فصل دوم

فضاهای توپولوژیک

پیشگفتار

در این فصل ابتدا تعریف فضاهای توپولوژیک که مطالعهٔ توپولوژی با آن آغاز می‌شود با ذکر مثالهای متعددی آورده می‌شود. سپس مفاهیم پایه و زیر پایه معرفی می‌شوند. با استفاده از این مفاهیم، نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان یک توپولوژی را در مجموعه‌ای مفروض با زیرمجموعه‌هایی خاص از آن مجموعه (موسوم به پایه و زیرپایه) ساخت. همچنین توضیح داده خواهد شد که چگونه می‌توان دو توپولوژی در یک مجموعه را با مفروض بودن پایه‌های آنها با یکدیگر مقایسه کرد. بالاخره این فصل با بحث مربوط به داخل، خارج، و مرز یک مجموعه در یک فضا با ذکر مثالها و نتیجه‌های اساسی پایان می‌یابد.

هدف کلی

در این فصل دانشجویان با مفهوم فضای توپولوژیک و خواص اساسی آن آشنا می‌شوند و یاد می‌گیرند چگونه می‌توان با استفاده از مفهومهای پایه و زیرپایه توپولوژیهایی در یک مجموعه ساخت.

هدفهای آموزشی

دانشجویان پس از خواندن این فصل،

۱) تعریف دقیق یک توپولوژی در مجموعه‌ای مفروض، و تعریف مجموعه‌های باز و بستهٔ یک فضا را یاد می‌گیرند.

۲) با مفاهیم زیرپایه و پایه برای یک توپولوژی آشنا می‌شوند و با استفاده از این مفاهیم می‌توانند یک توپولوژی را در مجموعه‌ای با مفروض بودن زیرمجموعه‌هایی خاص از آن مجموعه بسازند، ضمناً ثابت کنند که با مفروض بودن یک توپولوژی زیرمجموعه‌ای خاص از آن یک پایه یا زیرپایه برای آن فضای توپولوژیک است.

۳) با تعریف ظریفتر بودنِ یک توپولوژی در مجموعه‌ای از یک توپولوژی دیگر در همان مجموعه آشنا می‌شوند و یاد می‌گیرند چگونه می‌توان دو توپولوژی در مجموعه‌ای مفروض را با استفاده از پایه‌های آنها مقایسه کرد.

۴) با مفاهیم داخل و بستار یک زیرمجموعه از یک فضا آشنا می‌شوند و برحسب این مفاهیم باز و بسته بودن یک مجموعه از یک فضا را بیان می‌کنند و ارتباط بین این مفاهیم را یاد می‌گیرند. ضمناً می‌توانند با استفاده از تعریف نقطهٔ انباشتگی شرط لازم و کافی برای بسته بودن یک مجموعه در فضایی را بیان کنند. بالاخره می‌آموزند تا خارج و نقطه‌های مرزی یک مجموعه را تعریف کنند و روابط بین آنها را بیان کنند.

۱.۲ فضای‌های توپولوژیک

۱.۱.۲ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای و $\mathcal{T}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، یعنی $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{T}$ را توپولوژی در X خوانیم در صورتی که تابع شرایط سه‌گانهٔ ذیل باشد:

ت۱. $\phi \in \mathcal{T}$ و $X \in \mathcal{T}$؛

ت۲. همواره اگر $A, B \in \mathcal{T}$ آنگاه $A \cap B \in \mathcal{T}$؛

ت۳. بازاء هر زیرگردایهٔ $\mathcal{T}$ مانند $\mathcal{A}$، $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

اعضای $\mathcal{T}$ را مجموعه‌های باز نامیم. مطابق این اصطلاح یک توپولوژی در X عبارت است از گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X، موسوم به مجموعه‌های باز، به طوری که ϕ و X هر دو بازند و مقطع متناهی و اجتماع دلخواه از مجموعه‌های باز نیز باز است. (باید توجه داشت که از ت۲ معلوم می‌شود همواره اگر $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$.)

۲.۱.۲ مثالها.

(آ) فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد و $\mathcal{T} = \{\phi, X\}$. در این صورت، به وضوح، $\mathcal{T}$ در شرایط تعریف ۱.۱.۲ صدق می‌کند. بنابراین $\mathcal{T}$ یک توپولوژی در X است. این توپولوژی را توپولوژی ناگسسته یا توپولوژی بیمایه در X نامند. معلوم است که این توپولوژی کوچکترین توپولوژی ممکن در X است. به عبارت دیگر، اگر $\mathcal{T}'$ توپولوژی دیگری در X باشد آنگاه $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

(ب) فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد و $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. به آسانی ملاحظه می‌شود که $\mathcal{T}$ در شرایط تعریف ۱.۱.۲ صدق می‌کند. این توپولوژی را توپولوژی گسسته در X نامند. واضح است که این توپولوژی بزرگترین توپولوژی ممکن در X است. به عبارت دیگر اگر $\mathcal{T}'$ توپولوژی دیگری در X باشد، $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

بین این دو حالت افراط و تفریط حالات متعادلی نیز وجود دارند. توپولوژیهای متعددی در مجموعه‌ای مانند X موجودند که نه گسسته‌اند و نه ناگسسته، برخی از این توپولوژیها را در مثالهای ذیل ذکر می‌کنیم.

(پ) فرض کنیم $X = \{a, b, c\}$. به آسانی محقق می‌شود که هر یک از گردایه‌های ذیل متشکل از زیرمجموعه‌های X یک توپولوژی در X است:

$$\mathcal{T}_1 = \{\phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\},$$
$$\mathcal{T}_2 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\},$$
$$\mathcal{T}_3 = \{\phi, \{a, \}, \{b\}, \{a, b\}, X\}.$$

(ت) فرض کنیم X مجموعه‌ای، و S مجموعهٔ جمیع زیرمجموعه‌هایی از X باشد که متمم هر یک از آنها (نسبت به X) متناهی است. فرض کنیم $\mathcal{T} = S \cup \{\phi\}$. به سهولت می‌توان شرایط تعریف ۱.۱.۲ را تحقیق کرد. این توپولوژی را توپولوژی متمم متناهی می‌نامیم. واضح است در حالتی که X متناهی است، $\mathcal{T}$ به توپولوژی گسسته تبدیل می‌شود.

(ث) فرض کنیم X مجموعه‌ای، و S مجموعهٔ جمیع زیرمجموعه‌هایی از X باشد که متمم هر یک از آنها (نسبت به X) شمارا است. فرض کنیم $\mathcal{T} = S \cup \{\phi\}$. در این صورت، $\mathcal{T}$ یک توپولوژی در X است. این توپولوژی را توپولوژی متمم شمارا نامیم. معلوم است در حالتی که X شمارا است، $\mathcal{T}$ به توپولوژی گسسته تبدیل می‌شود.

(ج) فرض کنیم $X = \{a, b\}$ و $\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, X\}$. به وضوح، $\mathcal{T}$ یک توپولوژی در X است. این توپولوژی را توپولوژی سیرپینسکی [1] خوانیم. (این توپولوژی گاهی از اوقات در مثالهای نقض به

1) Sierpinski topology

کار می‌رود.)

(چ) فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد و $A \subseteq X$. در این صورت، $\mathcal{T} = \{\phi, A, X - A, X\}$ یک توپولوژی در X است.

(ح) با مفروضات مثال (چ)، فرض می‌کنیم

$$\mathcal{T}_1 = \{Y \mid A \subseteq Y \subseteq X\} \cup \{\phi\}.$$

در این صورت، $\mathcal{T}_1$ یک توپولوژی در X است. این توپولوژی را توپولوژی Aـشامل در X نامیم. واضح است که اگر $A = \phi$ آنگاه $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(X)$. یعنی توپولوژی ϕـ شامل، در X همان توپولوژی گسسته در X است. از طرف دیگر توپولوژی Xـ شامل، توپولوژی ناگسسته در X است.

(خ) با مفروضات مثال (چ)، فرض می‌کنیم

$$\mathcal{T}_2 = \{Y \mid Y \subseteq X \;\&\; Y \cap A = \phi\} \cup \{X\}.$$

در این صورت، $\mathcal{T}_2$ یک توپولوژی در X است. این توپولوژی را توپولوژی Aـ ناشامل در X نامیم. برعهدهٔ خواننده است که حالات '$A = \phi$' و '$A = X$' را مشخص کند. با اندکی تأمل معلوم می‌شود که توپولوژی $(X - A)$ـناشامل در X عبارت است $\mathcal{P}(A) \cup \{X\}$.

(د) مجموعهٔ زمینه را $\mathbb{R}$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم

$$\mathcal{T}_{\rightarrow} = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi, \mathbb{R}\}.$$

در این صورت، $\mathcal{T}_{\rightarrow}$ یک توپولوژی در $\mathbb{R}$ است. این توپولوژی را توپولوژی شعاع ـ راست در $\mathbb{R}$ نامیم. به همین قیاس،

$$\mathcal{T}_{\leftarrow} = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi, \mathbb{R}\}$$

یک توپولوژی در $\mathbb{R}$ است که آن را توپولوژی شعاع ـ چپ نامند.

۳.۱.۲ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای و $\mathcal{T}$ یک توپولوژی در X باشد. در این صورت، زوج مرتب $(X, \mathcal{T})$ را یک فضای توپولوژیک، یا به طور خلاصه فضا، خوانیم.

باید توجه داشت که وقتی می‌گوییم 'فضای X' منظورمان فضای توپولوژیکی مانند $(X, \mathcal{T})$ است؛ زیرا در مجموعهٔ X توپولوژیهای متفاوتی می‌توان تعریف کرد. بنابراین وقتی صحبت از فضای X می‌شود، باید توپولوژی تعریف شده در X را درنظر داشت.

هر عضو فضای X را یک نقطه خواهیم نامید. همچنین هرگاه $A \in \mathcal{T}$ آنگاه می‌گوییم مجموعهٔ A در X باز است. در صورتی که ابهامی پیش نیاید، عبارت 'در X' را حذف می‌کنیم.

۴.۱.۲ تعریف. فرض کنیم $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد، و $E \subseteq X$. در این صورت E را در X بسته گوییم در صورتی که $X - E$ در X باز باشد، به عبارت دیگر $X - E \in \mathcal{T}$.

۵.۱.۲ مثالها.

(آ) در هر فضای توپولوژیک مانند $(X, \mathcal{T})$، X و ϕ بسته‌اند.

(ب) فرض کنیم X مجموعهٔ دلخواهی باشد و $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. در این صورت هر زیرمجموعهٔ X مانند A در X بسته است. به عبارت دیگر، در توپولوژی گسسته، هر زیرمجموعهٔ مجموعهٔ زمینه هم باز است و هم بسته.

(پ) در مثال ۲.۱.۲ (پ)، هر یک از $\{c\}$، $\{a, c\}$، و $\{b, c\}$ به ترتیب در فضاهای $(X, \mathcal{T}_1)$، $(X, \mathcal{T}_2)$، و $(X, \mathcal{T}_3)$ بسته‌اند.

(ت) فرض کنیم $X = \mathbb{N}$ و $\mathcal{T}$ توپولوژی متمم متناهی در X باشد. به ازای هر n طبیعی، قرار می‌دهیم $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$. در این صورت هر $\mathbb{N}_n$ در X بسته است.

(ث) فرض کنیم $X = \mathbb{N}$ و $\mathcal{T}$ توپولوژی متمم شمارا در X باشد. در این صورت هر یک از $\{2, 4, \ldots\}$ و $\{1, 3, \ldots\}$ در X هم بازند و هم بسته.

(ج) فرض کنیم $X = \{a, b, c, d, e\}$، و

$$\mathcal{T} = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

ملاحظه می‌شود که $\mathcal{T}$ یک توپولوژی در X است. اینک فرض کنیم $A = \{a, c\}$. معلوم است که A در X باز نیست زیرا $A \notin \mathcal{T}$. به‌علاوه $X - A = \{b, d, e\} \notin \mathcal{T}$، یعنی A در X بسته نیست. این مثال نشان می‌دهد که ممکن است زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ زمینهٔ فضا در آن فضا نه باز باشد و نه بسته.

۶.۱.۲ قضیه. فرض کنیم $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت

(i) X و ϕ در X بسته‌اند؛

(ii) اجتماع هر تعداد متناهی از مجموعه‌های بسته در X، بسته است؛

(iii) مقطع دلخواه از مجموعه‌های بسته در X، بسته است.

برهان. اثبات (i) آسان است. برای اثبات (ii)، فرض می‌کنیم E_1، ...، E_n در X بسته باشند. چون $X - E_1$، ...، $X - E_n$ در X بازند، بنابر اصل موضوع ت۲ (تعریف ۱.۱.۲)، $\bigcap_{i=1}^{n} (X - E_i) \in \mathcal{T}$.
از اینجا، $X - \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{T}$. بنابراین، $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ در X بسته است.
برای اثبات (iii)، فرض می‌کنیم $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای دلخواه از زیرمجموعه‌های بستهٔ X باشد. بنابراین، به‌ازای هر α از I، $X - F_\alpha \in \mathcal{T}$. بنابراصل موضوع ت۲ (تعریف ۱.۱.۲) $\bigcup_{\alpha\in I} (X - F_\alpha) \in \mathcal{T}$.
از اینجا، $X - \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha \in \mathcal{T}$. به عبارت دیگر، $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ در X بسته است.■

اگر $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ دو توپولوژی در X باشند، به آسانی ملاحظه می‌شود که $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ نیز یک توپولوژی در X است. این نتیجه نه تنها در مورد مقطع دو توپولوژی در X برقرار است بلکه مقطع متناهی از توپولوژیها در X نیز یک توپولوژی در X است. باز هم می‌توان فراتر رفت، چنانکه در قضیهٔ آتی ملاحظه می‌شود.

۷.۱.۲ قضیه. فرض کنیم $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از توپولوژیها در X باشد. در این صورت،

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$$

یک توپولوژی در X است.

برهان برهان آسان و به خواننده محول می‌شود.■

۸.۱.۲ نتیجه. فرض کنیم X مجموعه‌ای غیرخالی و $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. در این صورت مقطع جمیع توپولوژیها در X که حاوی Sاند یک توپولوژی در X است. (این توپولوژی را $\mathcal{T}_S$ می‌نامیم.)
در واقع، این توپولوژی کوچکترین توپولوژی حاوی S در X است. به عبارت دیگر، هرگاه S توپولوژیی در X باشد به طوری که $S \subseteq \mathcal{T}$ آنگاه $\mathcal{T}_S \subseteq \mathcal{T}$.

۲.۲ پایه و زیرپایه

توپولوژیهایی وجود دارند که دارای مجموعه‌های باز نسبتاً زیادی هستند و معقول به‌نظر نمی‌رسد که جمیع آنها را مشخص کنیم. بنابراین، این سئوال پیش می‌آید که آیا یک توپولوژی را می‌توان با تعدادی از مجموعه‌های باز مفروض آن مشخص کرد. مثال ساده‌ای را در نظر می‌گیریم: فرض کنیم A و B دو مجموعهٔ باز

مفروضی باشند $(A, B \subseteq X)$. در این صورت، $A \cup B$ و $A \cap B$ نیز بازند. از طرفی X و ϕ هم باز هستند. بنابراین توپولوژی $\mathcal{T} = \{X, \phi, A, B, A \cup B, A \cap B\}$ را در X تنها با دو مجموعهٔ باز آن یعنی A و B مشخص کردیم.

اینک برگردیم به نتیجه‌ای که اخیراً بیان کردیم و توپولوژی $\mathcal{T}_S$ را در نظر بگیریم. معلوم است که اعضای مجموعهٔ S جملگی باز هستند، یعنی به $\mathcal{T}_S$ تعلق دارند، ولی $\mathcal{T}_S$ عموماً اعضایی دارد که در S نیستند. این اعضا را به طریقی که ذیلاً خواهیم دید می‌توان از اعضای S به‌دست آورد. بنابراین $\mathcal{T}_S$ را می‌توان با تعدادی کمتر مجموعهٔ باز ساخت.

۱۰۲۰۲ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای باشد، و $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. در این صورت، S را یک زیرپایه برای توپولوژی $\mathcal{T}_S$ نامیم و گوییم $\mathcal{T}_S$ با S تولید می‌شود.

ذیلاً ساختمان $\mathcal{T}_S$ را برحسب S به‌دست خواهیم داد. تعریف ذیل در توصیف ساختمان $\mathcal{T}_S$ مفید خواهد بود.

۲۰۲۰۲ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای باشد، و $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. مجموعه‌های

$$\{A \subseteq X | \text{است } S \text{ مقطع تعدادی متناهی از اعضای } A\},$$

$$\{A \subseteq X | \text{است } S \text{ اجتماع دلخواهی از اعضای } A\}$$

را به ترتیب S_δ و S_σ می‌نامیم. مطابق قرارداد، $(S_\delta)_\sigma$ را به $S_{\delta\sigma}$ نشان می‌دهیم.

تبصره. با توجه به تعریف فوق معلوم است که همواره $S \subseteq S_\delta$ و $S \subseteq S_\sigma$. به‌علاوه، $X \in S_\delta$ و $\phi \in S_\sigma$ زیرا، می‌دانیم $\bigcap\limits_{A \in \phi} A = X$ و $\bigcup\limits_{A \in \phi} A = \phi$.

۳۰۲۰۲ قضیه. فرض کنیم X مجموعه‌ای و $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ در این صورت

$$\mathcal{T}_S = S_{\delta\sigma}$$

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که $S_{\delta\sigma}$ یک توپولوژی حاوی S در X است. اینکه $S_{\delta\sigma}$ حاوی S است واضح است. همچنین معلوم است که $X, \phi \in S_{\delta\sigma}$. اینک فرض کنیم $A, B \in S_{\delta\sigma}$. بنابراین $A = \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ و $B = \bigcup\limits_{\beta \in J} B_\beta$ که در آن A_αها و B_βها به S_δ تعلق دارند. به موجب دستور (۱-۱۲)

مذکور در فصل اول،

$$A \cap B = (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap (\bigcup_{\beta \in J} B_\beta) = \bigcup_{(\alpha,\beta) \in I \times J} (A_\alpha \cap A_\beta).$$

اینک گوییم چون A_αها و B_βها به S_δ تعلق دارند، هر یک به صورت مقطع تعداد متناهی از اعضای Sاند. بنابراین به‌ازای هر α از I و هر β از J، مجموعهٔ $A_\alpha \cap B_\beta$ نیز به صورت مقطع تعدادی متناهی از اعضای S است. در نتیجه، با توجه به تساوی فوق، $A \cap B \in S_{\delta\sigma}$.

با استدلالی مشابه، معلوم می‌شود که اجتماع دلخواه از اعضای $S_{\delta\sigma}$ به این مجموعه تعلق دارد. بنابراین، $S_{\delta\sigma}$ یک توپولوژی حاوی S در X است. از آنجا $\mathcal{T}_S \subseteq S_{\delta\sigma}$. از طرف دیگر، فرض کنیم $\mathcal{T}$ یک توپولوژی دلخواه حاوی S در X باشد. عضو دلخواهی از $S_{\delta\sigma}$ مانند $\bigcup_{\alpha \in I} (\bigcap_{i=1}^{m_\alpha} S_{\alpha,i})$ را در نظر می‌گیریم که در آن $m_\alpha \in \mathbb{N}$ (توجه کنید که هر $S_{\alpha,i}$ عضو S است.) معلوم است که هر $S_{\alpha,i}$ عضو $\mathcal{T}$ است. بنابراین، به ازای هر α از I، $\bigcap_{i=1}^{m_\alpha} S_{\alpha,i} \in \mathcal{T}$، زیرا $\mathcal{T}$ توپووژی است. از آنجا، $\bigcup_{\alpha \in I} (\bigcap_{i=1}^{m_\alpha} S_{\alpha,i}) \in \mathcal{T}$. بنابراین $S_{\delta\sigma} \subseteq \mathcal{T}_S$ و حکم ثابت می‌شود.■

به زبان ساده، از قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود که اعضای $\mathcal{T}_S$ به طریق ذیل به دست می‌آیند: ابتدا مقطع‌های متناهی دلخواه از اعضای S را در نظر می‌گیریم و گردایهٔ این مقطع‌ها تشکیل می‌دهیم. در این صورت، هر عضو $\mathcal{T}_S$، اجتماعی از اعضای این گردایه است.

۴.۲.۲ مثالها.

(آ) هر توپولوژی یک زیرپایه خودش است.

(ب) فرض کنیم $S = \phi$. در این صورت، همهٔ توپولوژیها (در مجموعه‌ای مانند X) حاوی ϕاند. بنابراین $\mathcal{T}_S = \{X, \phi\}$. یعنی S توپولوژی ناگسسته را تولید می‌کند. با همین استدلال، هر یک از گردایه‌های $\{\phi\}$ و $\{X\}$ توپولوژی ناگسسته را (در X) تولید می‌کند.

(پ) فرض کنیم X مجموعه‌ای، $A, B \subseteq X$، و $S = \{A, B\}$. در این صورت (همان طور که در مقدمهٔ این مبحث ذکر کردیم)، S توپولوژی $\{\phi, A, B, A \cup B, A \cap B, X\}$ را تولید می‌کند.

(ت) فرض کنیم X مجموعه‌ای باشد و $A \subseteq X$. در این صورت، اگر $S = \{A\}$ آنگاه $\mathcal{T}_S = \{\phi, A, X\}$.

(ث) فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه و S گردایهٔ متشکل از همهٔ زیر مجموعه‌های متناهی X باشد. در این صورت، S توپولوژی گسسته را در X تولید می‌کند. واضح است که گردایهٔ متشکل از

زیرمجموعه‌های یکانی X نیز توپولوژی گسسته را در X تولید می‌کند.

اینک چند توپولوژی مهم را در $\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم:

(ج) فرض کنیم

$$S = \{(-\infty, a) |\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) |\ a \in \mathbb{R}\}.$$

در این صورت توپولوژی تولید شده به وسیلهٔ S را توپولوژی استاندهٔ خط حقیقی یا توپولوژی معمولی $\mathbb{R}$ خوانیم و آن را با خود $\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم. با اندکی تأمل معلوم می‌شود که A در توپولوژی معمولی $\mathbb{R}$ باز است اگر و تنها اگر $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$، که در آن I یک مجموعهٔ اندیسگذار و به‌ازای هر α از I، A_α یک بازهٔ باز متناهی است.

(چ) واضح است هرگاه $S = \{(-\infty, a] |\ a \in \mathbb{R}\} \bigcup \{[a, +\infty) | a \in \mathbb{R}\}$ آنگاه توپولوژی تولید شده به وسیلهٔ S توپولوژی گسسته (در $\mathbb{R}$) است، زیرا هر مجموعهٔ یکانی مانند $\{x\}$ باز است (در واقع، $\{x\} = (-\infty, x] \cap [x, +\infty)$).

(ح) فرض کنیم

$$S = \{(a, +\infty) |\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a] |\ a \in \mathbb{R}\}.$$

در این صورت، توپولوژی تولید شده به وسیلهٔ S را توپولوژی حد بالایی در $\mathbb{R}$ نامیم و آن را با $\mathbb{R}_u$ نشان می‌دهیم. به آسانی معلوم می‌شود که زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ مانند A در این توپولوژی باز است اگر و تنها اگر به صورت اجتماعی از بازه‌های نیم باز به صورت $(a, b]$ باشد.

به طریق مشابه، می‌توان توپولوژی حد پایینی را در $\mathbb{R}$ تعریف کرد. این توپولوژی را با $\mathbb{R}_\ell$ نشان می‌دهیم.

باید توجه داشت که سه توپولوژی $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}_u$ و $\mathbb{R}_\ell$ دوبه‌دو متمایزند.

۵.۲.۲ قضیه. فرض کنیم X مجموعه‌ای باشد و $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. به‌علاوه فرض می‌کنیم $A \subseteq X$. در این صورت، $A \in \mathcal{T}_S$ اگر و تنها اگر به ازای هر a از A، S_δ عضوی مانند B داشته باشد که $a \in B \subseteq A$.

برهان. فرض کنیم $A \in \mathcal{T}_S$ و $a \in A$. بنابر ۳.۲.۲، $A \in S_{\delta\sigma}$. بنابراین، $A = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ که در آن I مجموعه‌ای اندیسگذار، و به ازای هر α از I، $B_\alpha \in S_\delta$. گوییم چون $a \in A$، αیی از I هست که $a \in B_\alpha$. از آنجا $a \in B_\alpha \subseteq A$ و حکم ثابت می‌شود.

برعکس، فرض کنیم به ازای هر a از A، S_δ عضوی مانند B_a داشته باشد که $a \in B_a \subseteq A$. در این صورت واضح است که $A = \bigcup_{a\in A} B_a$. گوییم چون هر B_a متعلق به S_δ است، $A \in S_{\delta\sigma}$. بنابراین $A \in \mathcal{T}_S$.■

اینک سئوالی را مطرح می‌کنیم. فرض کنیم $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. (یعنی $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$). با چه شرایطی $\mathcal{B}_\sigma$ یک توپولوژی را در X مشخص می‌کند؟ خواننده باید توجه داشته باشد که در حالت کلی $\mathcal{B}_\sigma$ یک توپولوژی در X نیست؛ زیرا مقطع دو عضو $\mathcal{B}_\sigma$ ممکن است به $\mathcal{B}_\sigma$ متعلق نباشد. به عنوان مثال هرگاه

$$\mathcal{B} = \{(a, +\infty)|\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a)|\ a \in \mathbb{R}\},$$

آنگاه $(a, +\infty) \cap (-\infty, a+1)$ بازهٔ $(a, a+1)$ است که به وضوح به $\mathcal{B}_\sigma$ تعلق ندارد.

ذیلاً پس از ذکر یک تعریف، ،ضیه‌ای را در این باب ذکر خواهیم کرد.

۶.۲.۲ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای باشد، و $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. در این صورت، گردایهٔ $\mathcal{B}$ را یک پایهٔ توپولوژیک (یا مختصراً، یک پایه) در X گوییم، در صورتی که $\mathcal{B}_\sigma$ یک توپولوژی در X باشد. در این صورت گوییم $\mathcal{B}$ توپولوژی $\mathcal{B}_\sigma$ را تولید می‌کند.

۷.۲.۲ قضیه. فرض کنیم X مجموعه‌ای باشد، و $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. در این صورت، $\mathcal{B}$ یک پایه (در X) است اگر و تنها اگر در عین حال،

(i) $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$؛

(ii) به ازای هر دو عضو $\mathcal{B}$ مانند B_1 و B_2 و هر x که $x \in B_1 \cap B_2$ عضوی از $\mathcal{B}$ مانند B موجود باشد که $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

برهان فرض کنیم $\mathcal{B}$ یک پایه باشد. بنابراین $\mathcal{B}_\sigma$ یک توپولوژی در X است. از آنجا، $X \in \mathcal{B}_\sigma$، و (i) ثابت می‌شود. اینک فرض کنیم $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ و $x \in B_1 \cap B_2$. گوییم چون $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$، $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_\sigma$. اینک چون $\mathcal{B}_\sigma$ یک توپولوژی است، $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_\sigma$. بنابر تعریف $\mathcal{B}_\sigma$، معلوم می‌شود که $B_1 \cap B_2$ اجتماعی است از اعضای $\mathcal{B}$. فرض کنیم $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$ که در آن I یک مجموعهٔ اندیسگذار و B_α ها جملگی عضو $\mathcal{B}$ اند. چون $x \in B_1 \cap B_2$، $\alpha.$ی از I هست که $x \in B_{\alpha.}$. بنابراین، $x \in B_{\alpha.} \subseteq B_1 \cap B_2$ و از اینجا (ii) ثابت می‌شود.

برعکس، فرض کنیم (i) و (ii) برقرار باشند. ثابت می‌کنیم $\mathcal{B}$ یک پایه است. برای این منظور باید ثابت کنیم که $\mathcal{B}_\sigma$ یک توپولوژی است. از (i) نتیجه می‌شود که $X \in \mathcal{B}_\sigma$. همچنین واضح است که $\phi \in \mathcal{B}_\sigma$. از طرفی معلوم است که اجتماع دلخواه از اعضای $\mathcal{B}_\sigma$ به $\mathcal{B}_\sigma$ تعلق دارد. باقی می‌ماند ثابت کنیم که هرگاه $A_1, A_2 \in \mathcal{B}_\sigma$ آنگاه $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{B}_\sigma$. فرض کنیم x عضو دلخواهی از $A_1 \cap A_2$ باشد. بنابراین $x \in A_1$ و $x \in A_2$. گوییم چون $A_1, A_2 \in \mathcal{B}_\sigma$،

$$A_1 = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \quad , \quad A_2 = \bigcup_{\beta \in J} C_\beta,$$

که در آن I و J مجموعه‌هایی اندیسگذار و B_α و C_βها به $\mathcal{B}$ متعلق‌اند. از $x \in A_1$ و $x \in A_2$ معلوم می‌شود که α_0ی در I و β_0ی در J هست که $x \in C_{\beta_0} \subseteq A_2$ و $x \in B_{\alpha_0} \subseteq A_1$. بنابراین، $x \in B_{\alpha_0} \cap C_{\beta_0} \subseteq A_1 \cap A_2$. به موجب (ii)، معلوم می‌شود که $\mathcal{B}$ عضوی مانند B دارد که

$$x \in B \subseteq B_{\alpha_0} \cap C_{\beta_0} \subseteq A_1 \cap A_2.$$

باید توجه داشته باشیم که این B بستگی به x دارد؛ به همین دلیل آن را B_x می‌نامیم. خلاصه، معلوم می‌شود که به‌ازای هر x از $A_1 \cap A_2$، عضوی از $\mathcal{B}$ مانند B_x هست به طوری که $x \in B_x \subseteq A_1 \cap A_2$. به آسانی، از اینجا، نتیجه می‌شود که

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{x \in A} B_x$$

که در آن $A = A_1 \cap A_2$. اینک گوییم چون به ازای هر x از A، $B_x \in \mathcal{B}$، خواهیم داشت $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{B}_\sigma$، و بنابراین $\mathcal{B}_\sigma$ یک توپولوژی است.■

۸.۲.۲ مثالها.

(آ) هر توپولوژی خود یک پایه است.

(ب) ϕ نمی‌تواند یک پایه باشد. همچنین $\{\phi\}$ یک پایه نیست؛ ولی $\{X\}$ یک پایه است و توپولوژی ناگسستهٔ $\{X, \phi\}$ را تولید می‌کند.

(پ) فرض کنیم X مجموعه‌ای باشد و $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$. در این صورت، $\mathcal{B}$ در شرایط تعریف پایه صدق می‌کند. بنابراین یک پایه است. به آسانی ملاحظه می‌شود که $\mathcal{B}_\sigma = \mathcal{P}(X)$. یعنی $\mathcal{B}$ توپولوژی گسسته را در X تولید می‌کند.

(ت) فرض کنیم X مجموعه‌ای باشد، $A \subseteq X$، و $\mathcal{B} = \{A, X - A\}$. در این صورت، $\mathcal{B}$ یک پایه است و توپولوژی مثال ۲.۱.۲ (ج) را تولید می‌کند.

(ث) مجموعهٔ $\{\{a\}, \{b\}\}$ یک پایه است در $\{a, b, c\}$ و توپولوژی مثال ۲.۱.۲ (پ) $\mathcal{T}_۲$ را تولید می‌کند.

(ج) فرض کنیم

$$\mathcal{B}_۱ = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\};$$

$$\mathcal{B}_۲ = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\};$$

$$\mathcal{B}_۳ = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}.$$

در این صورت، به آسانی ثابت می‌شود که $\mathcal{B}_۱$، $\mathcal{B}_۲$، و $\mathcal{B}_۳$ پایه‌اند و به ترتیب توپولوژیهای $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}_u$ و $\mathbb{R}_\ell$ را تولید می‌کنند. ما به عنوان نمونه، ثابت می‌کنیم $\mathcal{B}_۲$ یک پایهٔ توپولوژیک است. برای این منظور از قضیهٔ ۷.۲.۲ استفاده می‌کنیم. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n].$$

بنابراین شرط (i) قضیه برقرار است. اینک فرض کنیم $B_۱ = (a_۱, b_۱]$ و $B_۲ = (a_۲, b_۲]$ و $x \in B_۱ \cap B_۲$. در این صورت، اگر $B_۱ \cap B_۲ = \phi$ آنگاه (ii) به انتفای مقدم برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم که $B_۱ \cap B_۲ \neq \phi$. حالات زیر اتفاق می‌افتد:

۱) $a_۱ = a_۲$. در این صورت، با توجه به اینکه $B_۱ \cap B_۲ \neq \phi$، $B_۱ \cap B_۲ = (a_۱, b_i]$ که در آن $i = ۱$ یک ۲ $= i$. بنابراین در (ii) (قضیهٔ مذکور) کافی است $B = B_۱ \cap B_۲$.

۲) $a_۱ < a_۲$. در این حالت نیز با توجه به اینکه $B_۱ \cap B_۲ \neq \phi$، $B_۱ \cap B_۲ = (a_۲, b_i]$ که در آن $i = ۱$ یک ۲ $= i$؛ و مانند (۱) استدلال می‌کنیم.

۳) $a_۲ < a_۱$. در این حالت نیز باید داشته باشیم $B_۱ \cap B_۲ = (a_۱, b_i]$ که در آن $i = ۱$ یا $i = ۲$ که دوباره مانند (۱) استدلال می‌کنیم.

شاید مثال قبل برای خواننده چندان جالب نباشد، زیرا ملاحظه می‌شود که به ازای هر $B_۱$ و $B_۲$ که $B_۱ \cap B_۲ \neq \phi$، $B_۱ \cap B_۲ \in \mathcal{B}$؛ بنابراین شرط (ii) به وضوح برقرار است. باید توجه داشت که چنین وضعی به ندرت اتفاق می‌افتد. برای آنکه به اهمیّت قضیه ۷.۲.۲ پی ببریم، مثال دیگری را می‌آوریم:

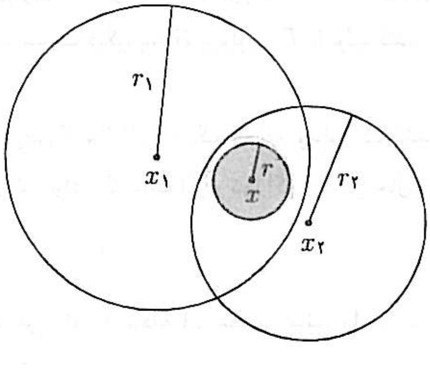
(چ) فرض کنیم $X = \mathbb{R}^۲$. به ازای هر x از X و هر عدد مثبت مانند r، فرض می‌کنیم

$$B(x, r) = \{y \in X \mid |y - x| < r\},$$

که در آن $|y-x|$ به معنی فاصلهٔ دو نقطهٔ x و y (در صفحهٔ اقلیدسی) است. از نظر هندسی $B(x,r)$ مجموعهٔ همهٔ نقاطی از صفحهٔ اقلیدسی است که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ مفروض x از عدد مثبت مفروض r کوچکتر است، و این یعنی مجموعهٔ نقاط قرصی که مرکز آن x و شعاع آن r است. اینک فرض می‌کنیم $\mathcal{B}=\{B(x,r)\mid x\in X, r\in\mathbb{R}^+\}$ و ثابت می‌کنیم $\mathcal{B}$ یک پایهٔ توپولوژیک (در X) است. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که $\bigcup_{r\in\mathbb{R}^+} B(\circ,r) = X$. به عبارت دیگر، $\mathbb{R}^۲$ اجتماع همهٔ قرصهایی است که مرکز هر یک از آنها مبداء مختصات است. بنابراین شرط (i) قضیهٔ ۷.۲.۲ برقرار است. اینک فرض کنیم $B_۱$ و $B_۲$ دو قرص دلخواه به ترتیب به مراکز $x_۱$ و $x_۲$ و شعاعهای $r_۱$ و $r_۲$ باشند به طوری که $B_۱\cap B_۲\neq\phi$. فرض می‌کنیم $x\in B_۱\cap B_۲$. در این صورت، مطابق شکل ۱.۲ عدد r را می‌توان چنان تعیین کرد که

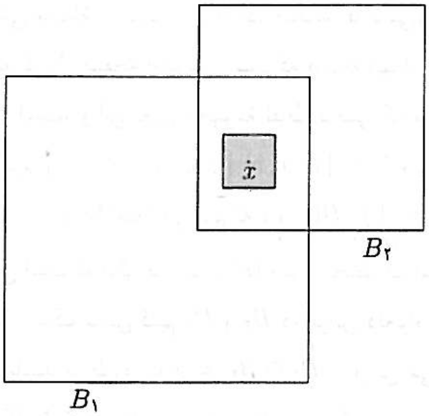
$$B(x,r)\subseteq B_۱\cap B_۲;$$

یعنی شرط (ii) قضیهٔ مذکور برقرار است. بنابراین، $\mathcal{B}$ یک پایهٔ توپولوژیک (در $\mathbb{R}^۲$) است. به عبارت دیگر، $\mathcal{B}_\sigma$ یک توپولوژیک (در $\mathbb{R}^۲$) است. این توپولوژی را توپولوژی استاندهٔ صفحهٔ اقلیدسی یا توپولوژی معمولی $\mathbb{R}^۲$ می‌نامیم و آن را با همان علامت $\mathbb{R}^۲$ نشان می‌دهیم.



(ش ۱.۲)

(ح) فرض کنیم $X=\mathbb{R}^۲$. $\mathcal{B}$ را گردایه همهٔ نواحی مربعی در صفحه (اقلیدسی) می‌گیریم. در واقع هر عضو $\mathcal{B}$ مجموعهٔ نقاط داخل یک مربع فرض می‌شود. مانند مثال (ت) ملاحظه می‌شود که $\mathcal{B}$ یک پایهٔ توپولوژیک (در $\mathbb{R}^۲$) است (شکل ۲.۲). بعداً خواهیم دید که $\mathcal{B}$ همان توپولوژی معمولی $\mathbb{R}^۲$ را تولید می‌کند.



(ش ۲.۲)

۹.۲.۲ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{T}$ یک توپولوژی در مجموعه‌ای مانند X باشد، و $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$، $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. در این صورت

(i) $\mathcal{A}$ را یک زیرپایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ خوانیم در صورتی که $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}$. به عبارت دیگر، $\mathcal{A}$ توپولوژی $\mathcal{T}$ را تولید کند.

(ii) $\mathcal{B}$ را یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ خوانیم در صورتی که $\mathcal{T} = \mathcal{B}_\sigma$ (در این صورت به وضوح $\mathcal{B}$ یک پایه در X است.) به عبارت دیگر، پایهٔ $\mathcal{B}$ توپولوژی $\mathcal{T}$ را تولید کند.

۱۰.۲.۲ قضیه. فرض کنیم $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد، و $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. در این صورت، $\mathcal{A}$ یک زیرپایهٔ برای توپولوژی $\mathcal{T}$ است اگر و تنها اگر در عین حال

(i) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$.

(ii) به ازای هر U از $\mathcal{T}$ و هر x از U، گردایهٔ $\mathcal{A}$ اعضایی مانند A_1، ...، A_n داشته باشد به طوری که $x \in A_1 \cap \ldots A_n \subseteq U$.

برهان. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک زیرپایه برای $\mathcal{T}$ باشد. در این صورت، بنابر تعریف $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}$. از تعریف $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ معلوم است که $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. از اینجا، $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$. پس (i) ثابت می‌شود.

برای اثبات (ii) فرض می‌کنیم $U \in \mathcal{T}$ و $x \in U$. بنابراین، $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. اینک به موجب قضیهٔ ۵.۲.۲، $\mathcal{A}_\delta$ عضوی مانند B دارد که $x \in B \subseteq U$. امّا چون $B \in \mathcal{A}_\delta$، گردایهٔ $\mathcal{A}$ اعضایی مانند A_1، ...، A_n دارد به طوری که $B = A_1 \cap \ldots \cap A_n$.

برای اثبات کفایت حکم (i) و (ii) را مفروض می‌گیریم. باید ثابت کنیم که $\mathcal{T}=\mathcal{T}_A$. با توجه به تعریف $\mathcal{T}_A$ معلوم می‌شود که $\mathcal{T}_A\subseteq\mathcal{T}$. برای اثبات $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}_A$ کافی است قضیهٔ ۵.۲.۲ را به کار بندیم.■

۱۱.۲.۲ قضیه. فرض کنیم $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$. در این صورت، $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ است اگر و تنها اگر در عین حال

(i) $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}$

(ii) به‌ازای هر U از $\mathcal{T}$، و هر x از U، گردایهٔ $\mathcal{B}$ عضوی مانند B داشته باشد به طوری که $x\in B\subseteq U$.

برهان. فرض کنیم $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ باشد؛ بنابراین $\mathcal{T}=\mathcal{B}_\sigma$. اینک گوییم چون $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{B}_\sigma$، $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}$. یعنی، (i) برقرار است.

برای اثبات (ii) فرض کنیم $U\in\mathcal{T}$ و $x\in U$. چون $\mathcal{T}=\mathcal{B}_\sigma$، $U\in\mathcal{B}_\sigma$. بنابراین، U را می‌توان به صورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ نوشت. فرض کنیم $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda=U$. اینک از $x\in U$، معلوم می‌شود که $\lambda_\circ$ی از Λ هست به طوری که $x\in B_{\lambda_\circ}\subseteq U$.

برای اثبات کفایت حکم، ابتدا ثابت می‌کنیم که $\mathcal{B}$ یک پایه در X است؛ سپس نشان می‌دهیم که $\mathcal{T}=\mathcal{B}_\sigma$.

ابتدا ملاحظه می‌کنیم که $\mathcal{B}_\sigma\subseteq\mathcal{T}$ زیرا هر عضو $\mathcal{B}_\sigma$ اجتماعی است از مجموعه‌های باز X. (توجه کنید هر عضو $\mathcal{B}$ بنابر (i) در X باز است). حال ثابت می‌کنیم که $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{B}_\sigma$. برای این منظور، فرض کنیم $U\in\mathcal{T}$. عضو x از U را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. بنابر فرض (ii)، گردایهٔ $\mathcal{B}$ عضوی مانند B_x (وابسته به x) دارد به طوری که $x\in B_x\subseteq U$. اینک ملاحظه می‌کنیم که $\bigcup\limits_{x\in U}B_x=U$. به عبارت دیگر، $U\in\mathcal{B}_\sigma$. بنابراین $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{B}_\sigma$ و در نتیجه $\mathcal{T}=\mathcal{B}_\sigma$.■

۳.۲ مقایسهٔ توپولوژیها

۱.۳.۲ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}'$ دو توپولوژی در مجموعهٔ مفروضی مانند X باشند. در این صورت گوییم $\mathcal{T}'$ ظریفتر از $\mathcal{T}$ است (یا $\mathcal{T}$ از $\mathcal{T}'$ درشتتر است) در صورتی که $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}'$. هرگاه $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}'$، توپولوژی $\mathcal{T}'$ را اکیداً ظریفتر از $\mathcal{T}$ (یا توپولوژی $\mathcal{T}$ را اکیداً درشتتر از $\mathcal{T}'$) می‌نامیم.

معلوم است وقتی که $\mathcal{T}'$ ظریفتر از $\mathcal{T}$ باشد، همهٔ اعضای $\mathcal{T}$ را شامل خواهد بود؛ بنابراین همهٔ مجموعه‌های باز فضای $(X,\mathcal{T})$ در فضای $(X,\mathcal{T}')$ باز خواهند بود.