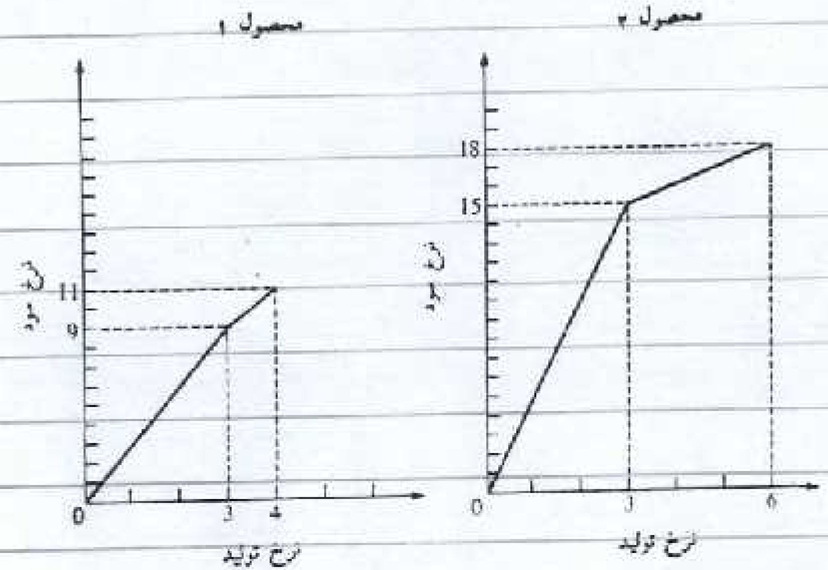
محدودیت $\sum_{k=1}^{n_j} x_{jk} \ge 0$ به علت وجود محدودیت $x_{jk} \ge 0$ حذف می گردد. اگر بعضی از متغیرهای اصلی x_j فاقد حدفوقانی باشند، آنگاه $u_{jn_j} = \infty$ قرار داده می‌شود. لذا محدودیت مربوط به آن نیز حذف می گردد.

بهترین روش حل این مدل، استفاده از فن حدفوقانی است که در بخش ٤–٦ ارائه شد. بعد از بدست آوردن جواب بهینه این مسئله، جواب بهینه مسئله اصلی برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر، بازاء $j = 1,2,\ldots n$ به شرح زیر جایگزین می‌شود

$$x_j = \sum_{k=1}^{n_j} x_{jk}$$

مثال شرکت در و پنجره سازی که در بخش ۱–۲ مطرح شد، به علت دریافت سفارش تولیدات جدید، مجبور است که برای تولید دو محصول قبلی خود به اضافه کاری متوسل شود. به طور مشخص، ۲۵ درصد از محصول ۱ و ۵۰ درصد ازمحصول ۲ که در بخش ۱–۲ معرفی شدند باید با استفاده ازاضافه کاری تولید شوند. افزایش هزینه ناشی از اضافه کاری سود هر واحد محصول ۱ را از ۳ به ۲ وسود محصول ۲ را از ۵ به ۱ دلار تقلیل می‌دهد. در نتیجه، منحنی سود هر دو محصول، که با حالت ۱ شکل ۱۲–۱۰ تطبیق می‌نماید، در شکل ۱۳–۱۰ نشان داده شده است .

مدیریت تصمیم گرفته است که به جای استخدام افراد جدید، از اضافه کاری کارکنان موجود برای این برنامه موقت استفاده نماید. لیکن تنها وقتی اجازه اضافه کاری داده می‌شود که از تمام امکانات تولیدی در زمان عادی استفاده شده باشد. علاوه بر این، در صورت لزوم ویا هدف اصلاح سودآوری کلی، می‌توان آهنگ تولید فعلی



شکل ۱۳–۱۰ اطلاعات مربوط به سودشرکت

(یعنی برای محصول ۱ و $x_1 = 2$ وبرای محصول ۲ و $x_2 = 6$)راموقتاً تغییر داد. از این رو، از گروه تحقیق در عملیات کارخانه خواسته شده است تا سودآورترین ترکیب محصولات را برای این دوره موقت تعیین نماید.

فورموله کردن در نظر اول چنین به نظر می‌رسد که تغییر مدل بخش ۱–۲ برای شمول به این مسئله جدید کار مشکلی نیست. به طور مشخص، فرض کنید که نرخ تولید محصول ۱ برابر $x_1 = x_{1R} + x_{1O}$ باشد که x_{1R} نرخ تولید در زمان عادی کار و x_{1O} نرخ تولید محصول با استفاده از اضافه کاری است. به همین ترتیب، برای محصول ۲، $x_2 = x_{2R} + x_{2O}$ خواهد برد. مسئله جدید برنامه‌ریزی خطی که مقادیر $x_{1R}, x_{1O}, x_{2R}, x_{2O}$ را تعیین می کند عبارتست از

$$\text{Maximize} \quad Z = 3x_{1R} + 2x_{1O} + 5x_{2R} + x_{2O}$$

$$
\begin{aligned}
x_{1R} \qquad\qquad\qquad\qquad & \le 3 \\
x_{1O} \qquad\qquad\qquad & \le 1 \\
2x_{2R} \qquad\quad & \le 6 \\
2x_{2O} & \le 6 \\
3(x_{1R} + x_{1O}) + 2(x_{2R} + x_{2O}) & \le 18
\end{aligned}
$$

$$x_{1R} \ge 0 \qquad x_{1O} \ge 0 \qquad x_{2R} \ge 0 \qquad x_{2O} \ge 0$$

لیکن، یک عامل عمده صریحاً در نظر گرفته نشده است. به طور مشخص، محدودیتی در مدل وجودندارد که استفاده از تمام ساعات عادی را قبل از اضافه کاری تضمین نماید. به عبارت دیگر، $x_{1O} > 0$ و $x_{1R} < 3$ و یا $x_{2O} > 0$ و $x_{2R} < 3$ می‌توانند موجه باشند. لیکن، چنین جوابهائی برای مدیریت قابل قبول نیست. (حذف این نوع جوابها، در واقع همان محدودیت ویژه‌ای است که در بخش قبلی مطرح شد).

اکنون به خاصیت کلیدی برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر می‌پردازیم. حتی باوجودی که ضرورت فوق صریحاً در مدل گنجانیده نشده است، به طور ضمنی در بطن آن وجود دارد. علیرغم اینکه این مدل دارای جوابهای موجهی است که بعضاً هم قابل قبول نیستند، اما جواب بهینه مسئله حتماً جوابی است که اضافه کاری را جایگزین کار عادی نخواهد کرد (علت این امر مشابه همان دلیلی است که در مورد روش M بزرگ صدق می‌کند، و در بخش ۸−۲ مطرح شد که در آنجا نیز برای سهولت در محاسبات، جوابهای موجه اضافی غیر بهینه در مدل وارد می‌شدند). بنابراین، روش سیمپلکس را می‌توان به راحتی برای این مدل به کار گرفت و ترکیب محصولاتی که سودآورترین باشند را بدست آورد. دو دلیل نیز برای این موضوع می‌توان مطرح کرد، یکی اینکه دو متغیر تصمیم مربوط به هر محصول، غیر از محدودیتهای حد فوقانی، در محدودیتهای کارکردی همه جا با هم و به صورت مجموع، یعنی $(x_{1R} + x_{1O})$ و $(x_{2R} + x_{2O})$ ظاهر می‌شوند.بنابراین، همیشه می‌توان هر جواب غیرقابل قبول (از نظر شرط اضافه کاری قبل از استفاده کامل از کار عادی) را به یک جواب قابل قبول تبدیل نمود که در آن مجموع دو متغیر تصمیم مربوط به هر محصول همچنان ثابت، ولی میزان تولید اضافه کاری با همان میزان تولید در زمان عادی جایگزین شده باشد. دلیل دوم این است که تولید در اضافه کاری کم صرفه‌تر از تولیددر زمان عادی است (شیب هرکدام از منحنی‌های سود در شکل ۳−۱۰، بر حسب نرخ تولید کاهنده است) لذا انتخاب جواب قابل قبول در مقایسه با جواب غیر قابل قبول سودآورتر است. در نتیجه، هر جواب موجهی که اضافه کاری را قبل از بهره‌وری کامل از ساعات عادی توصیه نماید نمی‌تواند جواب بهینه مدل باشد.

برای نمونه، جواب موجه اما غیرقابل قبول $x_{1R} = 1, x_{1O} = 1, x_{2O} = 3, x_{2R} = 1$ که مقدار تابع هدف آن $Z = 13$ است را در نظر بگیرید. برای رسیدن به همین تولید، یعنی $x_1 = 2$ و $x_2 = 4$ می‌توان $x_{1R} = 2$ و $x_{1O} = 0$ و $x_{2R} = 3$ و $x_{2O} = 1$ را انتخاب نمود. این جواب نیز موجه است و مقدار Z را به اندازه ۹ = (۲)(۵−۱) + (۱)(۳−۲) افزایش می‌دهد.

به همین ترتیب، جواب بهینه این مسئله $x_{1R} = 3, x_{2O} = 0, x_{2R} = 3, x_{1O} = 1$ است که قابل قبول نیز هست.

باید توجه نمود که بسیاری از محدودیتهای کارکردی مدل از نوع حد فوقانی است، یعنی محدودیتهایی است که به متغیرها حداکثر مقداری نسبت می‌دهد. چنانچه برنامه کامپیوتری برای حل این نوع مدلها در دسترس باشد، حل مسائل بزرگ را نیز آسان می‌نماید.

تعمیم روش

تا اینجا تنها در مورد حالت خاص برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر که در آن فقط تابع هدف $f(x)$ غیرخطی باشد بحث شد. اکنون حالت کلی‌تری رابه اختصار بررسی می‌کنیم که در آن اگر چه توابع محدودیت $g_i(x_i)$ لزوماً خطی نیستند، اما محدب و تفکیک‌پذیرند، به طوری که هر تابع رامی‌توان برحسب مجموع توابع یک متغیری بیان کرد.

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j)$$

هر کدام از $g_{ij}(x_j)$ ها یک تابع محدب است. در اینجا نیز هر کدام از این توابع را با تقریب مطلوب می‌توان به یک تابع خطی شکسته تبدیل نمود (البته در صورتی که خودشان به این شکل نباشند). عامل محدودکننده دیگری که باید در نظر گرفت این است که در مورد هر x_j ، $(j = 1, \dots, n)$ نقاط شکست تمام توابع خطی شکسته مربوط به این متغیر، یعنی $f_j(x_j), g_{1j}(x_j), \dots, g_{mj}(x_j)$ باید یکسان باشد، به طوری که متغیرهای جدید $(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm_j})$ را بتوان برای تمام این توابع خطی شکسته به کار گرفت. این فرموله کردن به یک مدل برنامه‌ریزی خطی منتهی می‌شود که کاملاً شبیه مدل فوق برای حالت خاص است، با این تفاوت که اکنون متغیرهای x_{jk} بازاء هر i و j ضرایب متفاوتی در محدودیت i دارند (که این محدودیتها متناظر با شیبهای تابع خطی شکسته تقریبی $g_{ij}(x_j)$ هستند). از آنجا که لازم است توابع $g_{ij}(x_j)$ محدب باشند، لذا همان خاصیت کلیدی برنامه‌ریزی محدب در اینجا هم برقرار است (به مسئله ۵۰ ب مراجعه شود).

به طوری که در این بخش مطرح شد، اشکال توابع خطی شکسته که برای تقریب توابع اصلی به کار می‌روند این است که دست یابی به تقریب خیلی خوب مستلزم افزایش تعداد پاره‌خطها (متغیرها) است، در حالی که این درجه ازدقت تنها در همسایگی جواب بهینه ضرورت دارد. از این رو، روشهای پیشرفته‌تری توسعه یافته است که ازتوابع خطی دو قسمتی استفاده می‌کنند، به طوری که فقط در نزدیکی جواب بهینه، تقریبها دقیقتر شود. چنین روشی هم سریع و هم در فاصله نسبتاً نزدیک جواب بهینه دقیق است.

۹ـ۱۰ برنامه‌ریزی محدب

در بخشهای قبلی، روشهای مربوط به چند حالت خاص برنامه‌ریزی محدب مورد بحث

قرار گرفت. در بخشهای ۴ـ۱۰ و ۵ـ۱۰ مسائل بدون محدودیت، در بخش ۷ـ۱۰ برنامه‌ریزی با تابع هدف کوادراتیک و محدودیتهای خطی، و در بخش ۸ـ۱۰ توابع تفکیک‌پذیربررسی گردیدند. در بخش ۶ـ۱۰ نیز با شرایط لازم و کافی بهینگی آشنا شدیم. دراین بخش، بعضی از رویکردهای حل مسائل برنامه‌ریزی محدب، که در آن تابع هدف که باید حداکثر شودتابعی مقعر و توابع محدودیت $g_i(\mathbf{x})$ محدب هستند را به اختصار بررسی می‌کنیم. مثالی از الگوریتمهای مسائل برنامه‌ریزی محدب نیز به عنوان نمونه، در همین بخش ارائه می‌شود.

هیچ الگوریتم استانداردی وجود ندارد که در حل همه مسائل برنامه‌ریزی محدب کاربرد داشته باشد. الگوریتمهای متعدد و گوناگونی که هرکدام محاسن و معایبی دارند توسعه یافته‌اند، و تحقیقات و پیشرفتهای بیشتر نیز در جریان است. به طور کلی، این الگوریتمها به سه گروه تقسیم می‌شوند

یک گروه الگوریتمهای گرادیانی[1] هستند که در آنها فرآیند جستجوی گرادیان، که در بخش ۵ـ۱۰ ارائه شد، با تغییراتی برای دنبال کردن مسیر جستجو به کار گرفته می‌شود. برای نمونه، روش تعمیم یافته گرادیان مختصر شده[2] را می‌توان نام برد که روشی بسیار متداول است.

گروه دوم، الگوریتمهای تسلسلی بدون محدودیت[3]، نظیر روشهای تابع جریمه[4] و تابع بازدارنده[5] هستند. این الگوریتمها، مسئله محدودیت‌دار اصلی را به رشته‌ای از مسائل بهینه‌سازی بدون محدودیت که جوابهای بهینه آنها به سمت جواب بهینه مسئله اصلی میل می‌کند تبدیل می‌نمایند، با کمک فرایند جستجوی گرادیان، که در بخش ۵ـ۱۰ ارائه شد، می‌توان این مسائل بدون محدودیت را حل کرد. چنین تبدیلی با گنجانیدن محدودیتها در یک تابع جریمه (یا تابع بازدارنده) میسر می‌شود.

1) Gradient Algorithms
2) Generalized Reduced Gradient
3) Sequential Unconstrained Algorithm
4) Penalty Function
5) Barrier Function

برای این منظور، محدودیتها را به نحوی از تابع هدف کسر می‌کنند که نقض محدودیتها (و یا حتی نزدیکی به مرز منطقه موجه) باعث شود که جریمه سنگینی به این تابع تعلق گیرد. در بخش بعدی، با یک نمونه ازاین نوع الگوریتمها آشنا خواهیم شد.

گروه سوم، الگوریتمهای تسلسلی تقریبی[1]، نظیر روشهای تقریب خطی و تقریب کوادراتیک هستند. در این الگوریتمها، تابع هدف غیرخطی را متوالیاً با تقریب مورد نظر، به توابعی خطی و کوادراتیک تبدیل می‌نمایند. در مورد مسائل بهینه‌سازی بامحدودیتهای خطی، هرکدام از این مسائل تقریبی را می‌توان با کمک برنامه‌ریزی خطی یا برنامه‌ریزی کوادراتیک حل کرد. ضمناً با استفاده از روشهای تحلیلی دیگر، به جوابهائی دست می‌یابیم که به سمت جواب بهینه مسئله اصلی میل می‌کنند. اگرچه این الگوریتمها نوعاً برای حل مسائل محدودیت‌دار خطی مناسب هستند، لیکن حتی برای حل مسائل با محدودیتهای غیرخطی هم الگوریتمهائی از این نوع توسعه یافته است که از تقریبهای خطی استفاده می‌کنند.

یک نمونه از الگوریتمهای تسلسلی تقریبی، الگوریتم فرانک- ولف[2]، برای حل مسائل برنامه‌ریزی محدب با محدودیتهای خطی است. این روش کاملاً سرراست، از تلفیق تقریبهای خطی تابع هدف و کاربرد فرآیند جستجوی یک متغیری، که در بخش ۴-۹ ارائه شد، حاصل گردیده است.

الگوریتم فرانك ولف، یك الگوریتم تسلسلی با تقریب خطی

تقریب خطی تابع هدف $f(x)$ در نقطه آزمایشی x' با استفاده از بسط تیلور عبارت است از

1) *Sequential Aproximation Algorithm* 2) *Frank-Wolfe*

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}') + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}')}{\partial x_j}(x_j - x_j') = f(\mathbf{x}') + \nabla f(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

چون $f(\mathbf{x}')$ و $\nabla f(\mathbf{x}')\mathbf{x}'$ مقادیر ثابتی هستند، لذا پس از حذف آنها، تابع هدف به شکل $\nabla f(\mathbf{x}')\mathbf{x}$ در می‌آید. مسئله برنامه‌ریزی خطی حاصل را می‌توان با روش سیمپلکس (یا روش ترسیمی، در صورتی که $n=2$ باشد) حل کرد، و جواب بهینه آن $\mathbf{x}_{LP}$ را تعیین نمود. باید توجه داشت که در اثر حرکت از $\mathbf{x}'$ به $\mathbf{x}_{LP}$ (که حدمنطقه موجه است) مقدار تابع هدف لزوماً و به طور مداوم افزایش می‌یابد. لیکن، موقعی که از $\mathbf{x}'$ دور می‌شویم، مقدار تابع هدف تقریبی، لزوماً با مقدار تابع هدف غیرخطی نزدیک نیست. از این رو، $\mathbf{x}_{LP}$ به عنوان جواب آزمایشی تلقی نمی‌شود، بلکه به جای آن جوابی را جستجو می‌کنیم که تابع هدف را روی پاره‌خط رابط $\mathbf{x}'$ و $\mathbf{x}_{LP}$ حداکثر نماید. با کمک فرآیند جستجوی یک متغیری، که در بخش ۴-۱۰ ارائه شد، جوابی برحسب t، به عنوان کسری از فاصله $\mathbf{x}'$ و $\mathbf{x}_{LP}$ به دست می‌آید. این نقطه، جواب آزمایشی برای شروع تکرار بعدی الگوریتم است که ذیلاً شرح داده می‌شود. جوابهای متوالی که در تکرارهای متوالی بدست می‌آیند به طرف جواب بهینه اصلی گرایش دارند، به طوری که وقتی جوابهای آزمایشی به حد کافی به جواب بهینه نزدیک شود توقف می‌کنیم.

خلاصه الگوریتم فرانك- ولف

قدم ابتدایی با استفاده از روشهای برنامه‌ریزی خطی، یک جواب اساسی ابتدائی $\mathbf{x}^{(0)}$ را مشخص کنید. k را مساوی یک قرار دهید.

قدم تکراری

قسمت ۱- بازاء $j = 1,2,\ldots,n$، مشتقهای جزئی تابع $f(\mathbf{x})$ را در نقطه $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k-1)}$ محاسبه و c_j را برابر با $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ قرار دهید.

قسمت ۲- جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی زیر، یعنی $\mathbf{x}_{LP}^{(k)}$ را بدست آورید.

$$\text{Maximize} \quad g(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \quad \text{و} \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

قسمت ۳- مقدار پارامتر t را حساب کنید. برای این منظور $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k-1)} + t(\mathbf{x}_{LP}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)})$ را در تابع $f(\mathbf{x})$ قرار دهید و آنرا برحسب t، یعنی $f(\mathbf{x}) = h(t)$ به دست آورید. با استفاده از یکی از روشهای نظیر فرآیند جستجوی یک متغیری، تابع $h(t)$ را در فاصله $0 \le t \le 1$ حداکثر و $\mathbf{x}^{(k)}$ را بازاء t حاصل تعیین نمائید. به دستور توقف بروید.

دستور توقف- چنانچه $\mathbf{x}^{(k-1)}$ و $\mathbf{x}^{(k)}$ به‌اندازه کافی به هم نزدیک باشند توقف کنید، و $\mathbf{x}^{(k)}$ [یا ادامه جوابهای $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k)}$] را جواب بهینه تلقی نمائید. در غیر این صورت، با قرار دادن $k = k + 1$ به قدم تکراری برگردید.

اکنون به تشریح این روش می‌پردازیم

مثال مسئله برنامه‌ریزی محدب زیر را که دارای محدودیتهای خطی است در نظر بگیرید.

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 5x_1 - x_1^2 + 8x_2 - 2x_2^2$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 6$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

توجه داشته باشید که

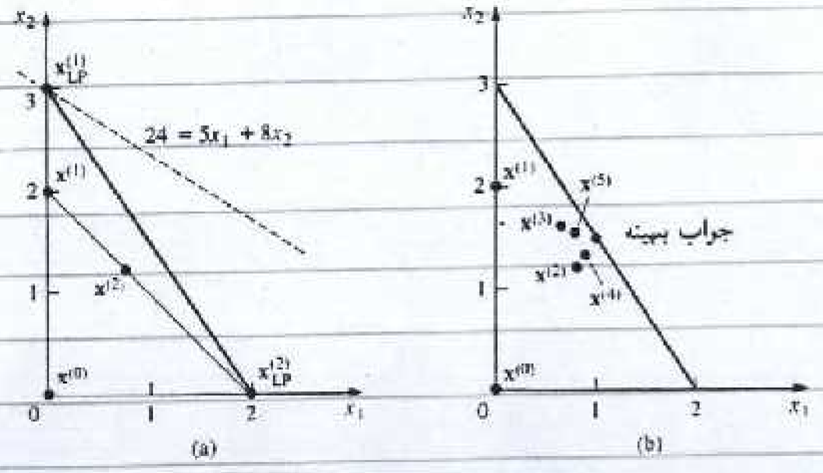
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 5 - 2x_1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 8 - 4x_2$$

لذا حداکثر این تابع بازاء $\mathbf{x} = (\frac{5}{2}, 2)$ حاصل می‌شود، که محدودیت کارکردی را نقض می‌نماید. از این رو، پیدا کردن جواب حداکثری که حتماً در محدودیتها هم

صدق کند به بررسی بیشتری نیاز دارد.

از آنجا که $\mathbf{x} = (0,0)$ یک جواب موجه (و همچنین جواب موجه اساسی ابتدائی برنامه‌ریزی خطی) است، لذا آنرا به عنوان جواب موجه اساسی ابتدائی الگوریتم فرانک – ولف در نظر می‌گیریم. با قرار دادن این جواب در عبارات مربوط به مشتقهای جزئی، $c_1 = 5$ و $c_2 = 8$ و تابع $5x_1 + 8x_2$ که تقریب خطی تابع هدف است بدست می‌آید. طبق شکل ۱۴-۱۰، حل ترسیمی مسئله برنامه‌ریزی خطی به جواب $\mathbf{x}_{LP}^{(1)} = (0, 3)$ منتهی می‌شود. در مورد قسمت ۳ قدم تکراری، تمام نقاط پاره‌خط رابط بین (0,3) و (0,0)، که در شکل ۱۴-۱۰ (الف) نشان داده است، به شرح زیر بیان می‌شوند و در ستون ششم جدول ۵-۱۰ آمده‌اند. بازاء جواب فوق، مقدار تابع عبارت است از

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) &= (0,0) + t[(0,3) - (0,0)] \quad \text{for} \quad 0 \le t \le 1 \\ &= (0, 3t) \quad \text{for} \quad 0 \le t \le 1 \\ h(t) &= f(0, 3t) = 8(3t) - 2(3t)^2 \\ &= 24t - 18t^2\end{aligned}$$



شکل ۱۴-۱۰ نمایش الگوریتم فرانک – ولف

جدول ۵-۱۰ مثال مربوط به کاربرد الگوریتم فرانک – ولف

k	$x^{(k-1)}$	c_1	c_2	$x_{LP}^{(k)}$	x for $h(t)$	$h(t)$	t^*	$x^{(k)}$
1	$(0,0)$	5	8	$(0,3)$	$(0,3t)$	$24t - 18t^2$	$\frac{2}{3}$	$(0,2)$
2	$(0,2)$	5	0	$(2,0)$	$(2t,2-2t)$	$8+10t-12t^2$	$\frac{5}{12}$	$\left(\frac{5}{6},\frac{7}{6}\right)$

مقدار t^* که تابع $h(t)$ را در فاصله $0 \le t \le 1$ حداکثر می‌کند برابر با $t^* = \frac{2}{3}$ است و از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\frac{dh(t)}{dt} = 24 - 36t = 0$$

بدین ترتیب، تکرار اول با تعیین جواب آزمایشی بعدی، به شرح زیر پایان می‌پذیرد

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (0,0) + \tfrac{2}{3}[(0,3) - (0,0)] \\ &= (0,2) \end{aligned}$$

در سطر دوم جدول ۵-۱۰ نتایج محاسبات تکرار دوم نشان داده شده است، باتوجه به اینکه $x^{(1)} = (0,2)$ است، ضرایب تابع هدف تقریبی عبارت از

$$\begin{aligned} c_1 &= 5 - 2(0) = 5 \\ c_2 &= 8 - 2(2)^2 = 0 \end{aligned}$$

که در نتیجه، تابع هدف $5x_1$ خواهد شد. با حل ترسیمی این مسئله، در شکل ۱۰-۱۴ (الف)، جواب بهینه $x_{LP}^{(2)} = (2,0)$ بدست می‌آید. ازاین رو، پاره‌خط رابط بین $x^{(1)}$ و $x_{LP}^{(2)}$ به شرح زیر بیان می‌شود (به شکل ۱۰-۱۴ الف مراجعه شود)

$$\begin{aligned} x &= (0,2) + t[(2,0) - (0,2)] \\ &= (2t, 2 - 2t) \end{aligned}$$

به طوری که

$$\begin{aligned} h(t) &= f(2t, 2 - 2t) \\ &= 5(2t) - (2t)^2 + 8(2 - 2t) - 2(2 - 2t)^2 \end{aligned}$$

$$= 8 + 10t - 12t^2$$

با مشتق گیری این تابع، $t^* = \frac{5}{12}$ به شرح زیر بدست می‌آید.

$$\frac{dh(t)}{dt} = 10 - 24t = 0$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= (0,2) + \frac{5}{12}[(2,0) - (0,2)] \\ &= \left(\frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right) \end{aligned}$$

همان طور که در شکل ۱۰-۱۴ ب مشاهده می‌شود، جوابهای آزمایشی یک در میان در دو طرف نقطه $x = (1, \frac{1}{2})$ نوسان‌می‌نمایند. با استفاده از شرایط KT می‌توان بهینه بودن این نقطه را تحقیق نمود.

این مثال، یک خاصیت متداول الگوریتم فرانک – ولف، یعنی نوسان یک درمیان را به خوبی نشان می‌دهد. با این نوسان می‌توان جواب بهینه را با تقریب از محل تقاطع خطها استخراج کرد. تخمین جواب بهینه به این نحو، معمولاً از آخرین جواب آزمایشی که بدست می‌آید بهتر است، زیرا جوابهای آزمایشی به کندی به طرف جواب بهینه میل می‌کنند. در نتیجه، آخرین جواب آزمایشی ممکن است هنوز از جواب بهینه فاصله زیادی داشته باشد.

در پایان، یادآوری می‌شود که الگوریتم فرانک – ولف فقط یک نمونه ازالگوریتمهای تسلسلی تقریبی است. بسیاری از این الگوریتمها، در هر تکرار به جای تقریب خطی از تقریب کوادراتیک استفاده می‌کنند، زیرا تقریب کوادراتیک به طور قابل ملاحظه‌ای به تابع اصلی نزدیکتر است و سلسله جوابهای حاصل سریعتر از آنچه در شکل ۱۰-۱۴ دیدیم به طرف جواب بهینه میل می‌کنند. بدین لحاظ، با وجودی که الگوریتمهای تسلسلی با تقریب خطی، نظیر فرانک – ولف، نسبتاً سرراست هستند،

لیکن امروزه در کاربردهای واقعی، معمولاً الگوریتمهای تسلسلی با تقریب کوادراتیک ترجیح داده می‌شوند. از بین این نوع الگوریتمها، الگوریتم شبه- نیوتن[1] روشی متداول است که بدون استفاده از مشتق دوم، تقریب درجه دوم تابع غیرخطی را محاسبه می‌نماید. (در مورد مسائل بهینه سازی با محدودیتهای خطی، این تابع غیرخطی نقش تابع هدف را دارد و توابع محدودیت غیر خطی همان توابع لاگرانژی، پیوست ۲ جلد اول، هستند). بعضی از الگوریتمهای شبه - نیوتن حتی مسائل را صریحاً به شکل تقریب کوادراتیک هم درنمی‌آورند، بلکه این تقریب را در هر تکرار اعمال می‌نمایند، اما درعوض، بعضی از اجزاء الگوریتمهای گرادیانی را در نظر می‌گیرند.

برای مطالعه بیشتر دراین زمینه و آشنائی با آخرین دستاوردهای برنامه‌ریزی محدب به مراجع شماره ۶ و ۷ همین فصل مراجعه شود.

۱۰-۱۰ برنامه‌ریزی غیرمحدب[2]

فرضیات برنامه‌ریزی محدب موجب می‌شود که حل مسئله ساده‌تر گردد، زیرا هر جواب حداکثر نسبی که تحت این فرضیات بدست آید یک جواب حداکثر مطلق خواهد بود. هرچند، مسائل واقعی برنامه‌ریزی غیرخطی به چنین فرضیاتی نزدیک هستند، اما برخی تفاوتهای جزئی نیز می‌تواند وجود داشته باشد. مسائل برنامه‌ریزی غیرمحدب[2] را با چه روشی می‌توان حل کرد؟

یک رویکرد متداول برای این کار استفاده از یکی از روشهای جستجو است، به این ترتیب که از یک جواب ابتدائی شروع کرده و پس از رسیدن به جواب حداکثر نسبی مجدداً به یک جواب ابتدائی دیگر می‌رویم تا بدین ترتیب، در حد امکان به جوابهای حداکثر نسبی متفاوتی برسیم. آنگاه، بهترین جواب از میان آنها انتخاب

1) Quasi- Newton   2) Nonconvex Programming

می‌شود. قاعدتاً، روش جستجو طوری طراحی می‌گردد که در صورت برقرار بودن فرضیات برنامه‌ریزی محدب، به جواب حداکثر مطلق و اگر این فرضیات برقرار نباشد به جواب حداکثر نسبی برسد.

یکی از چنین روشهائی که در دهه ۱۹۶۰ توسعه یافته و از آن زمان تاکنون کاربرد وسیعی داشته، روش تسلسلی حداقل کردن بدون محدودیت[1] (که به طور مختصر SUMT نامیده می‌شود) است. اصولاً SUMT به دوگونه تقسیم می‌شود. گونه اول آن که الگوریتم نقطه خارجی[2] است با جوابهای غیر موجه سروکار دارد و با استفاده از یک تابع جریمه[3] به طرف منطقه موجه سوق داده می‌شود. گونه دیگر که الگوریتم نقطه داخلی[4] است به جوابهای موجه می‌پردازد. در این الگوریتمها، یک تابع مانع[5] باعث جلوگیری از خروج از منطقه موجه می‌شود. اگرچه، SUMT در ابتدا برای مسائل حداقل کردن ساخته شده بود، لیکن برای تطبیق با سایر مسائل، در اینجا آنرا به یک مسئله حداکثر کردن تبدیل می‌نمائیم. از این رو، همچنان فرض می‌کنیم که مسئله به همان شکلی است که در ابتدای این فصل ارائه گردید و تمام توابع نیز مشتق‌پذیر هستند.

روش SUMT (روش تسلسلی حداقل کردن بدون محدودیت)

همان طور که از نام این روش برمی‌آید، مسئله اصلی با یک سلسله از مسائل بهینه‌سازی بدون محدودیت جایگزین می‌شود، که جوابهای این رشته از مسائل به جواب بهینه (حداکثر نسبی) می‌انجامد. چون، حل مسائل بهینه‌سازی بدون محدودیت (روش

1) Sequential Unconstrained Minimization Technique (SUMT)
2) Exterior Point Algorithm   3) Penalty Function
4) Interior Point Algorithm   5) Barrier Function

جستجوی گرادیان در بخش ۵-۱۰) در مقایسه با مسائل با محدودیت بسیار آسانتر است، لذا این الگوریتم مطلوبیت خاصی دارد. برای هر کدام از این رشته مسائل بدون محدودیت، یک عدد مثبت انتخاب شده و هربار نیز کوچکتر می‌گردد، آنگاه مقدار x با حل مسئله زیر بدست می‌آید

$$\text{Maximize} \quad P(\mathbf{x};r) = f(\mathbf{x}) - rB(\mathbf{x})$$

$B(\mathbf{x})$ یک تابع مانع است که بازاء هرجواب موجه x (برای مسئله اصلی) خواص زیر را دارد

۱) چنانچه x از مرزمنطقه موجه دور باشدمقدار $B(\mathbf{x})$ کم‌است

۲) چنانچه x نزدیک مرزمنطقه موجه باشدمقدار $B(\mathbf{x})$ زیاد است

۳) هنگامی که فاصله نقطه با یکی ازمرزهای منطقه موجه به طرف صفرمیل نماید، مقدار $B(\mathbf{x})$ به طرف بینهایت میل می‌کند.

به این ترتیب، از یک جواب آزمایشی شروع می‌کنیم و حداکثر تابع $P(\mathbf{x};r)$ را با فرایند جستجو تعیین می‌نمائیم. تابع $B(\mathbf{x})$ مانع عبور ازمرز منطقه موجه مسئله اصلی و جستجو در خارج از آن می‌شود.

متداولترین روش انتخاب $B(\mathbf{x})$ عبارتست از

$$B(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i - g_i(\mathbf{x})} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}$$

باید توجه داشت که بازاء مقادیر موجه x، مقدار مخرج هر جمله متناسب با فاصله نقطه x از محدودیت کارکردی و یا محدودیت غیرمنفی مربوطه است. نتیجتاً، هرجمله باعث می‌شود که هرسه خاصیت فوق در رابطه با آن محدودیت برقرار گردد. یک خاصیت جالب توجه دیگر $B(\mathbf{x})$ این است که اگر تمام فرضیات برنامه‌ریزی محدب برقرار باشد $P(\mathbf{x};r)$ هم تابعی مقعر خواهد بود.

یک سوال کاملاً بجا که احتمالاً به ذهن خطور می‌کند این است که اگر $B(\mathbf{x})$

مانع جستجو در نقاط مرزی می‌شود پس چنانچه جواب موردنظر درهمین حوالی باشد چه باید کرد؟ به همین دلیل، روش SUMT به حل یک رشته از مسائل بهینه‌سازی بدون محدودیت می‌پردازد که در آن هربار مقدار r کوچکتر شده و به صفر میل می‌کند (که جواب آزمایشی حاصل ازهر تکرار، جواب آزمایشی اولیه تکرار بعدی است). برای نمونه هربار می‌توان r را از حاصل ضرب r قبلی در عدد θ بدست آورد (که $0 < \theta < 1$ است). نوعاً می‌توان θ را مثلاً برابر ۰/۰۱، گرفت. وقتی که r به سمت صفر میل می‌کند، $P(\mathbf{x};r)$ به سمت حداکثر مسئله اصلی میل می‌نماید. از این رو، تعداد مسائل بهینه‌سازی بدون محدودیت که باید حل شوند تا در نهایت به جواب بهینه مسئله اصلی نزدیک گردد محدود است.

چه تعداد از این مسائل را باید حل کرد تا از روند جوابها و با کمک استقراء به جواب بهینه رسید؟ در صورتی که فرضیات برنامه‌ریزی محدب در مورد مسئله اصلی صادق باشد، می‌توان به اطلاعات مفیدی در مورد این تصمیم‌گیری تکیه کرد. به طور مشخص، اگر $\bar{\mathbf{x}}$ جواب حداکثر مطلق $P(\mathbf{x};r)$ باشد، در این صورت

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \le f(\mathbf{x}^*) \le f(\bar{\mathbf{x}}) + rB(\bar{\mathbf{x}})$$

که $\mathbf{x}^*$ جواب بهینه مسئله اصلی است (که البته مجهول است). لذا، چنانچه به جای $\mathbf{x}^*$ مقدار $\bar{\mathbf{x}}$ انتخاب شود حداکثر خطای تابع هدف برابر با $rB(\bar{\mathbf{x}})$ خواهد بود و ادامه کار باعث تقلیل خطا می‌شود. چنانچه از ابتدا یک فاصله قابل گذشت[1] در مورد خطا منظور گردد، آنگاه در صورتی که $rB(\bar{\mathbf{x}})$ کمتر از این مقدار شود توقف خواهیم کرد.

خلاصه روش SUMT

قدم ابتدائی   یک جواب موجه آزمایشی $\mathbf{x}^{(0)}$ که روی مرز منطقه موجه نباشد را

1) error tolerance

انتخاب نمائید. مقدار k را برابر با یک قرار دهید و مقادیر مثبت r و θ را تعیین نمائید (فرضاً ۱ = r و ۰/۰۱ = θ).

قدم تکراری از $\mathbf{x}^{(k-1)}$ شروع کرده و با استفاده از فرایند جستجو که در بخش ۵ــ۱۰ تشریح شد (و یا هرروش دیگر)، $\mathbf{x}^{(k)}$ جواب حداکثر نسبی تابع زیر را تعیین نمائید.

$$P(\mathbf{x};r) = f(\mathbf{x}) - r\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i - g_i(\mathbf{x})} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right]$$

دستور توقف اگر مقدار تغییر از $\mathbf{x}^{(k-1)}$ به $\mathbf{x}^{(k)}$ ناچیز باشد توقف نمائید و $\mathbf{x}^{(k)}$ (یا اتصال برونی[1] جوابهای $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k)}$ را به عنوان جواب حداکثر نسبی مسئله اصلی منظور نمائید.

درغیراین‌صورت، k را برابر با $k+1$ و $r = \theta r$ قرار دهید و به قدم تکراری برگردید.

هرگاه فرضیات برنامه‌ریزی محدب برقرار نباشد، آنگاه باید از نقاط موجه مختلفی شروع کرد تا به جوابهای متعدد دست یافت. بهترین جواب حداکثر نسبی که از مسئله اصلی بدست آید به عنوان جواب حداکثر مطلق تقریبی آن تلقی می‌گردد.

مثال برای تشریح روش SUMT، مسئله دو متغیری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = x_1 x_2$$

$$x_1^2 + x_2 \le 3$$

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

1) Extrapolation

هرچند $g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2$ محدب است (به علت محدب بودن هرجمله آن)، لیکن چون $f(\mathbf{x}) = x_1 x_2$ مقعر نیست لذا این مسئله نیز یک برنامه‌ریزی محدب نخواهد بود.

در قدم ابتدائی، $(x_1, x_2) = (1, 1)$ که موجه بودن آن آشکار است و روی مرز منطقه موجه هم قرارندارد را به عنوان جواب ابتدائی برمی‌گزینیم. بنابراین، $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)$ است وانتخاب‌مقادیر ۱ = r و ۰/۰۱ = θ منطقی بەنظرمی‌رسد.

در قدم تکراری،

$$P(\mathbf{x};r) = x_1 x_2 - r\left(\frac{1}{3 - x_1^2 - x_2} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)$$

برای حداکثر کردن تابع فوق، با شروع از نقطه(۱ و ۱)و با پارامتر ۱ = r وبا به کارگیری فرایند جستجوی گرادیان به جواب $\mathbf{x}^{(1)} =$ (۰/۹ و ۱/۳۶) می‌رسیم. با انتخاب مقدار ۰/۰۱ = r وشروع از نقطه (۱/۳۶ و ۰/۹)، فرایند جستجوی گرادیان به جواب $\mathbf{x}^{(2)} =$ (۰/۹۸۳ و ۱/۹۳۳) می‌رسد. یک تکرار دیگر با مقدار ۰/۰۰۰۱ = (۰/۰۱)(۰/۰۱) = r، و شروع از $\mathbf{x}^{(2)}$ به (۱/۹۹۴ و ۰/۹۹۸) = $\mathbf{x}^{(3)}$ منتهی می‌شود. کاملاً آشکار است که رشته نقاط بدست آمده، که در جدول ۶ــ۱۰ خلاصه شده‌اند، به (۲ و ۱) میل می‌کنند. با استفاده از شرایط KT می‌توان ثابت کرد که این جواب شرایط لازم بهینگی را برقرار می‌سازد. با تحلیل ترسیمی‌مشخص می‌گردد که (۲ و ۱) = (x_1, x_2) در واقع یک جواب بهینه مطلق است (به مسئله ۵۶ ب مراجعه شود).

در این مسئله، غیراز (۲ و ۱) = (x_1, x_2) جواب حداکثر نسبی دیگری وجود ندارد، لذا چنانچه از جوابهای موجه ابتدائی مختلفی شروع می‌کنیم و SUMT را به کاربگیریم، همواره به همین جواب می‌رسیم.

در پایان، باید توجه داشت که روش SUMT را می‌توان به محدودیتهای تساوی به شکل $g_i(\mathbf{x}) = b_i$ نیز تسری داد. یک روش متداول برای این کار به شرح زیر است.

جدول ۶-۹ تشریح روش SUMT

k	r	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0		1	1
1	1	0.90	1.36
2	10^{-2}	0.983	1.933
3	10^{-4}	0.998	1.994
		$\downarrow$ 1	$\downarrow$ 2

در مورد هر محدودیت مربوط به $P(\mathbf{x}:r)$، به جای $\dfrac{-r}{b_i - g_i(\mathbf{x})}$ رابطه زیر قرار می‌گیرد

$$\frac{-[b_i - g_i(\mathbf{x})]^2}{\sqrt{r}}$$

سپس، همان فرایند به کار گرفته می‌شود. صورت کسر فوق باعث می‌گردد که اگر محدودیت مربوطه برقرار نشود جریمه سنگینی به آن تعلق گیرد. با کاهش r به مقداری ناچیز، مخرج کسر به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد و باعث افزایش شدید تابع جریمه می‌شود. در نتیجه، رشته جوابهای آزمایشی حاصل به طرف نقطه‌ای گرایش می‌یابند که در محدودیت صدق نماید.

روش SUMT به علت سادگی و اینکه حالتهای متنوعی را دربرمی‌گیرد، کاربردهای گسترده‌ای دارد. لیکن، تحلیل گران دریافته‌اند که این روش می‌تواند از نظر محاسباتی نوسانات زیادی داشته باشد و باید با دقت زیادی به کار گرفته شود. برای کسب اطلاعات بیشتر و آشنائی با گزینه‌های مشابه این الگوریتم به مرجع شماره ۷ همین فصل مراجعه شود.

۱۱-۱۰ نتیجه

در اغلب مسائل علمی، پدیده‌های غیرخطی وجود دارند که باید در نظر گرفته شوند.

گاهی ممکن است با فرموله کردن مجدد بتوان روابط غیرخطی را در چارچوب برنامه‌ریزی خطی، نظیر مسائل برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر جای داد. لیکن، غالباً چاره‌ای جز فرموله کردن مسئله به شکل برنامه‌ریزی غیرخطی وجود ندارد.

برخلاف نقش روش سیمپلکس در برنامه‌ریزی خطی، هیچ الگوریتمی یافت نمی‌شود که بتواند در همه مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی به کار آید. در حقیقت، برای حل بعضی از این مسائل اساساً روشی که بتواند کاملاً به نتیجه برسد وجود ندارد. لیکن، پیشرفتهای قابل ملاحظه‌ای در بعضی از انواع مهم مسائل، ازجمله برنامه‌ریزی کوادراتیک، برنامه‌ریزی محدب و بعضی از انواع برنامه‌ریزی غیرمحدب حاصل شده است. الگوریتمهای متنوعی که غالباً به خوبی به کار می‌آیند برای این حالتها توسعه یافته‌اند. بعضی ازاین الگوریتمها، از روشهای بسیار کارآی بهینه سازی بدون محدودیت، در قسمتی از هرتکرار استفاده می کنند. بعضی الگوریتمهای دیگر نیز تقریبهای خطی یا کوادراتیک را به طور پیاپی در مورد مسئله اصلی به کار می گیرند.

در سالهای اخیر، تاکید زیادی برای توسعه بسته‌های نرم‌افزاری قابل اطمینان و با کیفیت بالا، برای حل مسائل کلی به عمل آمده است، به طوری که بهترین روشها را با استفاده از کامپیوترهای بزرگ به خدمت درآورند (به منابع ۶ و ۷ مراجعه شود). برای نمونه، یک برنامه به نام MINOS 5.0 در دانشگاه استانفورد[1] توسعه یافته است که در مورد حل بسیاری از انواع مسائلی که در این فصل بررسی شد (و همچنین برنامه‌ریزی خطی) کاربرد دارد. بهبود دائمی در روشها و همچنین برنامه‌های کامپیوتری باعث شده است که حل بعضی از مسائل بزرگ نیز عملی گردد.

با رشد سریع استفاده از کامپیوترهای شخصی، پیشرفتهای روزافزونی در توسعه برنامه‌های مخصوص این کامپیوترها را می‌توان انتظار داشت.

1) Stanford

مسائل

۱ـ مسئله ۱ فصل دوم، درمورد ترکیب محصولات را درنظر بگیرید. فرض کنید که این تولیدکننده برای فروش سه محصول خود با کشش تقاضا نسبت به قیمت روبرو باشد، به طوری که سود حاصل، با آنچه که در فصل دوم گفته شد تفاوت نماید. به طور مشخص، فرض کنید هزینه تولید هرواحد از محصولات ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب ۱۵ و ۶ و ۸ دلار باشد. اما، قیمت فروش x_1، x_2، x_3 عدد از این محصولات به‌ترتیب با $(10 + 40x_1^{-1/3})$ و $(5 + 15x_2^{-1/4})$ و $(10 + 20x_3^{-1/2})$ نشان داده شود.

الف ـ برای تعیین میزان تولید هر محصول و با هدف حداکثر کردن سود، این مسئله را به شکل مدل بهینه سازی با محدودیتهای خطی فورموله کنید.

ب ـ نشان دهید که این مسئله یک برنامه‌ریزی محدب است.

ج ـ با شروع از نقطه $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$، دو تکرار الگوریتم فرانک ـ ولف را اجرا کنید. در مورد قسمتهای ۲ و ۳ در هر تکرار، از یک برنامه کامپیوتری روش سیمپلکس و همچنین فرایند جستجوی یک متغیری استفاده نمائید.

۲ـ فرض کنید که در مثال نمونه در بخش ۱ ـ ٤ (جلد اول) در مورد یک شرکت کنسرو سازی، تخفیفی برابر با ۱۰ درصد به هزینه حمل و نقلی که حجم آن مازاد بر ٤۰ کامیون باشد تعلق می‌گیرد. نشان دهید که این حالت به یک برنامه‌ریزی غیرمحدب منجر می‌شود.

۳ـ مثال سرمایه گذاری با بازده غیر مطمئن، در بخش ۱ ـ ۱۰، را در نظر بگیرید. فرض کنید که فقط دو نوع سهام مورد نظر باشند. بازده و واریانس برای سهم نوع ۱ به ترتیب ۵ و ٤ و برای سهم نوع ۲ به ترتیب ۱۰ و ۱۰۰ و کواریانس بازده دو سهم برابر با ۵ تخمین زده شده است. قیمت هر سهم نوع ۱ برابر با ۲۰ وسهم نوع ۲ برابر با ۳۰ و کل بودجه برای سرمایه گذاری ۵۰ فرض می‌شود.

الف ـ بدون اینکه مقداری به β تخصیص دهید، مسئله را به شکل مدل برنامه‌ریزی کوادراتیک فورموله کنید.

ب ـ تحقیق کنید که مدل قسمت الف یک برنامه‌ریزی محدب است. برای این کار، نشان دهید که تابع هدف مقعر است (با استفاده از روش پیوست ۱ در جلد اول).

ج ـ با شروع از جواب $(x_1, x_2) = (0,0)$ پنج تکرار الگوریتم فرانک ـ ولف را با $\beta = 0.1$ اجرا کنید.

د ـ بازاء $\beta = 0.02$ (ریسک کم) و $\beta = 0.5$ (ریسک زیاد) بند ج را مجدداً اجرا کنید. همین طور مسئله را با روش بازرسی برای حالات حدی، یعنی $\beta = 0$ (بدون ریسک) و $\beta = \infty$ (ریسک کامل) حل کنید. حالت اخیر، در واقع، حداقل کردن $V(x)$ است. بازاء این پنج مقدار β جوابهای حاصل را برحسب میزان ریسک سرمایه گذاری بررسی کنید.

٤ـ مسئله در و پنجره‌سازی به صورتی که در شکل ۵ ـ ۱۰ نشان داده شده است را در نظر بگیرید. به جای محدودیتهای دوم و سوم مسئله اصلی (بخش ۱ ـ ۲ جلد اول) محدودیت زیر جایگزین شده است.

$$9x_1^2 + 5x_2^2 \le 216$$

الف ـ نشان دهید که جواب (٦ و ۲) با مقدار $Z = 36$، بهینه است. برای این منظور، ثابت کنید که خط تابع هدف یعنی $36 = 3x_1 + 5x_2$ در نقطه (٦ و ۲) بر این محدودیت مماس است. (راهنمائی: در این محدودیت، x_2 را برحسب x_1 بیان کنید و سپس مشتق این عبارت را نسبت به x_1 محاسبه نمائید، تا شیب این محدودیت بدست آید).

ب ـ با شروع از جواب (۳ و ۲)، روش SUMT را در مورد این مسئله اجرا کنید. از یک برنامه کامپیوتری روش فرایند جستجوی گرادیان استفاده کنید و حداکثر تابع $P(x,r)$ را درهر تکرار بدست آورید (r را برابر با ۱ و $^{-۲}$۱۰ و $^{-٤}$۱۰ و $^{-٦}$۱۰ قرار دهید).

۵ ـ مسئله در و پنجره‌سازی، به صورتی که در شکل ٦ ـ ۱۰ نشان داده شده

است را در نظر بگیرید. به جای تابع هدف مسئله، (بخش ۱–۲ جلد اول)، تابع $Z = 126x_1 - 9x_1^2 + 182x_2 - 13x_2^2$ جایگزین شده است. نشان دهید که جواب $(x_1, x_2) = (\frac{8}{3}, 5)$ با $Z = 857$ بهینه است. برای این منظور، ثابت کنید که بیضی به معادله $857 - 126x_1 - 9x_1^2 + 182x_2 - 13x_2^2$ ، در نقطه فوق بر محدودیت $3x_1 + 2x_2 = 18$ مماس می‌شود. (راهنمائی: در این بیضی، x_2 را برحسب x_1 بیان کنید و سپس مشتق این عبارت را نسبت به x_1 محاسبه نمائید تا شیب بیضی بدست آید).

۶ـ تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = 48x - 60x^2 + x^3$$

الف – با استفاده از مشتقهای اول و دوم، نقاط حداکثر و حداقل نسبی را پیدا کنید.

ب – با استفاده از مشتقهای اول و دوم نشان دهید که $f(x)$ حداکثر مطلق یا حداقل مطلق ندارد.

۷ـ در مورد هرکدام از توابع زیر تحقیق کنید که آیا محدب، مقعر و یا نه محدب و نه مقعر هستند.

الف – $f(x) = 10x - x^2$

ب – $f(x) = x^4 + 6x^2 + 12x$

ج – $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

د – $f(x) = x^4 + x^2$

ه – $f(x) = x^3 + x^4$

۸– با استفاده از آزمونی که در پیوست ۱ (جلد اول) ارائه شد در مورد توابع زیر تحقیق کنید که آیا محدب، مقعر و یا نه محدب و نه مقعر هستند.

الف – $f(\mathbf{x}) = x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2$

ب – $f(\mathbf{x}) = 3x_1 + 2x_1^2 + 4x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2$

ج – $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2$

د – $f(\mathbf{x}) = 20x_1 + 10x_2$

ه – $f(\mathbf{x}) = x_1x_2$

۹– تابع زیر را در نظر بگیرید

$$f(\mathbf{x}) = 5x_1 + 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_3x_4 + 4x_4^2 + 2x_5^4 + x_5^2 + 3x_5x_6 + 6x_6^2 + 3x_6x_7 + x_7^2$$

نشان دهید که این تابع محدب است. برای انجام این کار تابع را به صورت مجموع توابع یک یا دو متغیره‌ای در آورید که هر کدام از آنها محدب هستند.

۱۰– مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 \le 1$$

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

الف – نشان دهید که این مسئله برنامه‌ریزی محدب است.

ب – آنرا با روش ترسیمی حل کنید.

ج – با استفاده ازشرایط KT نشان دهید که جواب بدست آمده از بند (ب) بهینه است.

۱۱– مسئله بهینه‌سازی با محدودیت را به شرح زیر در نظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad f(x) = -6x + 3x^2 - 2x^3$$
$$x \ge 0$$

جواب بهینه را تنها با استفاده از مشتقهای اول و دوم $f(x)$ بدست آورید

۱۲– مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & Z = x_1^4 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ & x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

الف– این مسئله در چارچوب کدام یک از حالتهای خاص برنامه‌ریزی غیرخطی که در بخش ۳–۱۰ ارائه شد قرار می‌گیرد؟ دلائل جواب خود را بیان کنید.

ب– شرایط KT در این مسئله چیست؟ با استفاده از این شرایط، تعیین کنید که آیا (۱۰ و ۰) بهینه هست یا خیر.

ج– اگر برای حل این مسئله مستقیماً از روش SUMT استفاده شود، تابع بدون محدودیت $P(x;r)$ که در هر تکرار باید حداقل گردد را بنویسید.

د– از $r = 100$ و نقطه (۵ و ۵) شروع کنید. برای حداقل کردن تابع $P(x;r)$ که در بند (ج) بدست آمد یک تکرار روش جستجوی گرادیان را به کار بگیرید. برای محاسبه t^* از روش جستجوی یک متغیری با حدود اولیه $\underline{t} = 0,\ \bar{t} = 0.02$ و خطای قابل گذشت $\epsilon = 0.0005$ استفاده نمائید.

ه– اکنون بجای محدودیتهای غیرمنفی، محدودیتهای $x_1 \geq 1$ و $x_2 \geq 1$ را در نظر بگیرید. این مسئله جدید را به مسئله‌ای معادل، که فقط دو محدودیت کارکردی، دو متغیر و دو محدودیت غیرمنفی دارد تبدیل نمائید.

۱۳– عبارتی که در بخش ۷–۱۰ در مورد شرایط KT، برای مسئله برنامه‌ریزی کوادراتیک بیان شد را در نظر بگیرید. ثابت کنید مسئله پیدا کردن یک جواب موجه برای این شرایط یک مسئله مکمل است که در بخش ۳–۱۰ معرفی شد.

۱۴– مسئله برنامه‌ریزی هندسی زیر را درنظربگیرید

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(\mathbf{x}) = 2x_1^{-2}x_2^{-1} + x_1^{-1}x_2^{-2} \\ & 4x_1x_2 + x_1^2x_2^2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

الف– این مسئله را به شکل یک مسئله برنامه‌ریزی محدب درآورید.

ب– با استفاده از آزمونی که در پیوست ۱ جلد اول بیان شد نشان دهید که مدل بدست آمده در بند (الف) یک مسئله برنامه‌ریزی محدب است.

۱۵– مسئله برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظربگیرید

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & f(\mathbf{x}) = \frac{10x_1 + 20x_2 + 10}{3x_1 + 4x_2 + 20} \\ & x_1 + 3x_2 \leq 50 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ & x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

الف– این مسئله را به شکل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی درآورید.

ب– مدل بدست آمده در بند (الف) را با استفاده از یک برنامه کامپیوتری روش سیمپلکس حل کنید. جواب بهینه مسئله اصلی چیست؟

۱۶– به کمک روش فرایندجستجوی یک متغیری وبا استفاده ازخطای قابل گذشت $\epsilon = 0.04$ و حدود ابتدائی $\underline{x} = 0$ و $\bar{x} = 2.4$، مسئله زیر را (با تقریب) حل کنید

$$\text{Maximize} \quad f(x) = x^3 + 2x - 2x^2 - 0.25x^4$$

۱۷– به کمک روش فرایند جستجوی یک متغیری و با استفاده از خطای قابل گذشت $\epsilon = 0.04$ و حدود ابتدائی مشخص شده، مسائل زیر را (با تقریب) حل کنید.

الف– با $\text{Maximize} \quad f(x) = 6x - x^2, \text{ with } \underline{x} = 0, \bar{x} = 4.8$

ب– با $\text{Minimize} \quad f(x) = 6x + 7x^2 + 4x^3 + x^4, \text{ with } \underline{x} = -4, \bar{x} = 1$

۱۸– به کمک روش فرایند جستجوی یک متغیری و با استفاده از خطای قابل گذشت $\epsilon = 0.08$ و حدود ابتدائی $\bar{x} = 4$ و $\underline{x} = -1$ مسئله زیر را (با تقریب) حل

کنید.

$$\text{Maximize} \quad f(x) = 48x^5 + 42x^3 + 3.5x - 16x^6 - 61x^4 - 16.5x$$

۱۹ – به کمک روش فرآیند جستجوی یک متغیری و با استفاده از خطای قابل گذشت $\varepsilon = 0.07$ مسئله زیر را با تقریب حل کنید. حدود ابتدایی را تعیین نمائید.

$$\text{Maximize} \quad f(x) = x^3 + 30x - x^6 - 2x^4 - 3x^2$$

۲۰ – مسئله برنامه‌ریزی محدب زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Minimize} \quad Z = x^4 + x^2 - 4x$$
$$x \le 2$$
$$x \ge 0$$

الف – با یک محاسبه ساده، تحقیق کنید که آیا جواب بهینه این مسئله در فاصله $0 \le x \le 1$ قرار می‌گیرد یا در فاصله $1 \le x \le 2$ (برای تعیین اینکه جواب بهینه در کدام فاصله قرار می‌گیرد عملاً نیازی به حل مسئله نیست). منطق کار خود را بیان نمائید.

ب – به کمک روش فرایند جستجوی یک متغیری و با استفاده از حدود $\underline{x} = 0$ و $\bar{x} = 2$ و خطای قابل گذشت $\varepsilon = 0.02$ این مسئله را (با تقریب) حل کنید.

ج – با استفاده از شرایط KT جواب بهینه را بدست آورید.

۲۱ – تابع مشتق‌پذیر و یک متغیری $f(x)$ را در نظر بگیرید. هدف مسئله، حداکثر کردن این تابع (بدون محدودیت) است. فرض کنید $\underline{x}_0$ و $\bar{x}_0$ حدود پائینی و بالائی حداکثر مطلق تابع باشند (با فرض اینکه اصولاً چنین جوابی وجود داشته باشد). خواص عمومی زیر را در مورد فرایند جستجوی یک متغیری حل این مسئله ثابت کنید.

الف – با فرض مشخص بودن $\underline{x}_0$ و $\bar{x}_0$ و ε، رشته جوابهای آزمایشی که از قاعده نقطه وسط بدست می‌آیند به طرف یک جواب حدی میل می‌کنند (راهنمائی:

ابتدا نشان دهید $\lim_{n\to\infty}(\bar{x}_n - \underline{x}_n) = 0$ که $\underline{x}_n$ و $\bar{x}_n$ حدود پائینی و بالائی در تکرار n ام هستند).

ب – اگر $f(x)$ مقعر باشد (که در نتیجه $\frac{df(x)}{dx}$ تابعی کاهنده از x است)، در این صورت جواب حدی که در بند الف بدست می‌آید یک جواب حداکثر مطلق است.

ج – در صورتی که $f(x)$ در همه جا باستثنای محدوده بین $\underline{x}_0$ و $\bar{x}_0$ لزوماً مقعر نباشد، آنگاه جواب حدی که در بند الف بدست می‌آید باید یک جواب حداکثر مطلق باشد

د – چنانچه $f(x)$ حتی در فاصله $\underline{x}_0$ و $\bar{x}_0$ مقعر نباشد، آنگاه جواب حدی بدست آمده در بند الف لزوماً یک حداکثر مطلق نیست.

ه – اگر بازاء تمام مقادیر x، رابطه $\frac{df(x)}{dx} < 0$ برقرار باشد، در این صورت هیچ $\underline{x}_0$ و اگر رابطه $\frac{df(x)}{dx} > 0$ برقرار باشد هیچ $\bar{x}_0$ وجود ندارد. در هر کدام از این دو حالت $f(x)$ حداکثر مطلقی ندارد.

و – اگر $f(x)$ مقعر و $\lim_{x\to-\infty} \frac{df(x)}{dx} < 0$ باشد، در این صورت هیچ $\underline{x}_0$ و اگر این حد بزرگتر از صفر باشد هیچ $\bar{x}_0$ وجود ندارد. در هر کدام از دو حالت نیز $f(x)$ حداکثر مطلقی ندارد.

۲۲ – مسئله بهینه سازی بدون محدودیت زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

الف – با شروع از نقطه $(1,1)$ و $\varepsilon = 0.25$، با استفاده از روش فرایند جستجوی گرادیان جواب تقریبی این مسئله را تعیین نمائید.

ب – جواب دقیق مسئله را از طریق حل دستگاه معادلات $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ بدست آورید.

ج – مسیر جوابهای آزمایشی که از بند (الف) بدست آمده را با مراجعه به شکل ۱۱ – ۱۰ که شبیه این مسئله است رسم نمائید، آنگاه، با توجه به ادامه این مسیر، سه

جواب بعدی را تخمین بزنید (بر اساس الگوئی که در بند (الف) بدست آمده است و همچنین شکل ۱۱−۱۰). ضمناً نشان دهید که رشته جوابهای آزمایشی به جواب بند (ب) میل می‌کند.

۲۳− سه بند مسئله ۲۲ را در مورد تابع زیر انجام دهید (با این تفاوت که $\varepsilon = 0.5$ باشد)

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - 2x_1^2 - x_2^2$$

۲۴− در مورد مسئله زیر، دو تکرار فرایند جستجوی گرادیان را با شروع از نقطه (۰ و ۰) اجرا کنید. سپس با حل $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ جواب دقیق آنرا بدست آورید.

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 6x_1 + 2x_1x_2 - 2x_2 - 2x_1^2 - x_2^2$$

۲۵− با استفاده از فرایند جستجوی گرادیان، جواب تقریبی مسئله زیر را بدست آورید. از جواب (۰ و ۰) شروع کنید و ε را برابر با ۰/۳ بگیرید. سپس با حل $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ جواب دقیق آنرا بدست آورید.

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 8x_1 - x_1^2 - 12x_2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2$$

۲۶− در مورد مسئله زیر، دو تکرار فرایند جستجوی گرادیان را با شروع از نقطه (۰ و ۰) برای مسئله زیر اجرا کنید.

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_1^4 - 2x_1x_2 - x_2^2$$

درهر تکرار، جواب تقریبی t را با استفاده از دو تکرار فرایند جستجوی یک متغیری و در فاصله حدود $t=0$ و $t=1$ بدست آورید.

۲۷− بااستفاده از فرایند جستجوی گرادیان و باشروع ازنقطه (۱ و ۱ و ۱) و $\varepsilon = 0.05$ جواب تقریبی مسئله زیر را بدست آورید.

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 3x_1x_2 + 3x_2x_3 - x_1^2 - 6x_2^2 - x_3^2$$

۲۸− با استفاده از فرایند جستجوی گرادیان و با شروع ازنقطه (۰ و ۰) و $\varepsilon = 1$ ، جواب تقریبی مسائل زیر را بدست آورید.

الف−

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = x_1x_2 + 3x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

ب−

$$\text{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2^2 + 2x_1^2x_2 - 4x_1x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 4x_2$$

۲۹− مسئله بهینه‌سازی با محدودیتهای خطی زیر را درنظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = \ln(x_1 + x_2)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

الف− نشان دهید که این مسئله، برنامه‌ریزی محدب است.

ب− با استفاده از شرایط KT یک جواب بهینه را بدست آورید.

ج− با استدلالی ساده نشان دهید که جواب حاصل از بند (ب) بهینه است. (راهنمائی: توجه داشته باشید که $\ln(x_1 + x_2)$ تابعی کاملاً افزاینده نسبت به **x** است).

د− با شروع از جواب آزمایشی (۱ و ۱) و با استفاده از یک تکرار الگوریتم فرانک − ولف، جواب بند (ب) را بدست آورید. سپس، با یک تکرار دیگر نشان دهید که این جواب بهینه است (زیرا تکرار می‌شود). توضیح دهید که چرا نتایج بدست آمده در این دو تکرار با هر جواب دیگر، باستثنای اینکه از جواب (۰ و ۰) شروع شود، یکسان است. چه مشکلاتی در مورد جواب ابتدائی (۰ و ۰) وجود دارد؟

۳۰− مسئله بهینه‌سازی با محدودیتهای خطی زیر را درنظر بگیرید.

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = \ln(x_1 + 1) - x_2^2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

الف− نشان دهید که این مسئله، برنامه‌ریزی محدب است.

ب– با استفاده از شرایط KT ، یک جواب بهینه را بدست آورید.

ج– با استدلالی ساده نشان دهید که جواب حاصل از بند (ب) بهینه است.

د– با شروع از جواب (۰ و ۰) و با استفاده ازیک تکرار الگوریتم فرانک – ولف جواب بند (ب) را بدست آورید. سپس، با یک تکرار دیگر نشان دهید که این جواب بهینه است (زیرا تکرار می‌شود).

۳۱– برنامه‌ریزی محدب زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Maximize} \quad f(x) = 10x_1 - 2x_1^2 - x_1^3 + 8x_2 - x_2^2$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

الف– با استفاده از شرایط KT ، نشان دهید که (۱ و ۱) بهینه نیست.

ب– جواب بهینه را از شرایط KT استخراج نمائید.

۳۲– مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی مسئله ۱۳ فصل ۸ را در نظر بگیرید. با استفاده از شرایط KT تعیین کنید که آیا جواب (۲ و ۱) بهینه هست یا خیر؟

۳۳– برنامه‌ریزی محدب زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Maximize} \quad f(x) = 24x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2$$

$$x_1 \leq 8$$

$$x_2 \leq 7$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

الف– جواب بهینه را از شرایط KT استخراج نمائید.

ب– این مسئله را به دو مسئله بهینه‌سازی تجزیه کنید که اولی فقط شامل x_1 و دومی فقط شامل x_2 باشد. تابع هدف هر کدام را روی منطقه موجه رسم نمائید و نشان دهید که مقدار x_1 و x_2 که از بند (الف) بدست آمدند در واقع بهینه هستند. آنگاه، با استفاده ازمشتقهای اول و دوم تابع هدف هم ثابت کنید که این جواب بهینه

است.

۳٤– مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Maximize} \quad f(x) = \frac{x_1}{x_2 + 1}$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

الف– با استفاده از شرایط KT ، نشان دهید که جواب (۲ و ٤) بهینه نیست.

ب– جوابی را بدست آورید که در شرایط KT صدق نماید.

ج– نشان دهید که این مسئله برنامه‌ریزی محدب نیست.

د– علیرغم نتیجه‌گیری در بند (ج)، با استدلالی ساده نشان دهید که جواب بدست آمده در بند (ب) بهینه است. (علت نظری این موضوع آن است که f(x) شبه مقعر[1] است).

هـ– با استفاده از این حقیقت که این مسئله یک برنامه‌ریزی کسری خطی است، آنرا به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل نمائید. آنگاه، آنرا حل کنید و به این ترتیب، جواب مسئله اصلی را مشخص نمائید. (راهنمائی: با استفاده از محدودیتهای تساوی در برنامه‌ریزی خطی، یکی از متغیرهای مدل را خارج نمائید و سپس آنرا به صورت ترسیمی حل کنید).

۳۵– با استفاده از شرایط KT ، جواب بهینه هر کدام ازمسائل زیر را پیدا کنید

الف–

$$\text{Maximize} \quad f(x) = x_1 + 2x_2 - x_2^2$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

ب–

$$\text{Maximize} \quad f(x) = 20x_1 + 10x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

1) *Pseudoconcave*

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

۳۶– در مورد مسئله زیر، شرایط **KT** چیست؟

$$\text{Minimize} \quad f(\mathbf{x})$$
$$g_i(\mathbf{x}) \ge b_i, \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m$$
$$\mathbf{x} \ge 0$$

(راهنمائی: با استفاده از روشی که در بخش ۷–۲، جلد اول، ارائه شد، این مسئله را به شکل استاندارد تبدیل کنید و سپس شرایط **KT** را به کار بگیرید).

۳۷– برنامه‌ریزی محدب زیر را در نظربگیرید.

$$\text{Minimize} \quad Z = x_1^2 - 6x_1 + x_2^3 - 3x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

الف– شرایط KT را در مورد این مسئله بنویسید.

ب– با استفاده ازشرایط KT بهینه بودن جواب (۰/۵ و ۰/۵) را بررسی کنید.

ج– جواب بهینه را از شرایط KT استخراج کنید.

د– با شروع ازجواب (۰ و ۰) یک تکرار روش فرانک– ولف رابه کار بگیرید تا دقیقاً به همان جوابی که دربند (ب) بدست آمده است برسید. سپس، در تکرار دوم، بهینه بودن این جواب را تحقیق کنید.

۳۸– برنامه‌ریزی محدب با محدودیتهای خطی زیررا درنظربگیرید.

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 8x_1 - x_1^2 + 2x_2 + x_3$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 12$$
$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0$$

الف– با استفاده از شرایط KT نشان دهید که (۲ و ۲ و ۲) بهینه نیست.

ب– جواب بهینه را از شرایط KT استخراج نمائید (راهنمائی: با استفاده از استدلالهای ساده وواضح تعیین کنید که کدام یک از متغیرها باید صفر و کدام غیرصفر باشند)

ج– با شروع از جواب (۰ و ۰ و ۰)، سه تکرار الگوریتم فرانک– ولف را اجرا کنید (راهنمائی: در مسئله برنامه‌ریزی خطی حاصل، می‌توان متغیری که دارای بالاترین مقدار برای c_j/a_{1j} باشد را به عنوان متغیر اساسی انتخاب نمود و مقدار آنرا برابر با $12/a_{1j}$ قرار داد).

۳۹– با استفاده ازشرایط **KT** تعیین نمائید که آیا جواب (۱ و ۱ و ۱) می‌تواند جواب بهینه مسئله زیر باشد.

$$\text{Minimize} \quad Z = 2x_1 + x_2^3 + x_3^2$$
$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \ge 4$$
$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0$$

۴۰– شرایط KT را در مورد مسئله برنامه‌ریزی کوادراتیک بنویسید. نشان دهید که این شرایط را می‌توان به شکلی که در بخش ۷–۱۰ ارائه شده است، بیان نمود.

۴۱– مثال برنامه‌ریزی کوادراتیک که در بخش ۷–۱۰ ارائه شد را در نظر بگیرید.

الف– با استفاده از آزمونی که در پیوست ۱ (جلد اول) ارائه شد، نشان دهید که تابع هدف، یک تابع کاملاً مقعر است.

ب– با استفاده از این خاصیت که **Q** یک ماتریس مثبت‌معین است، نشان دهید که تابع هدف کاملاً مقعر، یعنی بازاء تمام بردارهای **x** ، رابطه $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} > 0$ برقرار است. (راهنمائی: رابطه $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ را به مجموع مربعات تبدیل نمائید).

ج– نشان دهید که $x_1 = 3$ ، $x_2 = 9$ ، $x_3 = 12$ در شرایط **KT** ، به شکلی که در بخش ۶–۱۰ ارائه شد، صدق می کنند.

د– با شروع از جواب آزمایشی (۵ و ۵)، سه تکرار الگوریتم فرانک– ولف

را اجرا

۴۲- برنامه‌ریزی کوادراتیک زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 8x_1 - x_1^2 + 4x_2 - x_2^2$$

$$x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

الف- با استفاده از شرایط KT یک جواب بهینه را بدست آورید.

ب- حال فرض کنید که این مسئله با روش سیمپلکس که برای برنامه‌ریزی کوادراتیک تغییر یافته است حل شود. آنرا به شکل مسئله برنامه‌ریزی خطی فورموله کنید. محدودیتهای مکمل اضافی، که خودبه خود در الگوریتم منظور می‌شوند را نیز مشخص نمائید.

ج- روش سیمپلکس تغییر یافته را در مورد مدل بند (ب) به کاربگیرید.

۴۳- برنامه‌ریزی کوادراتیک زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 20x_1 - 20x_1^2 + 50x_2 - 5x_2^2 + 20x_1x_2$$

$$x_1 + x_2 \le 6$$

$$x_1 + 4x_2 \le 18$$

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

فرض کنید که بخواهیم این مسئله را با روش سیمپلکس تغییر یافته حل کنیم.

الف- مدل برنامه‌ریزی خطی که بایدمستقیماً حل شودرافرموله کنید ومحدودیت مکمل اضافی، که خود به خود باید توسط الگوریتم اعمال شود را مشخص نمائید.

ب- روش سیمپلکس تغییریافته را در مورد بند (الف) به کاربگیرید.

۴۴- مسئله برنامه‌ریزی کوادراتیک زیر را درنظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

$$x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

الف- با شروع از جواب (۰ و ۰) و با استفاده از الگوریتم فرانک - ولف (شش تکرار) مسئله را (با تقریب) حل کنید.

ب- با استفاده از روش ترسیمی نشان دهید که از رشته جوابهای بدست آمده در بند (الف) می‌توان به جوابی رسید که به جواب بهینه نزدیک باشد. تخمین شما از جواب بهینه چیست؟

ج- با استفاده از شرایط KT یک جواب بهینه بدست آورید.

د- حال فرض کنید که این مسئله با روش سیمپلکس تغییر یافته حل شود. آنرا به شکل مسئله برنامه‌ریزی خطی فورموله کنید. محدودیتهای مکمل اضافی، که خودباید توسط الگوریتم رعایت شود را نیزمشخص نمائید.

هـ- بدون استفاده از روش سیمپلکس تغییر یافته، نشان دهید که جواب بدست آمده در بند (ج)، با $Z=0$، برای مسئله معادلی که دربند (د) فورموله شده درواقع بهینه است.

و- روش سیمپلکس تغییر یافته را در مورد بند (د) به کار بگیرید.

۴۵- مسئله در وینجره‌سازی با تابع هدف کوادراتیک که دربخش ۲-۱۰ (شکل ۶-۱۰)ارائه شده را در نظر بگیرید، یعنی

$$\text{Maximize} \quad Z = 126x_1 - 9x_1^2 + 182x_2 - 13x_2^2$$

در رابطه با محدودیتهای خطی مسئله که در بخش ۱-۲ معرفی گردید. بندهای (الف) (فقط سه تکرار)، (ج)، (د)، (هـ)، (و) مسئله ۴۴ را در مورد این مسئله اجرا کنید.

۴۶- شرکتی می‌خواهد سه محصول مختلف را تولید و به بازار عرضه نماید. فرض کنید x_1 و x_2 و x_3 به ترتیب معرف تولید محصولات ۱ و ۲ و ۳ باشند. برآورد اولیه در مورد سودآوری این محصولات به شرح زیر است.

در مورد محصول ۱، سود ۱۵ واحد اول، هر واحد ۳۶ دلار و سود هر واحد مازاد بر آن فقط ۳۰ دلار خواهد بود. در مورد محصول ۲، سود دو واحد ۲۴ دلار و سود هر واحد مازاد بر آن فقط ۱۲ دلار خواهد بود. در مورد محصول ۳، سود ۱۰ واحد اول،

هر واحد ۴۵ دلار و مازاد بر آن تا میزان ۵ واحد، سود هر واحد ۳۰ دلار، و سود هر واحد مازاد بر ۱۵ واحد فقط ۱۸ دلار خواهد بود.

محدودیتهائی نیز در مورد منابع مورد نیاز تولید وجود دارد که عبارتند از

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 60 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad\; &\le 200 \\ x_1 \quad\; + 2x_3 &\le 70 \end{aligned}$$

مدیریت مایل است بداند که انتخاب چه مقادیری برای x_1 و x_2 و x_3 به حداکثر سود می‌انجامد

الف – با استفاده از روش فرموله کردن برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر در بخش ۸ – ۱۰، این مسئله را به شکل یک برنامه‌ریزی خطی فورموله کنید

ب – با استفاده از یک برنامه کامپیوتری، مدلی که در بند (الف) فورموله شد را حل کنید. ثابت نمائید که جواب بهینه در محدودیت اضافی این مدل نیزصدق می‌کند.

۴۷– برنامه‌ریزی محدب زیر را درنظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 4x_1 + 6x_2 - x_1^3 - 2x_2^2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\le 8 \\ 5x_1 + 2x_2 &\le 14 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

الف – با استفاده از شرایط KT، نشان دهید که جواب $(x_1, x_2) = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2})$ بهینه است.

ب – از طریق فورموله کردن این مسئله در چارچوب یک مدل ریاضی تقریبی، آنرا به یک مسئله برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر تبدیل نمائید. اعداد صحیح را به عنوان نقاط شکست در نظر بگیرید.

ج – با استفاده از یک برنامه کامپیوتری روش سیمپلکس، مدلی که در بند

(ب) فورموله شد را حل کنید. نشان دهید که جواب بهینه، در محدودیتهای ویژه مدل صدق می‌کند. این جواب را با جواب بهینه دقیق مسئله اصلی که در بند (الف) بدست آمد مقایسه کنید.

۴۸– برنامه‌ریزی محدب زیر، با محدودیتهای خطی را در نظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 32x_1 + 50x_2 - 10x_2^2 + x_2^3 - x_1^4 - x_2^4$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\le 11 \\ 2x_1 + 5x_2 &\le 16 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

الف – ازطریق فورموله کردن این مسئله در چارچوب یک مدل ریاضی تقریبی، آنرا به یک مسئله برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر تبدیل نمائید. نقاط شکست را برای هر دو متغیر، ۰ و ۱ و ۲ و ۳ در نظر بگیرید.

ب – با استفاده از شرایط KT نشان دهید که جواب (۲ و ۲)، جواب بهینه مسئله اصلی (نه مسئله تقریبی) است.

ج – با شروع از جواب اولیه (۰ و ۰) چهار تکرار الگوریتم فرانک – ولف را به کار بگیرید تا جواب تقریبی مسئله اصلی بدست آید.

د – بدون در نظر گرفتن محدودیتها، بهینه‌سازی تابع هدف دو متغیری را انجام دهید. جواب بهینه تابعی که فقط شامل x_1 باشد را با مشتق گیری تعیین نمائید و در مورد تابعی که فقط شامل x_2 باشد از فرایند جستجوی یک متغیری با $\epsilon = 0.1$ و حدود ابتدائی صفر و ۴ استفاده نمائید. نشان دهید که جواب بدست آمده برای (x_1, x_2)، در تمام محدودیتها صدق می کند و لذا جواب بهینه مسئله اصلی است.

۴۹– فرض کنید برای حل یک مسئله مشخص (که آنرا مسئله اصلی می نامیم)، روش برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر به کار گرفته شده و به مسئله معادلی به شرح زیر، تبدیل شده باشد.

$$\text{Maximize} \quad Z = 5x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + x_{22}$$

$$3x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 2x_{22} \le 25$$
$$2x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} - x_{21} - x_{22} \le 10$$
$$0 \le x_{11} \le 2$$
$$0 \le x_{12} \le 3$$
$$0 \le x_{13}$$
$$0 \le x_{21} \le 3$$
$$0 \le x_{22} \le 1$$

مدل ریاضی مسئله اصلی چه بوده است؟ (تابع هدف را می‌توانید به صورت جبری یا ترسیمی نشان دهید ولی محدودیتها را به صورت جبری بیان کنید).

۵۰- در مورد هر کدام از حالتهای زیر، ثابت کنید که خواص کلیدی برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر، که در بخش ۸-۱۰ ارائه شده، صادق است (راهنمائی: فرض کنید که جواب بهینه‌ای وجود دارد که این خاصیت را نقض می‌کند. آنگاه، با نشان دادن اینکه جواب موجه بهتری هم می‌تواند وجود داشته باشد تناقض را نشان دهید).

الف- حالت خاص برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر، که در آن تمام توابع $g_i(x)$ خطی هستند.

ب- حالت کلی برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر که تمام توابع آن غیرخطی و دارای شکل مشخصی هستند. (راهنمائی: توابع محدودیتها را به عنوان محدودیتهای منابع تصور کنید که $g_{ij}(x_j)$ معرف مقدار منبع i است که در اثر فعالیت j، به میزان x_j مصرف می‌شود. سپس، با استفاده از فرض محدب بودن شیب قطعات منحنی، تابع خطی تقریبی را تعیین کنید).

۵۱- مسئله شماره ۱۳ فصل چهارم جلد اول کتاب را در نظر بگیرید. محدودیت ویژه این است که هرگاه زمان عادی کار در هر دوره کلاً مصرف نشده باشد، از اضافه کاری خودداری گردد. توضیح دهید چرا منطق برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر ایجاب می‌کند که هر جواب بهینه مسئله حمل و نقل در این محدودیت صدق نماید.

۵۲- شرکتی محصولی را در دو کارخانه تولید می‌کند. برای تامین نیازها، لازم است که تا حدودی اضافه کاری انجام شود. هزینه تولید هر واحد محصول در

ساعت عادی و اضافه کاری، همچنین ظرفیت تولیدی روزانه هر کارخانه در جدول زیر نشان داده شده است

	هزینه هرواحد تولید		ظرفیت	
	ساعت عادی	اضافه کاری	ساعت عادی	اضافه کاری
کارخانه ۱	۱۵	۲۵	۲۰۰۰	۱۰۰۰
کارخانه ۲	۱۶	۲۴	۱۰۰۰	۵۰۰

فرض کنید x_1 و x_2 به ترتیب، معرف تعداد قطعاتی است که روزانه در کارخانجات ۱ و ۲ تولید می‌شوند. همچنین فرض کنید که هدف، حداکثر کردن $Z = x_1 + x_2$ در رابطه با این محدودیت باشد که هزینه روزانه از ۶۰ هزار تجاوز نکند. باید توجه داشت که مدل ریاضی این مسئله (با x_1 و x_2 به عنوان متغیرهای تصمیم) دارای همان مدل برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر، بخش ۸-۱۰ است، با این تفاوت که در این مسئله به جای تابع هدف، محدودیت به شکل توابع تفکیک‌پذیر است. لیکن، چنانچه استفاده از اضافه کاری، حتی قبل از اتمام کار عادی مجاز باشد باز هم همان رویکرد مسئله برنامه‌ریزی خطی به کار گرفته می‌شود.

الف- این مسئله را به شکل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

ب- توضیح دهید که چرا منطق برنامه‌ریزی تفکیک‌پذیر در اینجا هم تضمین می‌کند که اضافه کاری قبل از اتمام کار عادی انجام نگیرد.

۵۳- برنامه‌ریزی محدب زیر، با محدودیتهای خطی را در نظر بگیرید

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 3x_1x_2 + 40x_1 + 30x_2 - 4x_1^2 - x_1^4 - 3x_2^2 - x_2^4$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

با شروع از جواب (۰ و ۰)، دو تکرار الگوریتم فرانک - ولف را اجرا کنید.

۵۴- برنامه‌ریزی محدب زیر، با محدودیتهای خطی را درنظر بگیرید

$$\text{Maximize}\quad f(\mathbf{x}) = 3x_1 + 4x_2 - x_1^3 - x_2^2$$

$$x_1 + x_2 \le 1$$

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

الف- با شروع از جواب (۰/۲۵ و ۰/۲۵)، سه تکرار الگوریتم فرانک - ولف را اجرا کنید.

ب- با استفاده از شرایط KT، بررسی کنید که آیا جواب بدست آمده در بند (الف) بهینه هست یا خیر؟

ج- باشروع از جواب (۰/۲۵ و ۰/۲۵)، روش SUMT را به کار بگیرید. با کمک یک برنامه کامپیوتری روش جستجوی گرادیان، جوابی را به دست آورید که $P(x;r)$ رادر هر تکرار حداکثر نماید (با r برابر با ۱ و 10^{-1} و 10^{-4}).

۵۵- برنامه‌ریزی محدب زیر، با محدودیتهای خطی را در نظر بگیرید.

$$\text{Maximize}\quad f(\mathbf{x}) = 4x_1 - x_1^4 + 2x_2 - x_2^2$$

$$4x_1 + 2x_2 \le 5$$

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

الف- با شروع از جواب (۰/۵ و ۰/۵)، چهار تکرار الگوریتم فرانک - ولف را به کار بگیرید.

ب- به کمک روش ترسیمی نشان دهید که چگونه از روند جوابهای آزمایشی بدست آمده در بند (الف) می‌توان یک جواب بهینه تقریبی استنتاج نمود. برآورد شما از چنین جوابی چیست؟

ج- با استفاده از شرایط KT، بررسی کنید که آیا جواب بند (ب) در واقع بهینه هست یا خیر؟ چنانچه بهینه نباشد با استفاده از شرایط فوق، جواب بهینه را استخراج نمائید.

د- با شروع از جواب ابتدائی (۰/۵ و ۰/۵)، روش SUMT را به کار بگیرید. با کمک یک برنامه کامپیوتری روش جستجوی گرادیان، جوابی را بدست آورید که $P(x;r)$ را در هر تکرار حداکثر نماید (با r برابر ۱ و 10^{-2} و 10^{-4} و 10^{-6}).

۵۶- مثال مربوط به روش SUMT در بخش ۱۰-۹ را درنظر بگیرید

الف- نشان دهید که جواب (۲ و ۱) در شرایط KT صدق می کند.

ب- منطقه موجه را به صورت ترسیمی نشان داده سپس مکان هندسی نقاطی که در رابطه $x_1x_2 = 2$ صدق می کنند را رسم نمائید. آنگاه با کمک این منحنی، نشان دهید که جواب (۲ و ۱) با مقدار $f(1,2) = 2$ درواقع یک حداکثر مطلق است.

۵۷- روش SUMT را در مورد مسئله برنامه‌ریزی محدب زیر به کاربگیرید

$$\text{Maximize}\quad f(\mathbf{x}) = -2x_1 - (x_2 - 3)^2$$

$$x_1 \ge 3$$

$$x_2 \ge 3$$

حداقل تابع $P(x;r)$ را بدست آورید. r را برابر با ۱ و 10^{-2} و 10^{-4} و 10^{-6} بگیرید

۵۸- روش SUMT را در مسئله برنامه‌ریزی محدب زیر به کاربگیرید.

$$\text{Minimize}\quad f(\mathbf{x}) = \frac{(x_1 + 1)^3}{3} + x_2$$

$$x_1 \ge 1$$

$$x_2 \ge 0$$

حداقل تابع $p(x;r)$ را بدست آورید. r را برابر با ۱ و 10^{-2} و 10^{-4} و 10^{-6} بگیرید.

۵۹- روش SUMT را در مورد مسئله برنامه‌ریزی محدب زیربه کاربگیرید.

$$\text{Maximize} \quad f(x) = x_1x_2 - x_1 - x_1^2 - x_2 - x_2^2$$
$$x_2 \ge 0$$

با استفاده از فرایند جستجوی گرادیان، حداکثر تابع $P(x;r)$ را در هر تکرار بدست آورید. r را برابر با ۱ و $۱۰^{-۲}$ و $۱۰^{-۴}$ بگیرید. از جواب (۱ و ۱) شروع کنید.

۶۰- روش SUMT را در مورد مسئله ٤٤ به کار بگیرید. با استفاده از فرایند جستجوی گرادیان حداکثر تابع $P(x;r)$ را در هر تکرار بدست آورید. r را برابر با ۱ و $۱۰^{-۲}$ و $۱۰^{-۴}$ بگیرید. از جواب (۰/۵ و ۰/۵) شروع کنید.

۶۱- روش SUMT را در مورد مسئله ٤٥ به کار بگیرید. با استفاده از یک برنامه کامپیوتری فرایند جستجوی گرادیان، حداکثر تابع $P(x;r)$ را در هر تکرار بدست آورید. r را برابر با ۱۰۰ و ۱ و $۱۰^{-۲}$ و $۱۰^{-۴}$ بگیرید. از جواب (۳ و ۲) شروع کنید.

۶۲- برنامه‌ریزی غیرمحدب زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Maximize} \quad f(x) = 1000x - 400x^2 + 40x^3 - x^4$$
$$x^2 + x \le 500$$
$$x \ge 0$$

الف- منطقه موجه x را مشخص نمائید. رابطه‌ای کلی برای سه مشتق اول f(x) بدست آورید. با استفاده از این اطلاعات، شکل کلی f(x) را درمنطقه موجه رسم کنید. روی منحنی بدست آمده، نقاط حداکثر نسبی و مطلق تابع را مشخص کنید، محاسبه دقیق مقادیر مربوطه احتیاج نیست.

ب- برای تعیین هر کدام از نقاط حداکثر نسبی، ازفرایند جستجوی یک متغیری با $\varepsilon = 0.05$ استفاده کنید. برای تعیین حدود ابتدائی، از شکل کلی تابع که در بند (الف) رسم شده است استفاده نمائید. کدام یک از نقاط حداکثر نسبی حداکثر مطلق است؟

ج- برای تعیین نقاط حداکثر نسبی، روش SUMT را با $\varepsilon = 25$ و

$r = 10^4, 10^2, 1$ به کار بگیرید. از جوابهای $x=3$ و $x=15$ به عنوان جوابهای ابتدائی برای این جستجوها استفاده نمائید. با کمک فرایند جستجوی یک متغیری که در بند (ب) تشریح شد حداکثر P(x;r) رابدست آورید. کدامیک از نقاط حداکثر نسبی حداکثر مطلق است؟

۶۳- برنامه‌ریزی غیرمحدب زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Maximize} \quad f(x) = 3x_1x_2 - 2x_1^2 - x_2^2$$
$$x_1^2 + 2x_2^2 \le 4$$
$$2x_1 - x_2 \le 0$$
$$x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 2$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

الف- برای به کارگیری روش SUMT، تابع بدون محدودیت P(x;r) که باید حداکثر شود چیست؟

ب- با شروع از جواب (۱ و ۱)، روش SUMT را به کار بگیرید. با کمک یک برنامه کامپیوتری مربوط به فرایند جستجوی گرادیان، حداکثر P(x;r) را بازاء r = ۱ و $۱۰^{-۲}$ و $۱۰^{-٤}$ بدست آورید.

٦٤- برنامه‌ریزی غیرمحدب زیر را در نظربگیرید

$$\text{Minimize} \quad f(x) = \sin 3x_1 + \cos 3x_2 + \sin(x_1 + x_2)$$
$$x_1^2 - 10x_2 \ge -1$$
$$10x_1 + x_2^2 \le 100$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

الف- برای به کارگیری روش SUMT، تابع بدون محدودیت P(x;r) که باید حداقل شود چیست؟

ب- با استفاده از روش SUMT، تا آنجا که می‌توانید جوابهای حداکثر نسبی بیشتری بدست آورید. با استفاده از یک برنامه کامپیوتری مربوط به فرایند

جستجوی گرادیان و با شروع از یک جواب ابتدائی، حداقل تابع $P(x;r)$ را بازاء $r = 1$ و 10^{-2} و 10^{-4} بدست آورید. براساس نتایج بدست آمده کدام یک ازجوابها باید بهینه باشد؟ (راهنمائی: با یک بررسی مقدماتی، مناطقی را مشخص کنید که به نظر می‌رسد می‌توانند حداقل نسبی داشته باشند و در هر منطقه یک جواب ابتدائی انتخاب نمائید).

فصل یازدهم

نظریهٔ بازی

۱-۱۱ مقدمه

زندگی مملو از تضادها و رقابتهاست. نمونه‌های بسیاری را می‌توان نشان داد که طرفهای متخاصم، تضاد منافع دارند. جنگها و کشورگشائیها، مبارزات سیاسی، مسابقه‌های تبلیغاتی، بازاریابی و شرط بندیها از این جمله‌اند. یک مشخصه اساسی بسیاری از این نمونه‌ها آن است که نتیجه نهایی بستگی به‌مجموعه سیاستهایی[1] دارد که توسط طرفین متخاصم اتخاذ می‌گردد. نظریه‌بازی[2] نظریه‌ای ریاضی است که به‌بررسی مشخصه‌های کلی رقابتها، به‌صورتی مجرد می‌پردازد. در این نظریه بر فرایند تصمیم‌گیری طرفهای متخاصم با رقیب تاکید می‌شود.

در این فصل، عمدتاً به‌بررسی بازیهای موسوم به دونفری جمع صفر[3] پرداخته می‌شود. در این بازیها، همان‌طور که از نام آن بر می‌آید، فقط دو طرف متخاصم یا

۱- کلمه *Strategy* از لحاظ لغوی خط مشی ترجمه می شود، لیکن، در این مبحث باتوجه به مفهوم کاربرد آن، از کلمه سیاست استفاده شده است (م).

۳- *Two Person- zero Sum Game*

۲- *Game Theory*

بازیگر[1] وجود دارند (که ممکن است ارتشها، گروهها، شرکتها و نظایر اینها باشند).

علت جمع‌صفر خواندن بازیها آن است که مقدار برد یکی دقیقاً با میزان باخت دیگری مساویست، یعنی جمع جبری برد خالص آنها برابر با صفر است.

برای تشریح مشخصه‌های اصلی یک مدل نظریه‌بازی از نمونه‌ای ساده کمک می‌گیریم. دو شرکت کنندهٔ این بازی همزمان با یکدیگر یک یا دو انگشت خود را نشان می‌دهند. اگر تعداد انگشتان آنها مساوی باشد، یکی از آنها، مثلاً بازیگر اول، مقدار مشخصی مثلاً یک دلار، به‌بازیگر دوم می‌پردازد، در غیر این‌صورت، دومی باید همین مقدار را به‌اولی بپردازد. به‌این ترتیب، هر بازیگر می‌تواند یکی از دو سیاست را اتخاذ کند: یک یا دو انگشت خود را نشان دهد. جدول ۱−۱۱ بازده (برحسب دلار) بازیگر اول را در نتیجه انتخاب هر یک از این سیاستها نشان می‌دهد.

به‌طور کلی، مشخصه‌های یک بازی دونفره عبارتند از

۱- سیاست بازیگر اول

۲- سیاست بازیگر دوم

۳- جدول بازده[2]

جدول ۱−۱۱ جدول بازده برای مثال شرط بندی

II: ۲	۱		
۱−	۱	۱	I
۱	۱−	۲	

1) Player

2) Payoff Table

در این مثال، سیاست تنها از یک حرکت ساده تشکیل می‌شود، لیکن در بازیهای پیچیده‌تر، سیاست شامل سلسله‌ای از حرکتهاست. در نظریه‌بازی، سیاست قاعده‌ای از پیش تعیین شده است که مشخص می‌کند بازیگر در مقابل هر پیشامدی که در هر یک از مراحل می‌تواند رخ دهد چه واکنشی داشته باشد. قبل از شروع بازی، هر بازیگر سیاستهایی که خود و طرف مقابل می‌توانند اتخاذ کنند و همچنین جدول بازده را به‌درستی می‌شناسد. لیکن، بازیگران سیاست خود را به‌طور همزمان و بدون اطلاع از سیاست طرف مقابل انتخاب می‌کنند.

جدول بازده معمولاً تنها برای یک بازیگر تهیه می‌شود. با توجه به صفر بودن جمع جبری بردها، جدول بازده بازیگر دیگر نیز مساوی همان مقادیر، منتهی با علامت مخالف است. مقادیر جدول بازده می‌تواند بر حسب هر واحدی، مثلاً دلار، بیان شود، به‌شرطی که آن واحد بتواند مبین مطلوبیتی[1] باشد که به‌بازیگر می‌رسد. باید توجه داشت که در مورد مبالغ هنگفت، مطلوبیت لزوماً متناسب با میزان پول (یا هر کالای دیگر) نیست. برای نمونه، مطلوبیت دو میلیون دلار برای انسانی تهیدست، خیلی کمتر از دو برابر مطلوبیت یک میلیون دلار است. فرض کنید چنین فردی دو انتخاب پیش رو داشته باشد،

(۱) دریافت دو میلیون دلار با احتمال ۵۰ درصد.

(۲) دریافت قطعی یک میلیون دلار.

چنانچه این فرد از سلامت عقل برخوردار باشد، بی‌تردید دومی را انتخاب خواهد کرد. بنابراین، واحد اندازه‌گیری باید طوری تعریف شود که نتیجه عدد ۲ که در جدول بازده نوشته می‌شود دقیقاً دو برابر نتیجه عدد ۱ باشد. اگر چنین تعریف مناسبی از بازده به‌عمل آید بازیگر بین دو انتخاب، یکی پنجاه درصد شانس دستیابی به میزان بازده اول (وپنجاه درصد هیچ)، و دیگری که رسیدن قطعی میزان بازده دومی

1) Utility

maxmin	در اول کمترین، بعد بیشترینها

minmax	در اول بیشترین، بعد کمترین

است، تفاوتی قائل نخواهد بود.

هدف اصلی نظریه‌بازی، توسعه ضوابط معقول جهت انتخاب سیاست است.

چنین توسعه‌ای بر اساس دو فرض بنا نهاده می‌شود. اول اینکه هر دو بازیگر عاقل‌ومنطقی باشند و دوم اینکه نهایت توان خود را در مصاف حریف به‌کار بندند تا به بهترین‌نتیجه دست یابند. چنین فرضی در نقطه مقابل فرضیات نظریه‌تصمیم[1] قرار دارد، زیرا در آنجا فرض می‌شود تصمیم گیرنده با حریفی سر و کار دارد که سیاستهایش را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کند (مانندطبیعت). بر عکس، در نظریه‌بازی فرض بر این است که دو بازیگر مجدانه در تلاشند تا منافع خود را به‌زیان حریف بالا برند.

در این فصل، با کمک مثالهایی ضابطهٔ انتخاب سیاست توسط بازیگران تشریح می‌گردد. در بخش بعدی، به‌طور مشخص مثالی نوعی از یک وضعیت ساده به‌منظور درک چگونگی فرموله کردن بازی و یافتن جواب آن مطرح می‌شود. در بخش ۳ــ۱۱، گونه‌های پیچیده‌تری از این بازی، به‌منظور توسعه ضوابط کلی‌تر تشریح می‌گردند. در بخشهای ۴ــ۱۱ و ۵ــ۱۱ روش ترسیمی حل و چگونگی فرموله کردن این مسائل در قالب مدل برنامه ریزی خطی مورد بحث قرار می‌گیرد. سرانجام در بخش ۶ ــ ۱۱، چگونگی تعمیم نظریه بازی برای حالتهایی که بیش از دو طرف متخاصم دارند به‌اختصار عنوان می‌شود.

۲ــ۱۱ حل بازیهای ساده ـ یک مثال نوعی

دو سیاستمدار در یک مبارزه انتخاباتی در مقابل یکدیگر قرار دارند. برای دو روز آخر قبل از انتخابات که از اهمیت بسزائی برخوردار است باید برنامه مبارزاتی تهیه شود. هر

سطری بر سطر دیگر غلبه می‌کند که درایه‌هایش بزرگتر یا مساوی با نظیر

ستونی بر ستون دیگر غلبه می‌کند که درایه‌هایش کوچکتر یا مساوی با نظیر

1) Decision Theory

دو سیاستمدار می‌خواهند دو روز باقیمانده را در دو شهر کلیدی الف و ب بگذرانند. آنها می‌توانند یا در هر شهر یک روز و یا در یک شهر دو روز به‌سر برند. هر سیاستمدار از برنامه حریف تا وقتی که اعلام نشود بی اطلاع است. هر دو آنها از مدیران برنامه‌های خود در این دو شهر خواسته‌اند تا اثر تصمیم خود و رقیب را در مورد گذرانیدن یک یا دو روز در هر یک از آن شهرها، بر حسب پیش‌بینی افزایش یا کاهش تعداد رای ارزیابی نمایند، از این اطلاعات به‌منظور تعیین بهترین سیاست برای دو روز آینده استفاده می‌شود.

فرموله کردن مسئله برای آنکه این مسئله در قالب یک بازی دو نفری ــ جمع صفر فرموله شود ابتدا باید دو طرف بازی (که در اینجا دو سیاستمدار هستند)، سیاستهای هر کدام، و جدول بازده مشخص شود.

همان‌طور که از صورت مسئله بر می‌آید، هر بازیگر سه سیاست پیش رو دارد.

سیاست ۱: گذراندن یک روز در هر شهر.

سیاست ۲: گذراندن هر دو روز در شهر الف.

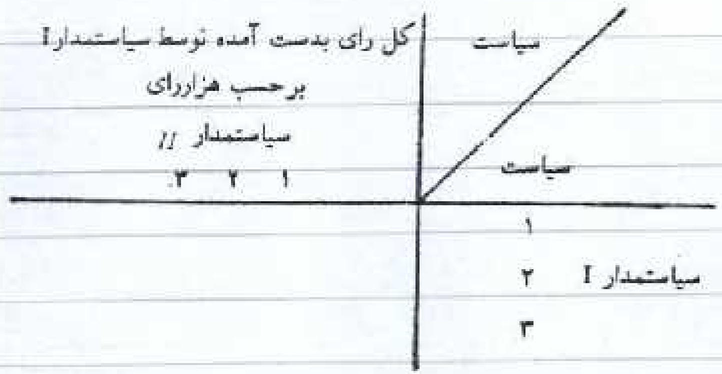
سیاست ۳: گذراندن هر دو روز در شهر ب.

لیکن چنانچه هر سیاستمدار قبل از تصمیم گیری در مورد روز دوم بتواند بفهمد که حریفش روز اول به‌کجا می‌رود، دیگر تنها این سه‌سیاست را در پیش نخواهد داشت. در این صورت، در مقابل او هشت سیاست وجود دارد (زیرا طرف مقابل می‌تواند روز اول را در هر یک از دو شهر بگذراند، این سیاستمدار هم در روز اول ۲ انتخاب و در روز دوم هم ۲ انتخاب دارد، پس مجموعاً ۸ = ۲×۲×۲ سیاست در پیش است).

هر یک از اعداد جدول بازده بازیگر اول نشان دهنده میزان مطلوبیت این بازیگر (یا میزان منفی مطلوبیت برای بازیگر دوم) است که نتیجهٔ ترکیبی از سیاستهاست که توسط دو بازیگر اتخاذ می‌گردد. هدف هر دو نفر بدست آوردن رای بیشتر است، و مادامی‌که از نتیجه انتخابات مطلع نشده‌اند طبعاً هر رای اضافی برای

آنها ارزش یکسانی دارد. بنابراین، مقادیر جدول بازده بیانگر تعداد آرایی است که در طول این دو روز از چنگ طرف دیگر بدر می‌آورد. (یعنی جمع خالص تغییرات آراء در دو شهر). فرموله کردن مسئله از این دیدگاه در جدول ۲−۱۱ خلاصه شده است.

جدول ۲−۱۱ جدول بازده مسئله انتخابات



لیکن باید توجه داشت چنانچه این سیاستمداران اطلاعات بیشتری در مورد طرف مقابل داشته باشند دیگر این جدول بازده مناسب نیست. به‌طور مشخص، اگر اکنون که دو روز به‌انتخابات مانده رای فعلی جامعه مشخص بود، جدول ۲−۱۱ می‌توانست بیان کننده آن باشد که با هر یک از ترکیبهای جدول، کدام سیاستمدار برنده می‌شود. چون برنده شدن هدف نهایی است، و تعداد آراء اضافی چندان اهمیتی ندارد، لذا در جدول بازده می‌توان مطلوبیت برنده شدن سیاستمدار اول را با مقداری مثبت (مثلا $\frac{۱}{۲}$) نشان داد، که در این صورت مطلوبیت او در اثر بازنده شدن مثلاً $-\frac{۱}{۲}$ خواهد بود. حتی اگر بتوان احتمال برنده شدن این سیاستمدار را در اثر هر ترکیب از سیاستهای اتخاذ شده توسط دو طرف بر آورد نمود، می‌توان مقدار این احتمال را از $\frac{۱}{۲}$ کسر کرده و در محل مربوطه در جدول بازده وارد نمود، که در واقع نشان دهنده

امیدریاضی یا میانگین مطلوبیت خواهد بود. لیکن، معمولاً اطلاعات کافی و قابل قبولی در این موارد در دسترس نیست.

در چارچوب جدول ۲−۱۱ به‌منظور تشریح سه گونه از مسائل بازیها، سه مجموعهٔ اطلاعات برای جدول بازده ارائه می گردد.

گونه اول

فرض کنید جدول بازده دو سیاستمدار به‌صورت جدول ۳−۱۱ باشد. هر سیاستمدار چه سیاستی را باید انتخاب کند؟ این مسئله حالت خاصی است که جواب آن صرفاً با استفاده از مفهوم سیاست مغلوب[1] و حذف سیاستهای بدتر تا وقتی که تنها یک سیاست بماند بدست می‌آید. به‌طور مشخص، اگر سیاستی بدتر از سیاست دیگر باشد می‌توان آنرا کنار گذاشت.

جدول ۳−۱۱ جدول بازده مسئله انتخابات − گونه اول

		II		
		۱	۲	۳
I	۱	۱	۲	٤
	۲	۱	۰	۵
	۳	۰	۱	−۱

1) Dominated Strategy

در جدول ۳–۱۱ بازیگر دوم هیچ سیاستی ندارد که مشخصاً بدتر از سیاست دیگری باشد، لیکن برای بازیگر اول، سیاست ۱ بر سیاست ۳ غالب است، زیرا (صرفنظر از اینکه سیاست بازیگر دوم چه باشد، نتیجه آن همواره بهتر است. پس از حذف سیاست ۳ برای بازیگر اول، جدول بازده به‌صورت زیر درمی‌آید.

	۱	۲	۳
۱	۱	۲	٤
۲	۱	۰	۵

چون فرض بر این است که هر دو بازیگر منطقی هستند لذا بازیگر دوم نیز می‌داند که بازیگر اول فقط به‌این دو سیاست می‌پردازد. اکنون، بازیگر دوم هم یک سیاست مغلوب در پیش رو دارد ـ سیاست ۳، زیرا طبق جدول جدید میزان باخت (پرداخت به‌بازیگراول) هر دو سیاست ۱ و ۲ همواره از سیاست ۳ کمتر است. با حذف این سیاست به‌جدول زیر می‌رسیم.

	۱	۲
۱	۱	۲
۲	۱	۰

در اینجا، برای بازیگر اول، سیاست ۱ بر سیاست ۲ غالب می گردد، زیرا این سیاست در ستون ۲ بهتر و در ستون اول مساوی سیاست ۲ است. پس جدول زیر بدست می‌آید.

	۱	۲
۱	۱	۲

و برای بازیگر دوم سیاست، ۲ نسبت به‌سیاست ۱ مغلوب است. لاجرم هر دو با بازیگر سیاست ۱ را انتخاب می‌نمایند.

بدین ترتیب، بازیگر اول همواره یک واحد از بازیگر دوم می‌برد (یعنی هزار رای بیش از اومی‌آورد) و در این حالت می گویند ارزش بازی[1] مساوی یک است. بازی تنها در صورتی عادلانه[2] نامیده می‌شود که ارزش آن مساوی صفر باشد.

بنابراین، مفهوم سیاست مغلوب موجب شد تا بتوانیم جدول بازده را کوچک کنیم. در هر شرایطی نظیر مثال بالا تنها بمدد این مفهوم می‌توانیم به جواب بهینه برسیم.

گونه دوم

حال فرض کنید که جدول بازده به‌صورت جدول ٤ - ۱۱ باشد. در این صورت، دیگر سیاست مغلوبی وجود ندارد، و طبعاً دیگر واضح نیست که بازیگران چه خواهند کرد.

جدول ٤–۱۱ جدول بازده مسئله انتخابات – گونه دوم

		II			
		۱	۲	۳	حداقل
I	۱	۳-	۲-	٦	۳-
	۲	۲	۰	۲	۰ حداکثر کردن حداقل برای I
	۳	۵	۲-	٤-	٤-
	حداکثر	۵	۰	٦	
		حداقل کردن حداکثربرای II			

1) Value of the Game

2) Fair Game

در این حالت، نظریه بازی چگونه بازیگران را راهنمایی می کند؟ سیاستهای بازیگر اول را مرور می‌کنیم: ممکن است با انتخاب سیاست اول، او از ٦ واحد برد تا ۳ واحد باخت داشته باشد. لیکن چون بازیگر دوم هم منطقی است، و از باختهای کلان می‌گریزد، لذا محتمل است که سیاست ۱ را انتخاب کند تا بازیگر اول ببازد. به‌همین ترتیب، بازیگر اول می‌تواند با اتخاذ سیاست سوم بردی برابر با ۵ داشته باشد، اما احتمال دارد که حریف عاقلش چنین مجالی را ندهد و تا ٤ واحد باخت را بهاو تحمیل نماید، از طرف دیگر بازیگر اول با انتخاب سیاست ۲ یقیناً باختی نخواهد داشت و ای بسا چیزی هم ببرد. بنابراین، چون این سیاست نسبت به‌سیاستهای دیگر تضمین بهتری دارد، لذا علی‌الظاهر سیاست ۲ انتخاب عاقلانه بازیگر اول در مقابل حریف عاقل اوست. با تحلیلی مشابه از دیدگاه بازیگر دوم، او نیز نتیجه می گیرد که سیاستهای ۱ و ۲ و ۳ به‌ترتیب باختی معادل ۵ و ۰ و ٦ به‌بار می‌آورند. پس سیاست ۲ به‌روشنی انتخاب عاقلانه اوست. به‌علاوه حتی اگر این دو از سیاست یکدیگر هم با خبر باشند، باز نمی‌توانند وضعیت خود را بهتر کنند، لذا می‌توان این سیاست را با اطمینان و کراراً به کار گرفت.

چکیدهٔ این استدلال در آن است که هر بازیگر باید طوری بازی کند که حداکثر باخت خود را حداقل نماید. ضابطه حداقل کردن حداکثر[1] معیار اساسی نظریه‌بازی در انتخاب سیاست است. از نظر جدول بازده، این ضابطه به معنی آن است که بازیگر اول باید سیاستی که حداقل بازده آن از همه بزرگتر، و بازیگردوم سیاستی که حداکثربازده‌آن از همه کوچکتر باشد را انتخاب نماید. این موضوع در جدول ٤-۱۱ نشان داده شده است. در این جدول، سیاست دوم بازیگر اول به‌عنوان حداکثر حداقل[2] و سیاست دوم بازیگر دوم به‌عنوان حداقل حداکثر[3] شناخته می‌شوند. حداکثر

1) *Minimax Criterion* 2) *Maximin*

3) *Minimax*

حداقل را کمترین مقدار و حداقل حداکثر را بیشترین مقدار بازی می‌خوانند. اگر این دو مقدار مساوی باشند، آنرا ارزش بازی می‌نامند. چون مقادیر حداکثر حداقل و حداقل حداکثر در مثال ما هر دو مساوی صفر بودند، لذا آنرا بازی عادلانه می‌خوانیم.

به‌نکته ظریفی نیز باید توجه داشت که کمترین و بیشترین مقدار در جدول بازده در یک محل قرار دارند زیرا این مقدار در سطر خود از همه کوچکتر و در ستون خود از همه بزرگتر است. هر عنصری در جدول بازده با چنین خصوصیتی را نقطه‌زین‌اسبی[1] می‌نامند.

در این بازی، وجود نقطه زین اسبی نقش تعیین کننده دارد، زیرا باعث می‌شود که هیچ بازیگری نتواند از سیاست حریف به‌نفع خود استفاده کند. به‌طور مشخص، هرگاه بازیگر دوم حدس بزند یا مطلع شود که قرار است بازیگر اول سیاست ۲ را انتخاب کند، او با تغییر سیاست خود و انتخاب سیاستی غیر از ۲ تنها می‌تواند زیان خود را افزایش دهد. به‌همین ترتیب، بازیگر اول نیز با تغییر سیاست، فقط وضع خود را بدتر می کند. بنابراین، هیچکدام انگیزه‌ای برای بررسی تغییر سیاست، خواه به‌دلیل بهره‌برداری از سیاست حریف و خواه به‌علت جلوگیری از سوءاستفاده او، ندارد. از این رو، به‌واسطه وجود یک جواب پایدار[2]، همواره از سیاست حداکثر حداقل و حداقل حداکثر پیروی خواهد شد.

گونه بعدی مسئله نشان می‌دهد که بعضی از مسائل نقطه زین‌اسبی ندارند، و یافتن جواب آنها مستلزم تحلیل پیچیده‌تری است.

گونه سوم

آخرین تغییرات جدول بازده مسئله انتخابات در مورد دو سیاستمدار (بازیگر)

1) *Saddle Point* 2) *Stable Solution*

در جدول ۵ - ۱۱ نشان داده شده است. این بازی چگونه انجام می‌شود؟

جدول ۵-۱۱ جدول بازده مسئله انتخابات ـ گونه سوم

		II ۱	۲	۳	حداقل
I	۱	۰	−۲	۲	−۲ ← حدپائینی بازی
	۲	۵	٤	−۳	−۳
	۳	۲	۳	−٤	−٤
	حداکثر	۵	٤	۲ ← حد بالائی بازی	

فرض کنید که هر دو بازیگر عیناً مثل گونه ۲ مسئله از ضابطه حداقل‌حداکثر پیروی نمایند. بازیگر اول می‌داند که کمترین مقدار بازی مساوی ۲ ـ است، و او با انتخاب سیاست ۱ بیش از ۲ واحد نخواهد باخت. به‌همین ترتیب، چون بیشترین مقدار بازی نیز مساوی ۲ است، پس بازیگر دوم هم می‌تواند مطمئن شود که با انتخاب سیاست ۳ بیش از ۲ واحد نمی‌بازد.

توجه داشته باشید که ارزش بازی به‌مقدار مشخص و در نتیجه نقطه زین‌اسبی در این مسئله وجود ندارد. اگر هر دو بازیگر همان سیاستهای بالا را انتخاب کنند چه خواهد شد؟ همان‌طور که می‌بینیم، بازیگر اول ۲ واحد از بازیگر دوم خواهد برد، و طبعاً بازیگر دوم از این موضوع راضی نخواهد بود. چون بازیگر دوم منطقی است، و این نتیجه را پیش‌بینی می‌کند، لذا می‌تواند تصمیم بهتری بگیرد با انتخاب سیاست ۲، به‌جای ۲ واحد باخت به‌همین مقدار ببرد. چون بازیگر اول هم داناست، با پیش‌بینی این موضوع با انتخاب سیاست ۲ می‌تواند بازده خود را از ۲ − به ٤ برساند. با درک این واقعیت، بازیگر دوم ترجیح خواهد داد که به‌سیاست سوم بازگردد تا ٤ واحد باخت را به ۳ واحد برد مبدل سازد. این مسیر بازیگر اول را مجدداً به‌فکر انتخاب

سیاست ۱ می‌اندازد، و بدین ترتیب، تمام این حرکتها از نو تکرار می‌گردد. در واقع، جواب (سیاست ۱ برای بازیگر اول و سیاست ۳ برای بازیگر دوم) جوابی ناپایدار[1] است، بنابراین لازم است که به‌جستجوی جواب قانع کننده‌تری پرداخت. اما چه نوع جوابی؟

نکته کلیدی آن است که هرگاه سیاست یک بازیگر قابل پیش‌بینی باشد، حریف او می‌تواند برای بهبود وضع ت خود بیشترین استفاده را از این اطلاعات ببرد. بنابراین، ویژگی عمده یک برنامه عاقلانه» در چنین بازیهایی آن است که هیچ کدام از دو بازیگر نتواند سیاست رقیب را پیش‌بینی کند. بنابراین، به‌جای یک سیاست منحصر به‌فرد که همواره مورد استفاده قرار گیرد، از میان سیاستهای قابل قبول باید یکی را به‌صورت تصادفی انتخاب کرد. بدین ترتیب، هیچ بازیگری از پیش حتی سیاست انتخابی خودش را هم نمی‌داند تا چه رس ست حریف.

بنابراین، یافتن روشی مناسب در مورد بازیهایی که نقطه زین‌اسبی ندارند ضرورت می‌یابد. در بخش بعدی روش یافتن جواب بهینه چنین بازیهایی را شرح می‌دهیم. برای تشریح مفاهیم مربوطه از گونه سوم مسئله انتخابات استفاده خواهیم کرد.

۳ ـ ۱۱ بازیهای با سیاستهای مختلط[2]

اگر در یک بازی نقطه زین‌اسبی وجود نداشته باشد، نظریه‌بازی به‌هر بازیگر توصیه می‌نماید که سیاستهای خود را براساس یک تابع توزیع احتمالی انتخاب نماید. برای بیان موضوع به‌زبان ریاضی، فرض کنید

x_i = احتمال آنکه بازیگر اول سیاست i را برگزیند، $(i = 1,2,\ldots,m)$

y_j = احتمال آنکه بازیگر دوم سیاست j را برگزیند، $(j = 1,2,\ldots,n)$

1) *Unstable* 2) *Mixed strategies*

که m و n بیانگر تعداد سیاستهای مربوطه هستند. بنابراین، بازیگر اول با تعیین مقادیر $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ برنامه بازی خود را مشخص می‌سازد. چون این مقادیر معرف احتمال هستند، پس باید غیرمنفی وجمعاً مساوی یک باشند. همین‌طور، برنامه بازیگر دوم نیز از طریق تعیین مقادیر متغیرهای تصمیم $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ مشخص می گردد. برنامه‌های $x_1, x_2, \ldots, x_m$ و $y_1, y_2, \ldots, y_n$ معمولاً به سیاستهای مختلط و سیاستهای اولیه قبلی به سیاستهای ساده[1] موسومند. هر بازیگر در جریان بازی باید یکی از سیاستهای ساده خود را انتخاب کند. این انتخاب با استفاده از نوعی ابزار کمکی، یعنی از تابع توزیع احتمالی که از طریق سیاست مختلط مشخص شده است صورت می گیرد. نتیجه این کار سیاست ساده‌ای که باید انتخاب شود را مشخص می‌نماید.

برای توضیح مطلب، فرض کنید که در گونهٔ سوم مسئله انتخابات (جدول ۵−۱۱)، بازیگران به‌ترتیب سیاستهای مختلط $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ و $(y_1, y_2, y_3) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ را انتخاب کنند. این بدان معنی است که بازیگر اول با احتمالی برابر $\frac{1}{2}$، هر یک از سیاستهای (ساده) ۱ و ۲ را انتخاب می کند، در حالی‌که سیاست ۳ را کلاً کنار می گذارد. به‌همین ترتیب، بازیگر دوم نیز به‌طور تصادفی یکی از سیاستهای ساده دوم یا سوم خود را بر می گزیند. برای این منظور، هر بازیگر سکه‌ای به‌هوا پرتاب می کند و بر اساس آن، یکی از دو سیاست قابل قبول خود را انتخاب می‌نماید.

هر چند هیچ معیار کاملاً رضایت بخشی برای ارزیابی سیاستهای مختلط وجود ندارد، اما شاید امیدریاضی بازده[2] از همه منطقی‌تر باشد. این معیار با استفاده از تعریف امید ریاضی به‌ترتیب زیر بیان می گردد.

$$\text{امید ریاضی بازده} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i y_j$$

1) *Pure Strategy* 2) *Expected Payoff*

که p_{ij} بازده بازیگر اول است در صورتی که او سیاست ساده i و بازیگر دوم سیاست ساده j را انتخاب کند. این معادله چیزی در مورد «ریسک‌بازی» بیان نمی کند بلکه صرفاً مقدار متوسط بازده را نشان می‌دهد، به شرط آنکه بازی بارها تکرار شود. بنابراین، در مثال بالا چهار بازده محتمل (۲−، ۲، ۴ و ۳−) هر کدام با احتمال $\frac{1}{4}$ وجود دارند، و بنابراین امید ریاضی بازده $= \frac{1}{4}(-2+2+4-3) = \frac{1}{4}$ است.

حال به‌جایی رسیده‌ایم که می‌توانیم مفهوم ضابطه حداقل‌حداکثر[1] را در مورد بازیهایی که فاقد نقطهٔ زین‌اسبی هستند و لذا به‌سیاستهای مختلط احتیاج دارند تعمیم دهیم. از این نقطه‌نظر، با ضابطه حداقل حداکثر، بازیگر باید سیاست مختلطی را انتخاب کند که حداقل امید ریاضی بازده او را حداکثر نماید، (یعنی حداکثر امید ریاضی زیان او را حداقل سازد). مقصود از حداقل امیدریاضی بازده، مقدار کمترین بازده مورد انتظاری است که از هر کدام از سیاستهای مختلط حاصل می‌شود. بنابراین، سیاست بهینه بازیگر اول طبق این ضابطه عبارت از آن سیاستی است که صرفنظر از این که بازیگر دوم چه سیاستی را انتخاب کند بیشترین امید ریاضی بازده او را ضمانت نماید. مقدار این «حداکثر حداقل» امید ریاضی بازده به کمترین مقداربازی[2] مرسوم است و با $\underline{v}$ مشخص می گردد. به‌همین ترتیب، سیاست بهینه بازیگر دوم آن است که تضمین نماید امید ریاضی زیان او، صرفنظر از این که بازیگر اول چه سیاستی داشته باشد، حداقل گردد. مقدار مربوط به‌امید ریاضی بازده بازیگر اول حدبالایی[3] بازی خوانده می‌شود و با $\bar{v}$ مشخص می گردد.

یادآوری می گردد که اگر فقط از سیاستهای خالص استفاده شود، بازیهایی که فاقد نقطه زین‌اسبی باشند به‌حالت پایدار نمی‌رسند، علت اصلی این موضوع، رابطه

1) *minimax* 2) *The Lower Value*

3) *The Upper Value*

$\underline{v} < \bar{v}$ است، زیرا بازیگران ترغیب می‌شوند که سیاست خود را برای رسیدن به‌وضعیت بهتری تغییر دهند. به‌همین ترتیب در بازیهای با سیاست مختلط نیز شرط رسیدن به جواب بهینه پایدار آن است که $\bar{v} = \underline{v}$ باشد. خوشبختانه، براساس قضیه‌حداقل‌حداکثر، این شرط در مورد چنین بازیهایی صدق می‌کند.

قضیه حداقل حداکثر چنانچه از سیاستهای مختلط استفاده شود، همواره مقدار ارزش بازی ثابت خواهد بود یعنی $\underline{v} = \bar{v} = v$ بنابراین اگر هر دو بازیگر از سیاست مختلطی استفاده کنند که بر طبق ضابطه حداقل‌حداکثر بهینه باشد، آنگاه امید ریاضی بازده آنها مساوی v خواهد بود، و هیچکدام نمی‌توانند با تغییر یکجانبه سیاست خود به‌وضعیت بهتری برسند. اثبات این قضیه در بخش ۵ - ۱۱ آمده است.

هر چند که مفهوم سیاستهای مختلط در شرایطی که بازی مرتب تکرار شود بدیهی به‌نظر می‌رسد، اما چنانچه بازی فقط یک‌بار انجام شود تا حدودی نیاز به‌تفسیر دارد. در چنین حالتی پیروی از یک سیاست‌مختلط به‌انتخاب و استفاده از یک سیاست ساده (که به‌طور تصادفی از یک توزیع‌احتمالی انتخاب می‌گردد) منجر می‌شود، بنابراین شاید منطقی‌تر به‌نظر برسد که از تصادفی بودن صرفنظر گردد و بهترین سیاست ساده انتخاب شود. لیکن، همانطور که در گونه‌سوم بخش قبلی نشان داده شد، یک بازیگر نباید اجازه دهد که حریفش بداند سیاست او چه خواهد بود (یعنی فرایند حل نظریه بازی نباید مشخص سازد که در حالات ناپایدار بودن بازی، کدام سیاست ساده به‌کارگرفته خواهد شد). تنها راه برای تضمین حفظ امید ریاضی بازده بهینه v این است که سیاست ساده به‌طور تصادفی از توزیع احتمالی سیاست مرکب بهینه انتخاب گردد.

تنها نکته‌ای که باقی می‌ماند این است که چگونه می‌توان سیاست مختلط بهینه هر بازیگر را مشخص ساخت. برای این کار چند راه وجود دارد. یکی از آنها روش ترسیمی است. این روش وقتی به‌کارگرفته می‌شود که بازیگر فقط دو سیاست ساده

(غیرمغلوب) را اتخاذ می‌کند. این روش در بخش بعدی مورد بحث قرار می‌گیرد. در مورد بازیهای بزرگتر، روش متداول، تبدیل مسئله به‌برنامه‌ریزی خطی و حل آن با روش سیمپلکس و با استفاده از کامپیوتر است. بخش ۵–۱۱ نیز به‌این مبحث اختصاص می‌یابد.

۴–۱۱ روش حل ترسیمی

یک بازی با سیاستهای مختلط را در نظر بگیرید به‌طوری که هر بازیگر پس از حذف سیاستهای مغلوب تنها دو سیاست ساده پیش رو داشته باشد. به‌طور مشخص، بازیگر اول را در نظر بگیرید. چون سیاستهای او به‌صورت (x_1, x_2) و $x_2 = 1 - x_1$ است، لذا کافی است که تنها مقدار بهینه x_1 مشخص شود. لیکن، به‌راحتی می‌توان به‌ازاء هر سیاست ساده‌ای امید ریاضی بازده را به‌صورت تابعی از x_1 ترسیم کرد. از این نمودار می‌توان برای تعیین نقطه‌ای که حداقل امید ریاضی بازده را حداکثر می‌سازد استفاده نمود. به کمک همین نمودار می‌توان سیاست مرکب حداقل کردن‌حداکثر حریف را نیز مشخص ساخت.

برای تشریح این رویه، گونه‌سوم مسئله انتخابات را در نظر بگیرید (به‌جدول ۵–۱۱ مراجعه شود) توجه کنید که سیاست ساده سوم بازیگر اول مقابل سیاست دوم او مغلوب است، از این‌رو، جدول بازده می‌تواند به‌صورت جدول ۶ - ۱۱ خلاصه شود.

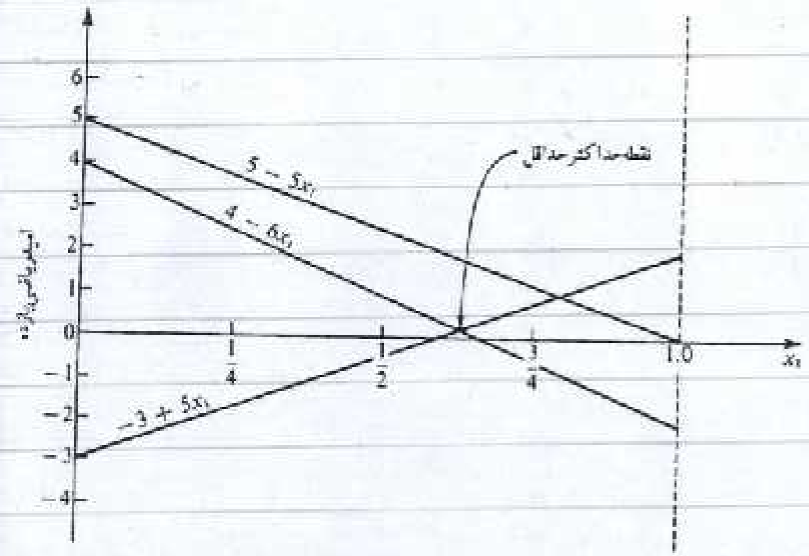
جدول ۶–۱۱ جدول ساده شده مسئله انتخابات ـ گونه سوم

احتمال	سیاست ساده	۱	۲	۳
x_1	۱	۰	−۲	۲
$1 - x_1$	۲	۵	۴	−۳

بنابراین، در مقابل هریک از سیاستهای موجود برای بازیگر دوم، امید ریاضی بازیگر اول به‌صورت زیر خواهد بود.

(y_1, y_2, y_3)	امیدریاضی بازده
$(1, 0, 0)$	$0x_1 + 5(1 - x_1) = 5 - 5x_1$
$(0, 1, 0)$	$-2x_1 + 4(1 - x_1) = 4 - 6x_1$
$(0, 0, 1)$	$2x_1 - 3(1 - x_1) = -3 + 5x_1$

حال این خطها که معرف امیدریاضی بازده است رادرنموداری‌نظیرشکل ۱−۱۱ رسم کنید. به‌ازاء هرمقدار x_1 و (y_1, y_2, y_3) امیدریاضی‌بازده‌به‌صورت‌متوسط وزنی



شکل ۱−۱۱ روش ترسیمی حل بازیها

نقاط مربوط بر روی این سه خط قابل محاسبه خواهد بود. به طور مشخص

$$\text{امید ریاضی بازده} = y_1(5 - 5x_1) + y_2(4 - 6x_1) + y_3(-3 + 5x_1)$$

بنابراین، به‌ازاء مقدار مشخص x_1 ، کمترین امید ریاضی بازده بر روی خط پایین بدست می‌آید. بر طبق ضابطه حداقل کردن حداکثر (یا حداکثر کردن حداقل)، بازیگر اول باید x_1 طوری انتخاب کند که بزرگترین مقدار مربوط به کمترین امید ریاضی بازده را داشته باشد، بنابراین

$$\underline{v} = v = \max_{0 \le x_1 \le 1} \{\min(-3 + 5x_1, 4 - 6x_1)\}.$$

از این‌رو، مقدار بهینه در محل تقاطع دو خط $(-3 + 5x_1)$ و $(4 - 6x_1)$ قرار دارد که از حل جبری آن

$$-3 + 5x_1 = 4 - 6x_1$$

مقدار $x_1 = \frac{7}{11}$ بدست می‌آید، یعنی سیاست‌بهینه بازیگر اول به‌صورت $(x_1, x_2) = (\frac{7}{11}, \frac{4}{11})$ خواهد بود، و ارزش بازی به‌ترتیب زیر بدست می‌آید

$$\underline{v} = v = -3 + 5\left(\frac{7}{11}\right) = \frac{2}{11}$$

برای پیدا کردن سیاست بهینه بازیگر دوم، می‌توان به این ترتیب استدلال کرد: بر طبق تعریف حدبالایی و همچنین قضیه حداقل حداکثر برای امید ریاضی بازده حاصل از سیاست $(y_1, y_2, y_3) = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ به‌ازاء کلیه مقادیر x_1 $(0 \le x_1 \le 1)$ شرایط زیر برقرار خواهد بود

$$y_1^*(5 - 5x_1) + y_2^*(4 - 6x_1) + y_3^*(-3 + 5x_1) \le \bar{v} = v = \frac{2}{11}$$

به‌علاوه، وقتی بازیگر اول بازی بهینه خود یعنی $x_1 = \frac{7}{11}$ را انجام دهد نامساوی نیز به‌تساوی تبدیل خواهد شد، یعنی

$$\frac{20}{11}y_1^* + \frac{2}{11}y_2^* + \frac{2}{11}y_3^* = v = \frac{2}{11}$$

چون (y_1, y_2, y_3) تابع توزیع احتمالی است، پس

بنابراین، باید $y_1^* = 0$ باشد، زیرا اگر $y_1^* > 0$ باشد، معادله ماقبل آخر برقرار نخواهد شد، یعنی، امید ریاضی بازده نمودار در بالاتر از نقطه حداکثر خواهد بود. (به‌طور کلی، به‌هر خطی که از نقطه حداکثر نگذرد باید وزن صفر تعلق گیرد تا از بیشتر شدن امید ریاضی بازده نسبت به‌نقطه حداکثر جلوگیری شود.) بنابراین

$$y_2^*(4 - 6x_1) + y_3^*(-3 + 5x_1)\begin{cases} \le \frac{2}{11}, & 0 \le x_1 \le 1 \text{ بازاء} \\ = \frac{2}{11}, & x_1 = \frac{7}{11} \text{ بازاء} \end{cases}$$

چون y_2^* و y_3^* اعداد مشخصی هستند، لذا سمت چپ معرف معادله خطی است که متوسط وزنی دو خط «پایین» نمودار است. چون مقدار سمت راست این خط در $x_1 = \frac{7}{11}$ باید برابر با $\frac{2}{11}$ باشد و به‌ازاء سایر مقادیر x_1 نباید از آن بیشتر شود، لذا این خط لزوماً افقی خواهد بود. (این نتیجه گیری همواره صادق است، مگر اینکه مقدار بهینه x_1 معادل صفر یا یک باشد، که در آن صورت بازیگر دوم هم باید از یک سیاست ساده منحصر به‌فرد استفاده نماید. بنابراین

$$y_2^*(4 - 6x_1) + y_3^*(-3 + 5x_1) = \frac{2}{11}, \qquad 0 \le x_1 \le 1 \text{ بازاء}$$

برای بدست آوردن مقادیر y_2^* و y_3^* دو مقدار برای x_1 اختیار کرده (فرضاً صفر و

یک) و دستگاه دو معادله حاصل را حل کنید

$$4y_2^* - 3y_3^* = \frac{2}{11}$$

$$-2y_2^* + 2y_3^* = \frac{2}{11}$$

بنابراین $y_2^* = \frac{5}{11}$ و $y_3^* = \frac{6}{11}$ است. از این‌رو، سیاست مختلط بهینه بازیگر دوم $(y_1, y_2, y_3) = (0, \frac{5}{11}, \frac{6}{11})$ خواهد بود.

هر گاه در مسئله‌ای بیش از دو خط از نقطه حداکثر حداقل بگذرد، و در نتیجه بیش از دو y_j^* بتوانند بزرگتر از صفر باشند، آنگاه، برای سیاست بهینه بازیگر دوم هم جوابهای متعددی وجود خواهد داشت. برای بدست آوردن یکی از این سیاستها کافی است که تمام y_j^* ها به‌استثنای دو تای آنها مساوی صفر قرار داده شود و مقدار آن دو محاسبه گردد.

هر چند روش ترسیمی برای مثال مشخصی تشریح گردید، اما همین منطق را می‌توان برای حل تمام بازیهای با سیاست مختلط که یکی از بازیگران آن دارای دو سیاست ساده غیر مغلوب باشد به کار گرفت.

۵-۱۱ حل از طریق برنامه‌ریزی خطی

هر بازی با سیاستهای مختلط را می‌توان به‌راحتی و از طریق تبدیل آن به‌یک مسئله برنامه‌ریزی خطی حل کرد. به‌طوری که خواهیم دید، این کار با استفاده از تعاریف حد پائینی و حد بالایی و قضیه حداقل حداکثر انجام می‌گیرد.

ابتدا ببینیم سیاست مختلط بهینه بازیگر اول چگونه مشخص می‌شود. همان طور که در بخش ۳-۱۱ گفته شد، امید ریاضی بازده و سیاست $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

وقتی بهینه است که به‌ازاء تمام سیاستهای حریف یعنی $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i y_j \ge v = v$$

در نتیجه، به‌عنوان مثال این نامساوی به‌ازاء تمام سیاستهای ساده بازیگر دوم که در آن، یکی از متغیرها مثلاً $y_j = 1$ و بقیه متغیرها برابر با صفر است برقرار خواهد بود. با جایگزینی این مقادیر در نامعادله فوق نتیجه می‌شود که:

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} x_i \ge v, \qquad j = 1, 2, \dots, n \text{ بازاء }$$

بنابراین، به کارگیری این n نامعادله خطی مانند آن است که نامعادله اصلی به‌ازاء تمام مقادیر (y_1, y_2, y_3) برقرار باشد. ضمناً با استفاده از نامعادلات فوق، می‌توان نامعادله اصلی را به‌شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{m} p_{ij} x_i \right) \ge \sum_{j=1}^{n} y_j v = v \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

بنابراین، به‌ازاء تمام سیاستهای $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ، دستگاه نامعادلات خطی فوق کاملاً معادل با نامعادله اصلی است. برای اطمینان از اینکه x_i ، ' بیانگر احتمالات هستند محدودیتهای برنامه‌ریزی خطی دیگری نیز اضافه می‌شوند.

بنابراین، هر جواب $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ که در کل مجموعه محدودیتهای برنامه‌ریزی خطی صدق نماید، معرف سیاست مختلط بهینه مورد نظر خواهد بود.

در نتیجه، برای تعیین سیاست بهینه مختلط کافی است که یک جواب موجه برای برنامه‌ریزی خطی پیدا کرده، حال تنها دو مسئله باقی می‌ماند و آن اینکه اولاً v مجهول است و ثانیاً این مسئله برنامه‌ریزی خطی تابع هدف ندارد. خوشبختانه، این دو مشکل را می‌توان یکجا و با جایگزینی مقدار ثابت مجهول v با متغیر x_{m+1} ، و سپس حداکثر کردن x_{m+1} برطرف نمود، بدین معنی که x_{m+1} بدون دخالت ما (بنابرتعریف) در جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی مساوی v

می گردد.

خلاصه کنیم، بازیگر اول در جریان حل مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر به‌سیاست حرکت بهینه خود خواهد رسید.

$$\text{Minimize} \quad (-x_{m+1})$$

$$\begin{aligned} p_{11}x_1 + p_{21}x_2 + \cdots + p_{m1}x_m - x_{m+1} &\ge 0 \\ p_{12}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{m2}x_m - x_{m+1} &\ge 0 \\ &\vdots \\ p_{1n}x_1 + p_{2n}x_2 + \cdots + p_{mn}x_m - x_{m+1} &\ge 0 \\ -(x_1 + x_2 + \cdots + x_m) &= -1 \end{aligned}$$

$$x_i \ge 0, \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, m$$

(تابع هدف و محدودیت تساوی به‌شکل فوق بازنویسی شده‌اند.) با بررسی دقیق این فرموله کردن با یک اشکال روبرو می‌شویم، بدین معنی که محدودیتی برای غیرمنفی بودن x_{m+1} وجود ندارد، اما این اشکال به‌آسانی و به‌صورتی که بعداً گفته می‌شود برطرف می گردد.

حال به‌بازیگر دوم بپردازیم، او برای بدست آوردن جواب بهینه مربوط به‌خودش جدول‌بازده رابه‌جای اینکه بر حسب بازیگر اول باشد بر حسب خودش بازنویسی می‌نماید، و سپس دقیقاً همان مسیری راکه در بالا گفته شد طی می کند. لیکن، بهتر است که فرموله کردن مسئله او را نیز بر پایه همان جدول بازده ابتدایی تشریح کنیم. با ادامه دادن راهی دقیقاً مشابه با آنچه که در بالا گفته شد، بازیگر دوم نیز نتیجه خواهد گرفت که سیاست مرکب بهینه او از جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی‌خطی زیر بدست می‌آید

$$\text{Maximize} \quad (-y_{n+1})$$

$$p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \cdots + p_{1n}y_n - y_{n+1} \le 0$$

$$p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + \cdots + p_{2n}y_n - y_{n+1} \le 0$$
$$\vdots$$
$$p_{m1}y_1 + p_{m2}y_2 + \cdots + p_{mn}y_n - y_{n+1} \le 0$$
$$-(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = -1$$

$$y_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$ بازاء

حال به‌این نکته توجه کنید که این مسئله برنامه‌ریزی خطی و آنچه که برای بازیگر اول نوشته شد، مطابق آنچه که در بخش ۵ - ۳ تشریح گردید ثانویه یکدیگرند. (به‌طور مشخص، این مسئله در قالب مسئله اولیه و مسئله بازیگر اول در قالب مسئله ثانویه است). این موضوع چند نتیجه دارد: یکی اینکه سیاست مختلط بهینه هر دو بازیگر را می‌توان تنها با حل یکی از مسایل برنامه‌ریزی خطی بدست آورد، زیرا در جریان حل مسئله اولیه با روش سیمپلکس، جواب بهینه مسئله ثانویه نیز خود به‌خود به‌دست می‌آید. دوم اینکه تمام نتایج نظریه دوگانگی را (به‌ترتیبی که در بخش ۵ - ۳ گفته شد) می‌توان برای تعبیر و تحلیل بازیها به‌خدمت گرفت. یکی از این نتایج، اثباتی بسیار ساده برای قضیه حداقل‌حداکثر است.

فرض کنید x^*_{m+1} و y^*_{n+1} نشان دهنده مقادیر بهینه x_{m+1} و y_{n+1} در جواب بهینه مسائل برنامه‌ریزی خطی مربوطه باشند. با عنایت به‌قضیه دوگانگی در بخش ۵–۳ (رابطه ٤) می‌دانیم که $x^*_{m+1} = y^*_{n+1}$ و در نتیجه $\underline{v} = \bar{v}$ است.

یک نکته باقیمانده این است که اگر x_{m+1} و y_{n+1} در فرموله کردن برنامه‌ریزی خطی در علامت آزاد باشند چه باید کرد. می‌دانیم در روش سیمپلکس باید تمام متغیرها غیرمنفی باشند. چنانچه معلوم باشد که $v \ge 0$ ، و در نتیجه مقدار بهینه x_{m+1} و y_{n+1} غیرمنفی است، می‌توان این متغیرها را غیرمنفی فرض نمود و به حل مسئله پرداخت. لیکن اگر $v < 0$ باشد باید تغییراتی در مسئله داده شود. یک راه حل این است که هر متغیر آزاد را با تفاضل دو متغیر غیرمنفی جایگزین کرد. راه حل دیگر تعویض جای بازیگران اول و دوم است. در این صورت، جدول بازده باید برای

بازیگر دوم بازنویسی شود. این کار موجب می‌شود تا v مربوطه مثبت گردد. راه سوم و متداول‌ترین راه این است که مقداری ثابت و به‌اندازه کافی بزرگ به‌تمام عناصر جدول اضافه گردد، به‌طوری که مقدار جدید بازی مثبت شود. (برای مثال، این مقدار ثابت می‌تواند برابر با منهای بزرگترین عنصر منفی باشد.) چون مقدار یکسانی به‌تمام عناصر اضافه می‌شود، لذا سیاست بهینه به‌هیچ وجه تغییر نمی‌کند. از این‌رو، می‌توان آن را با روش معمولی بدست آورد. هر چند ارزش بازی به‌اندازه این مقدار ثابت بزرگتر خواهد شد، اما پس از حل می‌توان آن را تصحیح نمود.

برای شرح این رویکرد برنامه‌ریزی خطی، مجدداً گونه ۳ مسئله انتخابات پس از حذف سیاست سوم بازیگر اول (جدول ٦ - ١١) را در نظر بگیرید. چون بعضی اقلام این جدول منفی هستند، لذا در ابتدا معلوم نیست که مقدار بازی v غیرمنفی باشد (معلوم خواهد شد که هست). فعلاً فرض کنید $v \ge 0$ باشد و بدون توجه به‌تغییراتی که در فراز بالا گفته شد به‌حل مسئله بپردازید. به‌منظور نوشتن مدل برنامه ریزی خطی برای بازیگر اول، فرض کنید که هر عنصر در سطر i و ستون j در جدول ٦ - ١١ با p_{ij} (به‌ازاء $i = 1, 2$ و $j = 1, 2, 3$) نشان داده شود. مدل حاصل، با هدف حداکثر کردن x_{m+1} به‌جای حداقل کردن $(-x_{m+1})$ با $m = 2$ و $n = 3$ ؛

$$\text{Maximize} \quad x_3$$

$$5x_2 - x_3 \ge 0$$
$$-2x_1 + 4x_2 - x_3 \ge 0$$
$$2x_1 - 3x_2 - x_3 \ge 0$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$$

با اجرای روش سیمپلکس، جواب بهینه این مدل برنامه ریزی خطی به صورت

$x_1^* = \frac{7}{11},\ x_2^* = \frac{4}{11},\ x_3^* = \frac{2}{11}$ خواهدشد(به‌مسائل ۱۵ و ۱۶ مراجعه کنید.) در نتیجه، سیاست بهینه بازیگر اول بر طبق ضابطه حداقل کردن‌حداکثر به‌صورت $(x_1, x_2) = (\frac{7}{11}, \frac{4}{11})$ و مقدار بازی $v = x_3^* = \frac{2}{11}$ خواهد بود. روش سیمپلکس همچنین جواب بهینه مسئله ثانویه (که بعداً فرموله می‌شود) را به‌صورت $y_1^* = 0,\ y_2^* = \frac{5}{11},\ y_3^* = \frac{6}{11},\ y_4^* = \frac{2}{11}$ ارائه می‌دهد، لذا سیاست مختلط بهینه بازیگر دوم $(y_1, y_2, y_3) = (0, \frac{5}{11}, \frac{6}{11})$ است.

مسئله ثانویه این‌مسئله دقیقاً مدل برنامه‌ریزی بازیگر دوم (با متغیرهای $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ است که قبلاً در این بخش نشان داده شد. با وارد کردن مقادیر p_{ij} از جدول ۶ - ۱۱، این مدل (درشکل حداقل کردن) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Minimize} \quad y_4,$$

$$\begin{aligned} -2y_2 + 2y_3 - y_4 &\le 0 \\ 5y_1 + 4y_2 - 3y_3 - y_4 &\le 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 \quad &= 1, \end{aligned}$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0, \quad y_4 \ge 0$$

چنانچه روش سیمپلکس مستقیماً در مورد این مسئله به کارگرفته شرد به‌جواب بهینه $y_1^* = 0, y_2^* = \frac{5}{11}, y_3^* = \frac{6}{11}, y_4^* = \frac{2}{11}$ (و همچنین طور جواب بهینه ثانویه) $x_1^* = \frac{7}{11}, x_2^* = \frac{4}{11}, x_3^* = \frac{2}{11}$ خواهیم رسید. بنابراین، سیاست مرکب بهینه بازیگر دوم به‌صورت $(y_1, y_2, y_3) = (0, \frac{5}{11}, \frac{6}{11})$، وارزش‌بازی‌مجدداً برابر با $v = y_4^* = \frac{2}{11}$ خواهد بود.

از آنجاکه سیاست مختلط بازیگر دوم را در جریان حل مدل اول بدست آورده بودیم لذا به‌حل دومی احتیاجی نبود. بطور کلی، همواره می‌توان سیاستهای بهینه هر دو بازیگر را با انتخاب فقط یکی از مدلها (هرکدام) و استفاده از روش سیمپلکس و بدست آوردن جواب بهینه ثانویه مشخص ساخت.

در هر دو این مدلهای برنامه‌ریزی خطی فرض بر $v \ge 0$ بود. چنانچه این

فرض برقرار نباشد، دیگر هیچکدام از مدلها جواب موجه ندارند، بنابراین، روش سیمپلکس با اعلام این واقعیت متوقف می گردد، برای گریز از این بن‌بست، می‌توانیم یک مقدار ثابت مثبت، مثلاً ۳ (قدرمطلق بزرگترین عنصرمنفی) را به‌تمام عناصر جدول ۶ —۱۱ اضافه کنیم. بدین ترتیب، ضرایب x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 در تمام نامعادلات هر دو مدل همگی بمقدار ۳ واحد افزایش می‌یابند (به‌مسئله ۱۲ مراجعه‌شود).

۶—۱۱ تعمیم

هر چند که در این فصل تنها بازیهای دونفری جمع صفر با تعداد محدودی سیاستهای ساده بررسی شدند، لیکن نباید تصور کرد که نظریه‌بازی تنها به‌این نوع بازیها محدود می‌شود. در حقیقت، پژوهشهای دامنه‌داری پیرامون انواع بازیهای پیچیده‌تر صورت گرفته است، که به‌یکی از آنها در زیر به‌اختصار اشاره می‌کنیم.

یکی از این انواع پیچیده‌تر، بازی n نفری است که در آن بیش از دو بازیگر شرکت دارند. اهمیت این تعمیم به‌واسطهٔ وجود موقعیتهای زیادی مثل رقابت بنگاههای تجارتی، روابط خارجی، و غیره است که در آن بیش از دو حریف با یکدیگر در تقابلند. متاسفانه، مفاهیم نظری موجود براین گونه بازی‌ها در سطحی پایینتر از بازیهای دونفری است.

تعمیم دیگر، بازیهای غیرجمع‌صفر است، که در آن حاصل جمع بازده بازیگران لزوماً مساوی صفر (یا یک عدد ثابت) نیست. به‌این معنی که بسیاری از رقابتها در بطن خود عوامل غیر رقابتی دارند که می‌تواند به‌سود بردن همه یا زیان دیدن همهٔ طرفهای بازی بیانجامد. برای مثال، سیاست تبلیغاتی بنگاههای رقیب می‌تواند نه تنها بر روی سهم آنها در بازار بلکه بر روی کل حجم بازار محصول تولیدی تاثیر بگذارد. چون همه طرفها سود می‌برند، لذا بازیهای غیر جمع صفر بر حسب درجه‌ای که هر یک از بازیگران اجازه دارند در آن شرکت کنند نیز دسته‌بندی می‌شود. در یک منتهی الیه

این طیف، بازیهای توافق‌ناپذیر[1] قرار دارند که در آنها بین بازیگران هیچ مراوده یا توافقی قبل از بازی وجود ندارد. در منتهی‌الیه دیگر، بازیهای توافق‌پذیر[2] قرار دارند، که مذاکره و توافقها قبل از انجام بازی صورت می‌گیرد. برای مثال، مقررات بین کشورها برای معاملات خارجی؛ یا مذاکرات بین کارگران و مدیران را می‌توان در قالب بازیهای توافق‌پذیر فرموله کرد. در بازیهای توافق‌پذیر چنانچه بیش از دو بازیگر وجود داشته باشد، بعضی یا تمام آنها می‌توانند ائتلاف کنند.

یک تعمیم دیگر نیز بازیهای نامحدود است، که تعداد سیاستهای ساده هر بازیگر نامحدود است. این بازیها برای موقعیتهایی طراحی شده‌اند که بتوان سیاستها را به‌صورت یک متغیر تصمیم پیوسته تعریف نمود. برای مثال، این متغیر تصمیم ممکن است معرف زمان انجام یک عمل مشخص، یا نسبتی از منابع موجود که به فعالیت خاصی تخصیص می‌یابد باشد. در سالهای اخیر تحقیقات زیادی در این زمینه صورت گرفته است.

با این همه، تحلیل حالتهایی که ورای بازیهای دو نفری جمع‌صفر و محدود باشند نسبتاً پیچیده است و در این فصل بررسی نمی‌شود.

۷-۱۱ نتیجه

فرایند تصمیم‌گیری در محیطهای رقابتی مسئله‌ای مهم و متداول است. دستاوردهای نظریهٔ بازی را می‌توان در فراهم آوردن مفاهیم اساسی و چارچوب نظری برای فرموله‌کردن و تحلیل این نوع بازیها در شرایط ساده مختصر نمود. لیکن، فاصله شگرفی بین سادگی این مفاهیم نظری و پیچیدگی دنیای واقعی وجود دارد. به‌واسطه این تفاوت، مفاهیم نظریهٔ بازیها بیشتر نقش مددکار و هدایت کننده در کار بر روی مسائل واقعی را دارند.

1) Noncooperative Games 2) Cooperative Games

به‌واسطه اهمیت و عمومیت این مسائل، تحقیقات دامنه‌داری در راه شمول مفاهیم نظری بازیها بر وضعیتهای پیچیده واقعی در دست انجام است.

مسائل

۱ – سیاست بهینه هر یک از بازیگران جداول بازده زیر را از طریق حذف متوالی سیاستهای مغلوب تعیین کنید (ترتیب حذف را بنویسید).

(الف)

		II	
	۱	۲	۳
I ۱	−۳	۱	۲
۲	۱	۲	۱
۳	۱	۰	−۲

(ب)

		II	
	۱	۲	۳
I ۱	۰	۴	۱
۲	−۱	−۲	۳
۳	۱	۳	۲

۲ – یک بازی را در نظر بگیرید که جدول بازده آن به‌شرح زیر باشد.

		II		
	۱	۲	۳	۴
I ۱	۲	−۲	۱	−۱
۲	۳	−۱	۲	−۱
۳	۱	−۱	−۳	۲

سیاست بهینه هر یک از بازیگران را از طریق حذف متوالی سیاستهای مغلوب تعیین کنید. فهرست سیاستهای مغلوب (و سیاستهای غالب مربوطه) را به‌ترتیب حذف بنویسید.

۳ – نقطه زین‌اسبی بازی زیر را بدست آورید.

		II		
	۱	۲	۳	۴
I ۱	۲	−۲	−۴	−۸
۲	۰	۴	−۲	۲
۳	−۸	−۴	−۶	۶

۴ – بازار محصولی در اختیار دو شرکت است. این دو شرکت برنامه بازاریابی سال آینده خود را در دست تهیه دارند و سعی می‌کنند تا سهمی از بازار طرف مقابل را از آن خود کنند (مجموع فروش محصول تقریباً ثابت است، لذا افزایش فروش هر شرکت تنها از طریق کاهش فروش شرکت دیگر امکان‌پذیر است). هر شرکت برای نیل به‌این مقصود سه راه پیش رو دارد.

۱ - بهبود بسته‌بندی محصول
۲ - افزایش تبلیغات
۳ - کاهش قیمت محصول

هزینه اجرای هر سه راه حل تقریباً با یکدیگر برابر و به‌اندازه کافی زیاد است، به‌طوری که بودجه بازاریابی هر شرکت تنها کفاف پیاده کردن یکی از سه راه حل را می‌دهد. اثرات انتخاب هر یک از راه حلها توسط هر شرکت برحسب در صد افزایش فروش شرکت I در جدول زیر نشان داده شده است.

II

	۱	۲	۳
۱	−۱	۳	۰
۲ I	−۲	−۳	۲
۳		۲	۱

هر شرکت سیاست خود را قبل از اطلاع از سیاست شرکت مقابل اتخاذ می‌نماید.

الف – بدون حذف سیاستهای مغلوب و با استفاده از ضابطه حداقل حداکثر (یاحداکثرحداقل) سیاست بهینه هر شرکت را مشخص کنید.

ب – حال سیاستهای مغلوب را تا آنجاکه ممکن است مشخص و حذف کنید. فهرست سیاستهای مغلوب را به‌ترتیب حذف آنها بنویسید. سرانجام، جدول بازده‌که دیگر در آن سیاست مغلوبی وجود ندارد را نشان دهید.

۵ ـ مذاکرات اتحادیه کارگران و مدیریت شرکتی در مورد تعیین میزان افزایش حقوق کارگران به‌بن‌بست رسیده است، لذا حکم مرضی‌الطرفینی برای حل این مسئله انتخاب گردیده است. مدیریت تنها حاضر است حقوق کارگران را ساعتی ۱/۲ دلار افزایش دهد در حالی که کارگران درخواست افزایشی معادل ۱/۷ دلار دارند.

حکم از دو طرف خواسته است تا آخرین پیشنهاد منطقی خود را (با تقریب ۰/۱ دلار) محرمانه ارائه نمایند. تجارب گذشته نشان می‌دهد که این حکم همواره پیشنهاد طرفی را می‌پذیرد که بیشتر از طرف مقابل از رقم قبلی خود فاصله گرفته باشد. چنانچه هیچکدام از طرفین در پیشنهاد قبلی خود تغییری ندهد و یا به تعداد مساوی از خواسته قبلی خود فاصله بگیرند، آنگاه حکم نقطه وسط (یعنی ۱/۴۵ دلار) را تعیین می‌کند. اکنون هر کدام از دو طرف می‌خواهد تعیین کند که چه مقدار افزایش حقوق پیشنهاد کند تا بیشترین منفعت را ببرد.

الف – این مسئله را به صورت یک بازی دو نفری ـ جمع صفر فرموله کنید.

ب – بهترین سیاست هر طرف را با استفاده از مفهوم سیاست مغلوب مشخص

ج – بدون حذف سیاستهای مغلوب و با استفاده از ضابطهٔ حداقل حداکثر، سیاست بهینه طرفین را مشخص کنید.

۶– دو سیاستمدار، بزودی مبارزات خود را برای پیروزی در انتخابات آغاز می‌کنند. هر کدام از این دو باید موضوعی را به عنوان مسئله اصلی جامعه مطرح و در طول انتخابات بر روی آن متمرکز کند. هر سیاستمدار سه موضوع در پیش رو دارد که می‌تواند به یکی از آنها بپردازد، لیکن نتایج حاصل از آن بستگی به موضوعی دارد که طرف مقابل انتخاب می‌کند. به طور مشخص، در اثر انتخاب هر ترکیبی از موضوعها توسط دوطرف،افزایش رأی‌سیاستمدار I (برحسب درصد کل آراء) درجدول زیر آمده است.

II

	۱	۲	۳
۱	۷	−۱	۳
۲ I	۱	۰	۲
۳	−۵	−۳	۱

لیکن، چون بررسی و اطلاع از سیاست طرف مقابل مستلزم هزینه‌های زیادی است، لذا هر سیاستمدار باید سیاست خود را قبل از اطلاع از سیاست طرف مقابل انتخاب کند.

در مورد هر کدام از حالتهای زیر، این مسئله را به صورت یک بازی دونفری – جمع صفر فورموله کنید. سپس، با در نظر گرفتن ضوابط تعیین شده، مشخص نمائید که هر سیاستمدار باید به چه موضوعی بپردازد؟

الف – چون تعداد آرائی که هر طرف خواهد آورد اصلاً معلوم نیست، لذا ارزش هر رأی اضافی دقیقاً مساوی است. از ضابطه حداقل حداکثر استفاده کنید.

ب – یک بنگاه معتبر نظرسنجی پیش‌بینی کرده است که تعداد آراء

سیاستمدار اول (قبل از مبارزه انتخاباتی و تعیین موضوع) بین ٤۵ تا ۵۰ درصد و تابع توزیع آن یکنواخت است، با شروع از سیاستهای سیاستمدار I ، و مفهوم سیاست مغلوب، مسئله را حل کنید.

ج– فرض کنید درصد مطرح شده در بند (ب) دقیقاً ٤۵ درصد باشد. آیا سیاستمدار اول باید از ضابطه حداقل حداکثر استفاده کند؟ شرح دهید. پرداختن به چه موضوعی را به او توصیه می‌کنید؟ چرا؟

۷– دو تولید کننده که رقیب یکدیگر هستند هر کدام دو محصول تولید می‌کنند. سود هر دو محصول برابر است. میزان فروش تولید کننده دوم در مورد هر دو محصول، سه برابر تولید کننده اولی است. در حال حاضر، هر دو تولید کننده می‌خواهند همگام با پیشرفتهای فنی، اصلاحات اساسی در محصولات خود انجام دهند. لیکن، برای آنها روشن نیست که در مورد اصلاح و بازاریابی چه سیاستی را باید انتخاب کنند.

اصلاح همزمان هر دو محصول برای هر کدام از تولید کنندگان به ۱۲ ماه وقت نیاز دارد. راه دیگر این است که با یک برنامه ضربتی ابتدا یک محصول را اصلاح کرد تا به این ترتیب سعی شود که قبل از رقیب، محصول اصلاح شده را به بازار فرستاد. در این صورت، اصلاح یک محصول برای تولید کننده دوم ۹ ماه و برای تولید کننده اول ۱۰ ماه طول می‌کشد (زیرا تولید کننده اول در حاضر تعهدات دیگری نیز دارد). اصلاح دومین محصول برای هر دو تولید کننده ۹ ماه طول می‌کشد.

چنانچه هر دو تولید کننده محصولات اصلاح شده خود را همزمان به بازار عرضه کنند، پیش‌بینی می‌شود که سهم تولید کننده اول در بازار ۸ درصد افزایش یابد (یعنی از ۲۵ درصد فعلی به ۳۳ درصد می‌رسد). به همین ترتیب، اگر تولید کننده اول بتواند محصول اصلاح شده خود را ۲، ۶ یا ۸ ماه زودتر از رقیب به بازار عرضه کند سهم او در کل بازار به ترتیب ۲۰، ۳۰ و ٤۰ درصد افزایش می‌یابد. از طرف دیگر اگر این تولید کننده ۱، ۳، ۷ یا ۱۰ ماه دیرتر از رقیب محصولی را وارد بازار کنند سهم او در کل بازار به ترتیب ٤، ۱۰، ۱۲ و ۱٤ درصد کاهش می‌یابد.

این مسئله را به صورت یک بازی دونفری جمع صفر فرموله کنید. در چارچوب ضابطه حداقل حداکثر، هر تولید کننده باید چه سیاستی‌را انتخاب کند؟

۸– بازی زیر که توسط دو بازیگر انجام می‌شود را در نظر بگیرید. هر بازیگر با سه مهره قرمز، سفید و آبی شروع می‌کند. از هر مهره فقط یک بار می‌توان استفاده کرد.

برای شروع، هر بازیگر یکی از مهره‌های خود را روی میز می‌گذارد و روی آنرا می‌پوشاند. سپس آنها مهره‌های خود را نشان می‌دهند. چنانچه رنگ مهره‌های هر دو یکی باشد، مساوی هستند. در غیر این صورت یکی برنده و میزان برد او در جدول زیر آمده است. سپس، هر بازیگر مهره دوم خود را بازی می‌کند و برد و باخت نیز بر اساس همین جدول تعیین می‌شود. بالاخره نوبت به مهره سوم می‌رسد و به همین ترتیب عمل می‌گردد

مهره برنده	میزان برد
قرمز از سفید می‌برد	۲۰
سفید از آبی می‌برد	۱۵
آبی از قرمز می‌برد	۱۰
رنگ یکسان	صفر

این مسئله را به صورت یک بازی دونفری جمع صفر فرموله کنید. سیاستها و جدول بازده را مشخص کنید.

۹– جدول بازده زیر را در نظر بگیرید.

		II: ۱	II: ۲
I	۱	−۱	٤
	۲	۳	−۱

با استفاده از روش ترسیمی که در بخش ٤–۱۱ تشریح شد، ارزش بازی و سیاست مختلط بهینه هر بازیگر را درچارچوب ضابطه حداقل حداکثر مشخص کنید. صحت جواب بدست آمده را از طریق حلّ مسئله برای بازیگر دوم بررسی کنید. برای این منظور جدول بازده این بازیگر را تهیه کرده و روش ترسیمی را برای حل آن به کار بگیرید.

۱۰– در مورد هرکدام از جداول بازده زیر، ارزش بازی و سیاست مختلط هر بازیگر را درقالب ضابطه حداقل حداکثر وبا استفاده از روش ترسیمی تعیین نمائید.

(الف)

I \ II	۱	۲	۳
۱	٤	۳	۱
۲	۰	۱	۲

(ب)

I \ II	۱	۲	۳
۱	٤	۱−	٦
۲	۲−	۷	۱−
۳	۲	۰	۳
٤	۱	۵	۳

۱۱– بازی دونفری زیر را در نظر بگیرید. در آغاز، داور یک سکه را پرتاب و نتیجه آنرا یادداشت می‌کند ضمناً به بازیگر اول نیز نشان می‌دهد. بازیگر اول دو راه در پیش دارد ۱) صرفنظر کند و ۵ دلار به دومی بپردازد ۲) شرط ببندد. چنانچه صرفنظر کند بازی تمام است. اگر شرط بندی کند بازی ادامه می‌یابد. بازیگر دوم نیز دو راه در پیش خواهد داشت ۱) صرفنظر کند و ۵ دلار به اولی بپردازد ۲) درخواست اعلام نتیجه کند، که در این صورت داور نتیجه پرتاب را اعلام می‌کند. چنانچه شیر باشد بازیگر دوم ۱۰ دلار به بازیگر اول و اگر خط باشد بازیگر اول همین مقدار به بازیگر دوم می‌پردازد.

الف– سیاستهای ساده هر بازیگر را مشخص کنید. (راهنمائی: بازیگر اول چهار سیاست ساده را می‌تواند انتخاب کند. هر سیاست عکس‌العمل او نسبت به دو نتیجه‌ای است که داور به او نشان می‌دهد. بازیگر دوم دوسیاست ساده دارد و هر کدام مشخص می‌کند که در مقابل شرط بندی بازیگر اول چگونه عمل می‌نماید).

ب– جدول بازده این بازی را تهیه کنید. هرکجا لازم باشد از امید ریاضی استفاده نمائید. آیا این بازی نقطه زین اسبی دارد یا نه؟

ج– سیاست مختلط بهینه هر بازیگر را در چارچوب ضابطهٔ حداقل حداکثر و همچنین ارزش بازی را با استفاده از روش ترسیمی تعیین نمائید.

۱۲– فرض کنید به همه عناصر جدول بازده مربوط به آخرین نمودار بخش ۵–۱۱ سه واحد اضافه شود تا اطمینان حاصل گردد که مدل ریاضی برنامه‌ریزی خطی مربوطه دارای جواب موجه برای هر دو بازیگر، یعنی $x_j \geq 0$ ، $y_i \geq 0$ است. این دو مدل را بنویسید. جوابهای بهینه این دو مدل را با استفاده از اطلاعات بخش ۵–۱۱ بدست آورید. چه رابطه‌ای بین x_j^* و y_i^* وجود دارد. رابطهٔ بین ارزش بازی v و مقادیر x_0^* و y_0^* چیست؟

۱۳– بازی زیر را در نظر بگیرید.

I \ II	۱	۲	۳	٤
۱	۵	۰	۳	۱
۲	۲	٤	۳	۲
۳	۳	۲	۰	٤

با استفاده از روشی که در بخش ۵–۱۱ تشریح شد مسئله را حل کنید و سیاستهای مختلط بهینه را در چارچوب ضابطه حداقل حداکثر و با استفاده از برنامه‌ریزی خطی بدست آورید.

۱۴– برای هر یک از جداول بازده زیر، مسئله پیدا کردن سیاستهای مختلط حداقل حداکثر را به مسئله برنامه‌ریزی خطی معادل آن تبدیل کنید.

(الف)

I \ II	۱	۲	۳
۱	۲	−۳	۱
۲	−۱	۲	−۲
۳	۱	−٤	۳

(ب)

I \ II	۱	۲	۳	٤	۵
۱	−۲	−٤	۱	−۱	۳
۲	−۳	۱	−۲	−۵	−۱
۳	۱	−۳	۰	۲	−٤
٤	−۱	۲	−۳	۱	۲

۱۵– گونه سوم مسئله انتخابات (جدول ۶–۱۱) را در نظر بگیرید. به مدل برنامه‌ریزی خطی آن که در اواخر بخش ۵–۱۱، برای بازیگر اول ارائه شد مراجعه نمائید. بدون در نظر گرفتن متغیر x_3 مربوط به تابع هدف، منطقه موجه متغیرهای x_1 و x_2 را رسم کنید (راهنمائی: این منطقه موجه یک پاره‌خط است). سپس، یک عبارت جبری بنویسید که (x_3) را روی منطقه موجه حداکثر کند. سرانجام با استفاده از این عبارت جبری ثابت کنید جواب بهینه همان است که در بخش ۵–۱۱ نشان داده شد.

۱۶– مدل برنامه‌ریزی خطی بازیگر اول در مسئله انتخابات، گونه سوم (جدول ۶–۱۱) را درنظر بگیرید. با استفاده از روش سیمپلکس جواب بهینه این مدل و ثانویه آن را تعیین کنید. نشان دهید که سیاستهای مختلط بهینه هر دو بازیگر همان است که در بخش ۵–۱۱ بدست آمد.

۱۷– دو تیم شنای یک و دو دیدار مهمی در پیش دارند. هر تیم دارای یک ستاره است که به ترتیب «جان» و «مارک» نام دارند و می‌توانند با قدرت کامل در هر یک از سه شنای پروانه، پشت و کرال به رقابت بپردازند. لیکن، طبق مقررات هیچ شناگری نمی‌تواند در بیش از دو رشته شرکت کند. بنابراین، هر مربی مایل است بداند ستاره خود را در چه رشته‌هائی شرکت دهد تا بالاترین امتیاز را کسب کند. حداکثر سه نفر از هر تیم می‌توانند در هر رشته شرکت کنند. جدول زیر بهترین رکوردهای این ستاره‌ها و همچنین دو نفر شناگر دیگر از هر تیم را نشان می‌دهد. (در هر مسابقه که جان یا مارک شرکت نکند، شناگر دیگری که جای آنها را خواهد گرفت رکوردش بدتر از دو شناگری است که در جدول منظور شده‌اند).

	تیم یک			تیم دو		
	شناگر			شناگر		
رشته	۱	۲	جان	مارک	۱	۲
پروانه	۱:۰۱/۶	۵۹/۱	۵۷/۵	۵۸/٤	۱:۰۳/۲	۵۹/۸
پشت	۱:۰۶/۸	۱:۰۵/۶	۱:۰۳/۳	۱:۰۲/۶	۱:۰٤/۶	۱:۰٤/۱
کرال	۱:۱۳/۶	۱:۱۲/۵	۱:۰٤/۷	۱:۰۶/۱	۱:۱۵/۳	۱:۱۱/۸

به مقام اول هر رشته ۵ امتیاز، به دوم سه امتیاز و به سوم یک امتیاز تعلق می‌گیرد. مقامهای پائین‌تر امتیازی ندارند. هر دو مربی معتقدند که شناگران آنها رکوردهای سابق خودرا در این دیدار تکرار خواهند کرد. بنابراین، هر دو ستاره قطعاً در دو مسابقه شرکت خواهند کرد.

الف– مربیان دو تیم باید اسامی شناگران خود را قبل از شروع دیدار و بدون اطلاع از اعضای تیم مقابل به کمیته برگزارکننده تحویل دهند، امکان تغییر اعضای تیم هم وجود ندارد. چون نتیجه دیدار کاملاً نامعین است، لذا هر امتیاز اضافی ارزش یکسانی برای هرمربی دارد. این مسئله را به صورت یک بازی دونفری جمع صفر فرموله کنید. پس از حذف سیاستهای مغلوب، سیاست مختلط بهینه هر تیم را در چارچوب ضابطه حداقل حداکثر و با روش ترسیمی تعیین کنید.

ب– همه شرایط مثل فرض الف است با این تفاوت که هر دو مربی معتقدند که تیم یک در صورتی برنده می‌شود که حداقل ۱۳ امتیاز کسب کند، ولی اگر امتیازاتش کمتر از ۱۳ باشد بازنده خواهد بود. سیاستهای مختلط بهینه این حالت را با حالت قبلی مقایسه کنید

ج– اکنون فرض کنید که مربیان اسامی شناگران هر رشته را قبل از انجام مسابقه همان رشته به کمیته بدهند. در موقع ارائه اسامی، مربی نمی‌داند که شناگران تیم مقابل برای این رشته چه کسانی هستند، اما می‌داند که چه کسانی در مسابقه‌های قبلی شرکت کرده‌اند. سه رشته مسابقه به همان ترتیبی که در جدول نوشته شده است انجام می‌شوند. در اینجا هم تیم یک در صورتی برنده است که از سه مسابقه حداقل ۱۳ امتیاز کسب کند. این مسئله را به صورت یک بازی دونفری جمع صفر فرموله کنید. سپس، با استفاده از مفهوم سیاست مغلوب، بهترین سیاست تیم دو را مشخص کنید، به طوری که تضمین نماید تحت شرایط مورد بحث برنده این دیدار خواهد بود.

د– همه شرایط مثل فرض ب است. با این تفاوت که مربی تیم دو از نظریه بازی چیزی نمی‌داند. لذا، ممکن است هر نوع سیاستی را انتخاب کند. با به کارگیری مفهوم سیاست مغلوب، مجموعه سیاستهایی را مشخص کنید که مربی تیم یک باید سیاست خود را از بین آنها انتخاب نماید. چنانچه این مربی بداند که تیم دیگر غالباً ستاره خود را معمولاً در رشته‌های پروانه و پشت شرکت می‌دهد، آنگاه چه سیاستی را باید انتخاب کند.

۱۸– حالت کلی بازی دونفری جمع صفر $m \times n$ را در نظر بگیرید. فرض

کنید اگر بازیگر اول سیاست i (بازاء $i = 1,\dots,m$) و بازیگر دوم سیاست J (بازاء $J = 1,\dots,n$) را انتخاب کند میزان پرداخت بازیگر دوم به اول برابر با p_{ij} باشد. در مورد سیاستمدار ۱ اصطلاحاً گفته می‌شود که سیاست یک او نسبت به سیاست دو او مغلوب ضعیف[1] است اگر بازاء $J = 1,\dots,n$ رابطه $p_{1j} \leq p_{2j}$ برقرار باشد اما بازاء بعضی از مقادیر J رابطه $p_{1j} = p_{2j}$ صدق نماید.

الف– فرض کنید جدول بازده دارای یک یا چند نقطه زین اسبی باشد. لذا، تحت ضابطه حداقل حداکثر، بازیگران سیاستهای خالص بهینه خواهند داشت. ثابت کنید حذف سیاستهای مغلوب ضعیف نه تمام این نقاط زین اسبی را حذف و نه هیچ نقطه زین اسبی جدیدی ایجاد می‌کند.

ب– فرض کنید که جدول بازده هیچ نقطه زین اسبی نداشته باشد. لذا، سیاستهای بهینه نیز تحت ضابطه حداقل حداکثر از نوع سیاستهای مختلط خواهند بود. ثابت کنید حذف سیاستهای ساده از نوع مغلوب ضعیف، سیاستهای مختلط بهینه را حذف نخواهد کرد و نمی‌تواند هیچ سیاست جدیدی به آنها بیافزاید.

۱۹– مزایا و معایب ضابطه حداقل حداکثر را به اختصار شرح دهید.

1) *Weakly Dominated*