* تعریف. فرض کنیم X یک مجموعه و $\mathcal{U}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد که دارای خواص زیر هستند:

۱) $\varnothing \in \mathcal{U}$ و $X \in \mathcal{U}$،

۲) اشتراک هر دو عضو از $\mathcal{U}$، عضوی از $\mathcal{U}$ است. ($\mathcal{U}$ نسبت به اشتراک بسته است)، (تعداد متناهی)

۳) اجتماع هر تعداد عضو از $\mathcal{U}$، عضوی از $\mathcal{U}$ است ($\mathcal{U}$ نسبت به اجتماع بسته است). (هر تعداد متناهی، شمارا یا ناشمارا)

چنین گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X را، یک توپولوژی بر روی X گوییم. مجموعه X به همراه $\mathcal{U}$ یک فضای توپولوژی نامیده و با نماد $(X,\mathcal{U})$ نشان داده می‌شود که اگر آن را به صورت خلاصه با T یا $X_{\mathcal{U}}$ نشان می‌دهند. عناصر $U\in\mathcal{U}$ را مجموعه‌های باز T و اعضای X را نقاط T می‌نامیم.

مثال ۱) هر فضای متری، یک ساختار فضای توپولوژی دارد که $\mathcal{U}$ مجموعه همه مجموعه‌های باز در X نسبت به متر d هستند. این توپولوژی را توپولوژی معمولی یا متری گوییم.

یادآوری: مجموعه A و تابع $d: A\times A \to R$ را فضای متری گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) $d(a,b)=0$ اگر و تنها اگر $a=b$،

۲) $d(a,b)=d(b,a)$،

۳) به ازای هر $a,b,c\in A$ داشته باشیم $d(a,b)+d(b,c)\le d(a,c)$ (نامساوی مثلثی).

یادآوری: زیرمجموعه U از فضای متری (A,d) را درصورتی باز گوییم که به ازای هر $x \in U$ یک $\varepsilon_x > 0$ چنان یافت شود که اگر $y \in A$ و $d(x,y) < \varepsilon_x$، آنگاه $y \in U$.

مثال ۲) $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$ را توپولوژی ناگسسته یا ملموس گوییم که کوچکترین توپولوژی بر X است.

مثال ۳) $\mathcal{U} = P(X)$ را توپولوژی گسسته گوییم.

* مثال‌های دیگر را از مراجع مربوط مطالعه کنید.

* تعریف. تابع $f: X \to Y$ بین فضاهای توپولوژی X و Y را پیوسته گوییم هرگاه به ازای هر مجموعه باز U از Y، تصویر وارون $f^{-1}(U)$ در X باز باشد.

* تعریف. دو فضای توپولوژیک X و Y را همئومورف گوییم هرگاه توابع پیوسته $f: X \to Y$ و $g: Y \to X$ یافت شوند به طوری که وارون هم باشند ($g \circ f = 1_Y$ و $f \circ g = 1_X$)

* فضای توپولوژی X را همبند گوییم هرگاه نتوان آن را به صورت $X = X_1 \cup X_2$ نوشت به طوری که X_1 و X_2 دو مجموعه باز باشند و $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

* تعریف: یک نگاشت پیوسته α از $[0,1]$ به X را که $\alpha(0)=x_0$ و $\alpha(1)=x_1$،

یک مسیر از x_0 به x_1 گوییم و با $\alpha:[0,1]\to X$ نمایش می‌دهیم.

* تعریف: فضای توپولوژیک X را همبند مسیری گوییم هرگاه برای هر دو نقطه x_0 و x_1

یک مسیر α در X از x_0 به x_1 موجود باشد.

* مفهوم همبند مسیری یک مفهوم قوی‌تر از همبند است. فضای توپولوژیک همبندی وجود دارد که همبند مسیری نیست. ولی هر همبند مسیری، همبند است.

مثال. در صفحه R^2 دو مجموعه $X=\{(0,x_1)\,|\,-1<x_1<1\}$ و $Y=\{(x_2,\sin \pi/x_2)\,|\,0<x_2<1\}$

را درنظر بگیرید. دراینصورت $X\cup Y$ همبند است ولی همبند مسیری نیست. شکل صفحه ۵۴ (۳.۳)

تعریف. مسیر بسته یا حلقه در نقطه x_0، مسیری است مثل $\alpha(t)$ که $\alpha(0)=\alpha(1)=x_0$.

تعریف: $\gamma=\alpha*\beta$ را حاصلضرب دو حلقه α و β در x_0 گوییم هرگاه:

$$\gamma(t)=\begin{cases}\alpha(2t) & 0\le t\le 1/2\\ \beta(2t-1) & 1/2\le t\le 1\end{cases}$$

تعریف: حلقه معکوس $\alpha^{-1}(t)$ در نقطه $x\in X$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha^{-1}(t)=\alpha(1-t)\qquad 0\le t\le 1$$

تعریف. حلقه ثابت c به صورت $c(t) = x_0 \,,\, 0 \le t \le 1$ تعریف می‌شود.

تعریف. دو تابع α_1 و α_2 را هموتوپ گوییم هرگاه تابع پیوسته:

$$F: X \times [0,1] \to Y$$

موجود باشد به طوریکه:

$$F(x,0) = \alpha_1(x)$$
$$F(x,1) = \alpha_2(x)$$

برای هر $x \in X$.

* توجه کنید که در تعریف فوق $\alpha_1 : X \to Y$ و $\alpha_2 : X \to Y$ می‌باشند.

* تعریف: دو حلقه هموتوپ را می‌توان مشابه با تعریف فوق بیان نمود.

* تعریف: فرض کنیم α و β دو حلقه در x_0 باشند. گوییم α و β هموتوپ هستند و می‌نویسیم $\alpha \simeq \beta$، اگر یک تابع پیوسته مثل $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ موجود باشد بطوریکه:

$$H(t,0) = \alpha(t) \qquad 0 \le t \le 1 \,,$$
$$H(t,1) = \beta(t) \qquad 0 \le t \le 1 \,,$$
$$H(0,S) = H(1,S) = x_0 \qquad 0 \le S \le 1 \,.$$

تابع H با شرایط فوق را یک هموتوپی گوییم. (شکل ۳.۴ صفحه ۵۵ را نگاه کنید.)

* نکته: توجه کنیم که برای هر S ثابت، $H(S,t)$ حلقه‌ای در x_0 است که با $\alpha_S(t)$ نمایش می‌دهیم

لم ۱) اگر α_0 ، β_0 ، γ_0 ، α_1 ، β_1 و γ_1 حلقه‌هایی در x_0 باشند، درانصورت عبارات زیر برقرارند:

۱) $\alpha_0 \simeq \alpha_0$

۲) $\alpha_0 \simeq \beta_0$ نتیجه می‌دهد، $\beta_0 \simeq \alpha_0$.

۳) اگر $\alpha_0 \simeq \beta_0$ و $\beta_0 \simeq \gamma_0$ ، آنگاه $\alpha_0 \simeq \gamma_0$.

۴) اگر $\alpha_0 \simeq \alpha_1$ ، آنگاه $\alpha_0^{-1} \simeq \alpha_1^{-1}$.

۵) اگر $\alpha_0 \simeq \alpha_1$ و $\beta_0 \simeq \beta_1$ ، آنگاه داریم $\alpha_0 * \beta_0 \simeq \alpha_1 * \beta_1$.

$F: \alpha_0 \simeq \beta_0 \quad , \quad G: \beta_0 \simeq \gamma_0$

$$\Rightarrow H(t,s) = \begin{cases} F(t,2s) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ G(t,2s-1) & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

* اثبات قسمت (۳) را از کتاب (صفحه ۵۶) مطالعه کنید.

* باتوجه به لم فوق می‌توان نتیجه گرفت که هموتوپی یک هم‌ارزی است و لذا فضای حلقه‌ها را می‌توان به کلاس‌های هم‌ارزی افراز کرد. بنابراین کلاس هم‌ارزی حلقه α ، $[\alpha]$ ، همه حلقه‌های هموتوپ با α می‌باشند.

* گروههای بنیادی (گروههای اساسی)

تعریف. مجموعه همه کلاس‌های هموتوپی حلقه‌ها در پایه x_0 را با $\pi_1(X,x_0)$ نمایش می‌دهیم. اگر $[\alpha]$ و $[\beta]$ متعلق به $\pi_1(X,x_0)$ باشند، درانصورت حاصلضرب $[\alpha] \circ [\beta]$ به صورت

$$[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha * \beta]$$

تعریف می‌شود. باتوجه به لم فوق نتیجه می‌گیریم که این ضرب خوش‌تعریف است.

قضیه ۲) $\pi_1(X, x_0)$ همراه با ضرب مذکور تشکیل یک گروه می‌دهد.

* در این گروه، کلاس هموتوپی حلقه ثابت در x_0 عضو خنثی گروه می‌باشد.

* $\pi_1(X, x_0)$ را گروه اول هموتوپی یا گروه بنیادی فضای توپولوژی (همبند مسیری) X می‌نامیم.

اثبات. در اینجا کافی است قانون شرکت پذیری ضرب را چک کنیم (بقیه واضح است). لذا باید نشان دهیم که

$$([\alpha]\circ[\beta])\circ[\gamma] = [\alpha]\circ([\beta]\circ[\gamma])$$

طبق تعریف عبارت فوق معادل است با

$$(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$$

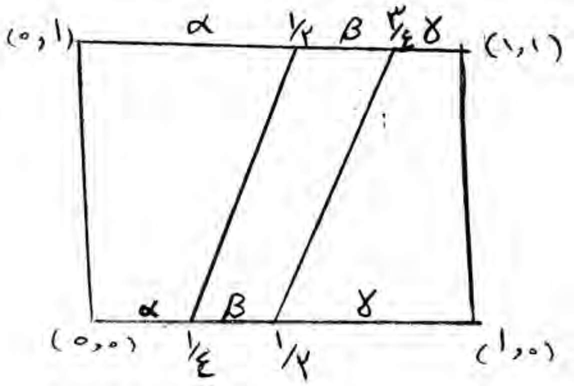
که برای اثبات این عبارت دو طرف تساوی را بیان می‌کنیم:

$$\alpha * (\beta * \gamma) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2) & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3) & \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

و

$$(\alpha * \beta) * \gamma = \begin{cases} \alpha(4t) & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1) & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

حال لازم است یک هموتوپی بین حلقه‌های فوق معرفی شود. برای این منظور از نمودار زیر کمک می‌گیریم:



بنابراین هموتوپی H به صورت زیر می‌باشد:

$$H(t,s)=\begin{cases}\alpha\left(\frac{4t}{s+1}\right) & 0\leq t\leq \frac{s+1}{4}\\ \beta(4t-s-1) & \frac{s+1}{4}\leq t\leq \frac{s+2}{4}\\ \gamma\left(\frac{4t-2-s}{2-s}\right) & \frac{s+2}{4}\leq t\leq 1\end{cases}$$

ولذا نتیجه به دست می‌آید. □

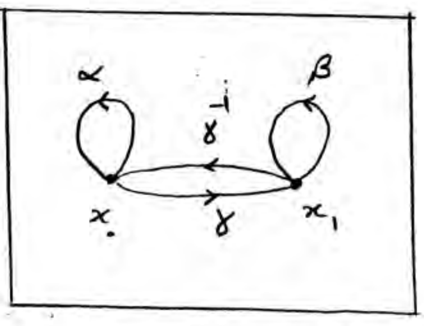
قضیه ۳) اگر X یک فضای توپولوژیک همبند مسیری باشد، در اینصورت برای هر دو نقطه $x_0, x_1\in X$، $\pi_1(X,x_0)$ با $\pi_1(X,x_1)$ یکریخت است.

اثبات. مسیر مثل γ از x_0 به x_1 را در X در نظر می‌گیریم. در اینصورت تعریف می‌کنیم

$$\sigma_\gamma : \pi_1(X,x_0)\rightarrow \pi_1(X,x_1)$$
$$([\alpha],x_0)\rightarrow([\gamma^{-1}*\alpha*\gamma],x_1)$$

$$\sigma_{\gamma^{-1}} : \pi_1(X,x_1)\rightarrow \pi_1(X,x_0)$$
$$([\beta],x_1)\rightarrow([\gamma*\beta*\gamma^{-1}],x_0)$$

واضح است که σ_γ و $\sigma_{\gamma^{-1}}$ یک یکریختی بین $\pi_1(X,x_0)$ و $\pi_1(X,x_1)$ القاء می‌کند.



تعریف. مسیر γ را می‌توان با مسیر σ ترکیب کرد هرگاه $\gamma(1)=\sigma(0)$. دراینصورت

$$\gamma * \sigma(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \sigma(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

* باتوجه به قضیه اخیر نتیجه می‌گیریم که گروه بنیادی به انتخاب x_0 وابسته نیست و فقط به فضای X مربوط است.

تعریف: دو فضای توپولوژی X و Y را از یک نوع هموتوپی گوییم هرگاه وجود داشته باشند توابع پیوسته $f: Y \to X$ و $g: X \to Y$ به طوریکه $f \circ g \simeq 1_Y$ و $g \circ f \simeq 1_X$ به عبارت دیگر $f \circ g$ و $g \circ f$ به ترتیب با 1_Y و 1_X هموتوپ باشند

قضیه ۴) اگر X و Y دو فضای همبند مسیری و از یک نوع هموتوپی باشند، دراینصورت $\pi_1(X,x_0)$ با $\pi_1(Y,y_0)$ یکریخت است

اثبات. قبل از اثبات قضیه ۴ به بیان یک لم مورد نیاز می‌پردازیم

* نتیجه: اگر X و Y دو فضای همبند مسیری هومئومورف باشند، آنگاه گروههای بنیادی آنها باهم یکریخت است.

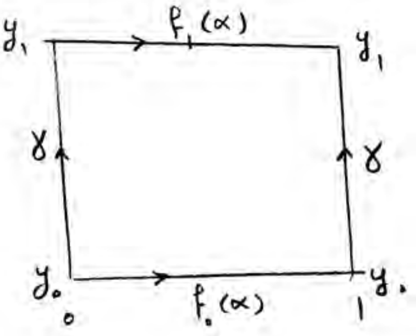
لم ۵) فرض کنیم $F: X \times I \to Y$ یک هموتوپی بین توابع $f_i: (X,x_0) \to (Y,y_i)$ (برای $i=0,1$) باشد و γ مسیری از y_0 به y_1 در Y باشد. دراینصورت داریم:

$$\sigma_\gamma * f_0^* = f_1^*$$

که در آن $f_i^*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_i)$ یک همریختی گروهی با ضابطه $f_i^*:([\alpha],x_0)\to([f(\alpha)],f(x_0))$

برای هر $i=0,1$ و $\sigma_\gamma:([\alpha],x_0)\to([\gamma^{-1}*f_0(\alpha)*\gamma],y_1)$ که $[\alpha]$ عضوی از $\pi_1(X,x_0)$ می‌باشد.

اثبات. از آنجایی که f_0 و f_1 هموتوپی هستند، لذا f_0^* و f_1^* همریختی گروهها می‌باشند. تابع $G:[0,1]\times[0,1]\to Y$ را با ضابطه $G(t,s)=F(\alpha(t),s)$ را که $\alpha(t)$ یک حلقه در x_0 از X است، مدنظر می‌گیریم. تصویر G به صورت زیر است.



از آنجایی که هر حلقه‌ای در $[0,1]\times[0,1]$ قابل انقباض است (می‌توان آن را در یک نقطه جمع کرد) و G یک تابع پیوسته است، لذا تصویر هر حلقه ای تحت G یک حلقه قابل انقباض در Y خواهد بود (با حلقه ثابت هموتوپ است). از آنجا که حلقه ثابت نماینده عضو خنثی در گروه بنیادی است لذا داریم:

$$[f_0(\alpha)*\gamma*f_1(\alpha)^{-1}*\gamma^{-1}] = \underbrace{\text{identity}}_{\text{عضو خنثی}}$$

یا $[f_1(\alpha)]=[\gamma^{-1}*f_0(\alpha)*\gamma]$ به این معنی که $f_1^*=\sigma_\gamma\circ f_0^*$ و نتیجه حاصل می‌شود.

□

اثبات قضیه ۴) از آنجا که X و Y از یک نوع هموتوپی هستند، توابع $f:X\to Y$ و $g:Y\to X$ و هموتوپی‌های F و H موجودند به طوری که

$$f\circ g \overset{F}{\simeq} 1_Y \quad , \quad g\circ f \overset{H}{\simeq} 1_X$$

از لم قبل نتیجه می‌شود که

$$\sigma_\gamma \circ 1_Y^* = (f\circ g)^* = f^*\circ g^*$$

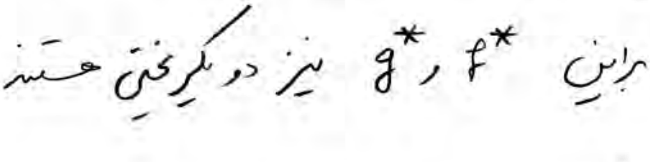
$$\sigma_{\gamma^{-1}} \circ 1_X^* = (g\circ f)^* = g^*\circ f^*$$

از قضیه ۳ نتیجه می‌گیریم که σ_γ و $\sigma_{\gamma^{-1}}$ یکریختی هستند و با توجه به روابط فوق، لذا $f^*\circ g^*$ و $g^*\circ f^*$ نیز یکریختی هستند. بنابراین g^* و f^* نیز دو یکریختی هستند و لذا قضیه ثابت می‌شود.

□

* توجه کنید که اگر دو فضای X و Y از یک نوع هموتوپی باشند لزوماً همئومورف نیستند و لذا از اینکه دو فضای توپولوژیک گروههای بنیادی یکسانی دارند نمی‌توان نتیجه گرفت که همئومورف هستند. مثال آن را بیان می‌کنیم:

مثال: فرض کنیم X یک منحنی بسته C و Y یک منحنی بسته همراه با پاره‌خط PQ باشد. مانند شکل



حال توابع $f:X\to Y$ با ضابطه $f(x)=x$ و $g:Y\to X$ با ضابطه

$$g(y)=\begin{cases} y & \text{if } y\in C \\ P & \text{if } y\in PQ \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. لذا $f\circ g\simeq 1_Y$, $g\circ f\simeq 1_X$ و بنابراین X و Y از یک نوع هموتوپی

هستند، در حالیکه به وضوح X و Y همیومورف نیستند. (اگر P را از X حذف کنیم ناهمبند نمی‌شود ولی اگر از Y حذف کنیم ناهمبند می‌شود)

تعریف: زیرمجموعه A از فضای توپولوژیک X را یک توکشیدگی (انقباض) از X گوییم اگر وجود داشته باشد یک تابع پیوسته مثل $r: X \to A$ به طوریکه $r(a) = a$ برای هر $a \in A$. به تابع r یک توکشیدگی یا انقباض گوییم.

تعریف. زیرمجموعه A از X را یک توکشیدگی تغییر شکل یافته (deformation retract) گوییم اگر وجود داشته باشد توکشیدگی $r: X \to A$ و هموتوپی $H: X \times [0,1] \to X$ به طوریکه $H(x,0) = x$ ، $H(x,1) = r(x)$ و $H(a,t) = a$ برای هر $a \in A$ و $t \in [0,1]$

قضیه ۶. اگر X یک فضای توپولوژیک همبند مسیری و A یک انقباض تغییر شکل یافته از آن باشد، در اینصورت برای هر $a \in A$، گروه $\pi_1(X,a)$ با $\pi_1(A,a)$ یکریخت می‌باشد.

اثبات. از تعریف انقباض تغییر شکل یافته نتیجه می‌شود که X و A از یک نوع هموتوپی هستند ولذا گروههای بنیادی آنها طبق قضیه ۴ باهم یکریختند.

مثال ۱. فضای n بعدی اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که $Y = \{0\}$ (فضای شامل تک نقطه صفر) یک توکشیدگی تغییر شکل یافته از $\mathbb{R}^n$ است. برای اثبات قرار می‌دهیم:

$$H: \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

که ضابطه آن:

$$H(x,t) = tx \quad , \quad t \in [0,1] \, , \, x \in \mathbb{R}^n$$

این تابع ادعای ما را نشان می دهد و لذا $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = \pi_1(\{0\}, 0) = identity$.

مثال ۲) کره S^{n-1} یک توکشیدگی تغییر شکل یافته از $D^n - \{0\}$ (دیسک واحد منهای مبدأ) می باشد. برای اثبات تعریف می کنیم:

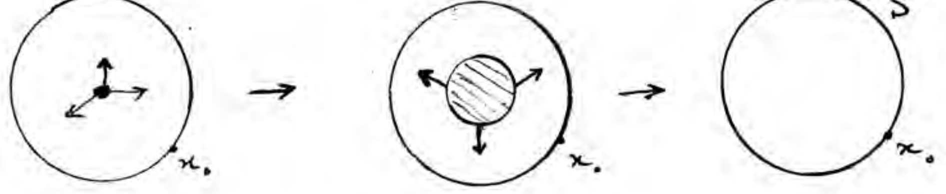
$$H : (D^n - \{0\} \times [0,1]) \longrightarrow (D^n - \{0\})$$

$$H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{|x|}$$

$$t \in [0,1] \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad |x| = \sqrt{(x \cdot x)}$$

می توان دید که H شرایط تعریف توکشیدگی تغییر شکل یافته را دارد.

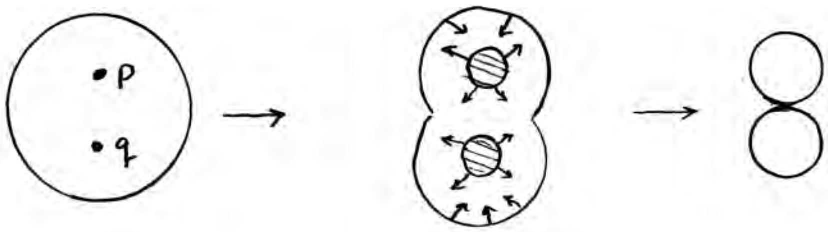
اگر قرار دهیم $n=2$ به شکل زیر توجه کنیم:



بنابراین $\pi_1(S^1, x_0)$ با $\pi_1(D^2 - \{0\}, x_0)$ یکریخت است. توجه کنیم که $\pi_1(S^1, x_0) \cong (\mathbb{Z}, +)$ (با توجه به اینکه یک حلقه چند بار S^1 را طی می کند و جهت آن چگونه است)

مثال ۳) دو دایره که در یک نقطه اشتراک دارند یک انقباض تغییر شکل یافته برای $B^2 - \{p\} - \{q\}$ (دیسک واحد که دو نقطه p و q را از آن برداریم) می باشد.

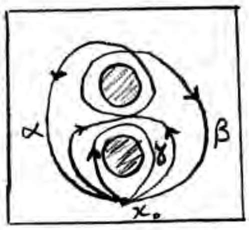
به جای نوشتن فرمول همدیوری، به شکل زیر توجه می‌کنیم:



بنابراین $\pi_1(D^2-\{p\}-\{q\},x_0)$ با $\pi_1(8,x_0)$ یکریخت است

گروه $\pi_1(8,x_0)$ یک گروه آبلی نیست زیرا در شکل زیر $\alpha \neq \beta$ و همچنین

$\gamma * \alpha * \gamma^{-1} \simeq \beta \neq \alpha$ و لذا گروه مورد نظر آبلی نیست.



شکل ۳.۱۳ کتاب ص <u>۴۶</u>

سادک ها (Simplexes)

تعریف. فرض کنیم $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ نقاط متمایزی از فضای $\mathbb{R}^n$ باشند. مجموعه نقاط $x_1, \dots, x_{m+1}$ مستقل هستند اگر m بردار

$$x_2-x_1,\ x_3-x_1,\ \dots,\ x_{m+1}-x_1$$

مستقل خطی باشند.

تعریف. یک m-ساده (m-simplex) که با σ^m نمایش می‌دهیم، مجموعه نقاطی از R^n به صورت زیر است:

$$\sigma^m = \left\{ x = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0 ,\ \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1 \right\}$$

که در آن $x_1, \dots, x_{m+1}$ مستقل هستند.

اغلب می‌نویسیم $\sigma^m = [x_1, \dots, x_{m+1}]$ و $x_1, \dots, x_{m+1}$ را رأس‌های ساده m-بعدی σ^m می‌نامیم.

تعریف. مجموعه $\{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{m+1} x_{m+1} \mid \lambda_j = 0\}$ وجه jام (jth face) نامیده می‌شود.

مثال. ساده دوبعدی σ^2 را در نظر بگیرید با بردارهای x_1, x_2 و x_3.
اگر $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ که λ_i ها همگی بزرگتر از صفر، در اینصورت x در داخل مثلث ایجاد شده توسط x_1, x_2, x_3 واقع می‌شود و اگر یکی از λ_i ها مثلاً $\lambda_3 = 0$، در اینصورت x در پاره‌خط واصل x_2 و x_3 قرار می‌گیرد.

تعریف: مجموعه‌ای متناهی (مثل K) از سادک‌ها در R^n را **مجتمع سادکی** (simplicial complex) گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱- اگر $\sigma^p \in K$، درانصورت همه وجوه σ^p متعلق به K باشد.

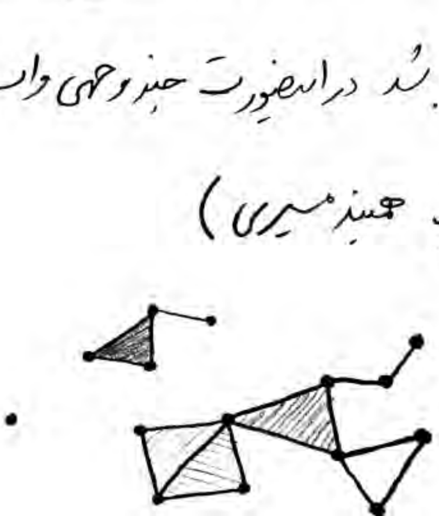
۲- اگر $\sigma^p, \sigma^q \in K$، درانصورت یا $\sigma^p \cap \sigma^q = \phi$ یا $\sigma^p \cap \sigma^q$ برابر با وجه مشترک σ^p و σ^q می‌باشد.

بعد مجتمع سادکی K که با $\dim K$ نمایش می‌دهیم برابر با ماکزیمم بعد سادکهای متعلق به K می‌باشد.

تعریف. مجتمع سادکی K را **همبند مسیری** گوییم اگر برای هر جفت رئوس u و v از K دنباله $v_0, v_1, \dots, v_n$ از رئوس ~~...~~ در K موجود باشد بطوریکه $u = v_0$ و $v = v_n$ و $v_i v_{i+1}$ یک سادک یک بعدی از K باشد برای هر i، $i = 0, 1, \dots, n-1$.

تعریف. اجتماع همه اعضای K نسبت به توپولوژی اقلیدسی را **چندوجهی وابسته** به K گوییم. اگر مجتمع سادکی همبند مسیری باشد درانصورت چندوجهی وابسته به آن نیز همبند مسیری است (به معنای فضای توپولوژیک همبند مسیری)

مثالی از یک مجتمع سادکی:



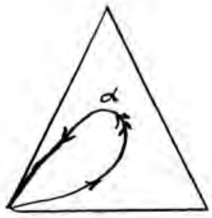
تعریف. زیرمجموعه H از گروه G را مولد G گوییم هرگاه هر عضو G را بتوان به صورت حاصلضرب توان‌های مثبت یا منفی اعضایی از H نوشت. اگر حاصلضرب تعدادی از اعضای H برابر با یک باشد، دراینصورت این حاصلضرب را یک رابطه بین اعضای مولد H می‌نامیم. اگر گروه G به طور کامل توسط مجموعه مولد H و رابطه‌های $\{r_i\}$ تعیین گردد، G را به طور کامل معین گوییم و این رابطه را رابطه کامل گوییم.

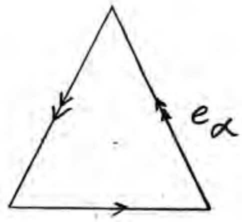
اگر H مجموعه مولد G و $\{r_i\}$ مجموعه کامل از روابط بین H باشد، دراینصورت زوج $(H, \{r_i\})$ را یک نمایش برای G گوییم

قضیه ۷) فرض کنیم K یک چندوجهی همبند مسیری و $a_\circ$ یک رأس آن باشد. همچنین فرض کنیم L یک زیرچندوجهی تک بعدی انقباض‌پذیر (به این معنی که با یک نقطه از یک نوع هموتوپی باشد) و شامل همه رئوس K باشد. اگر گروه G، یک گروه با مولدهای g_{ij} و رابطه $g_{ij}g_{jk}g_{ik}^{-1}=1$ باشد که در آن g_{ij} متناظر با یک ساده مرتب تک بعدی از K با رئوس $\{a_i, a_j\}$ است و رابطه $g_{ij}g_{jk}g_{ik}^{-1}=1$ متناظر با ساده دوبعدی مرتب با رئوس $\{a_i, a_j, a_k\}$ در $K-L$ می‌باشد. دراینصورت G یکریخت با گروه $\pi_1(K, a_\circ)$ است

اثبات. دراینجا فقط ایده‌ای از اثبات بیان می‌شود. دقت کنیم که اعضای

گروه بنیادی K حلقه‌های دلخواه بر پایه a_0 هستند، در حالیکه اعضای گروه G یال‌هایی از K (سادک‌های یک بعدی) می‌باشند. ابتدا نشان می‌دهیم که حلقه دلخواه α با حلقه یالی e_α از K هموتوپ است. این مطلب را می‌توان با کمک شکل زیر وقتی که $K=\sigma^2$ مشاهده کرد:

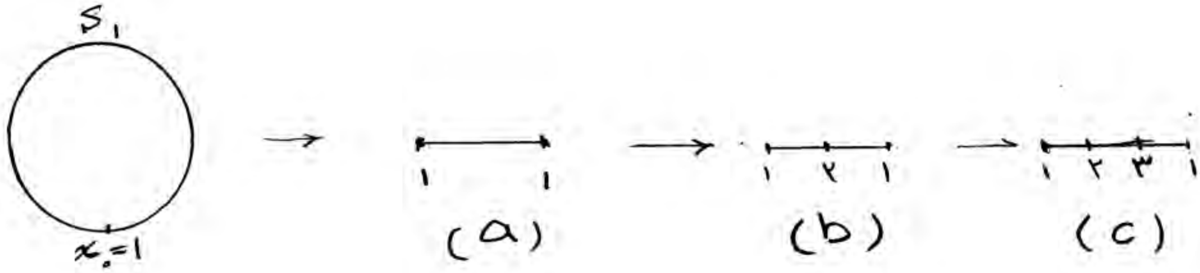




تعریف. فضای توپولوژیک X که با چندوجهی K همئومورف باشد را مثلثی شدنی گوییم و چندوجهی K را مثلث‌بندی X می‌نامیم. (K یکتا نیست)

* در واقع در فضای دوبعدی مثلث‌بندی همان بیان فضای توپولوژیک توسط مثلث‌های بهم چسبیده است. در این حالت مثلث‌ها یا ازهم جدا هستند، یا یک نقطه و یا یک یال مشترک دارند.

مثال ۱) به کمک قضیهٔ قبل می‌خواهیم $\pi_1(S_1, x_0)$ را محاسبه کنیم.



ابتدا طبق شکل فوق دایرهٔ S_1 را باز می‌کنیم به صورت (a). حال این پاره‌خط را به ساده‌ک‌ها افراز می‌کنیم. خود شکل (a) چون یک رأس دارد ساده‌ک یک بعدی نیست. رأس ۲ را اضافه می‌کنیم در شکل (b) می‌رسیم. چون فرض می‌کنیم که در (b) دو ساده‌ک مجزا داریم در حالیکه دو رأس ساده‌ک‌ها با هم برابر است. بنابراین لازم است یک رأس دیگر اضافه کنیم مانند شکل (c). لذا چندوجهی K_0 وابسته به S_1 در شکل (c) حاصل می‌شود که عبارتست از:

$$K_0 = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{1,2\} \cup \{1,3\} \cup \{2,3\}$$

بدین معنی که K_0 اجتماعی از ۳ ساده‌ک صفر بعدی و ۳ ساده‌ک ۱-بعدی می‌باشد.

$$L_0 = \{1,3\} \cup \{2,3\}$$

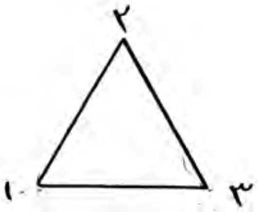
قرار می‌دهیم

دیده می‌شود که L_0 انقباض‌پذیر و یک بعدی است و همه رئوس K_0 را داراست.

طبق قضیه ۷، $g_{13}=g_{23}=1$ و $g_{12}=g$. بنابراین $\pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}$.

مثال ۲) محاسبه $\pi_1(D, x_0)$ که در آن $D=\{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2\le 1\}$

مثلث بندی D در شکل زیر ارائه شده است.



در اینصورت چندوجهی وابسته به D به صورت $K = K_0 \cup \{1,2,3\}$ می‌باشد که K_0 چندوجهی ارائه شده در مثال ۱ است. زیرچندوجهی یک بعدی

$$L = \{1,3\} \cup \{2,3\}$$

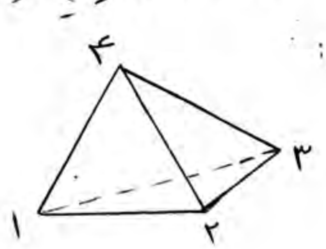
را درنظر می‌گیریم. L شرایط قضیه ۷ را داراست. بنابراین تنها عضوی که می‌تواند مخالف ۱ باشد عنصر g_{12} است. اما از طرفی بنابر سادک $\{1,2,3\}$ داریم:

$$g_{12} \cdot g_{23} \cdot g_{13}^{-1} = \{1\}$$

ازآنجایی که g_{13} و g_{23} برابر با ۱ هستند، لذا $g_{12}=1$ و بنابراین $\pi_1(K,x_0)$ گروه تولیدشده توسط عضوهایی است و داریم

$$\pi_1(D,x_0) = \pi_1(K,x_0) = \{1\}$$

مثال ۳) $\pi_1(S^2,x_0)$: ابتدا مثلث بندی زیر را درنظر می‌گیریم (سطح یک مخروط)



بنابراین مثلث بندی S^2 که به صورت :

$$K=\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}\cup$$
$$\{1,2\}\cup\{2,3\}\cup\{1,3\}\cup\{1,4\}\cup\{2,4\}\cup\{3,4\}\cup$$
$$\{1,2,4\}\cup\{2,3,4\}\cup\{1,3,4\}\cup\{1,2,3\}$$

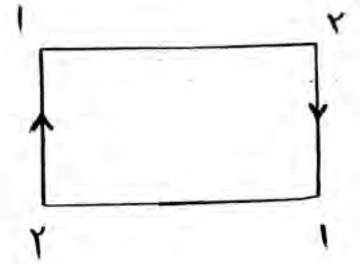
می‌باشد. زیرچندوجهی $L=\{1,2\}\cup\{2,3\}\cup\{3,4\}$ در قضیه ۷ صادق است. بنابراین

$g_{12}=g_{23}=g_{34}=\{1\}$ و از روابط کناری یک‌های دوبعدی به دست می‌آید

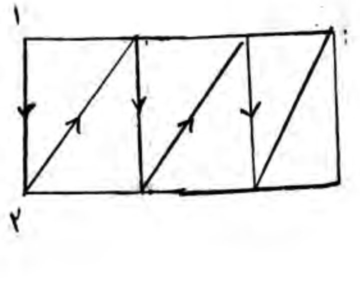
نتیجه می‌شود که $g_{14}=g_{24}=g_{13}=\{1\}$ و لذا $\pi_1(S^2,x_0)=\{1\}$.

مثال ۴) محاسبه گروه بنیادی نوار موبیوس :

ابتدا یادآوری می‌کنیم که نوار موبیوس از اتصال دو ضلع موازی یک مستطیل به صورت برعکس حاصل می‌شود. به شکل زیر :



حال مثلث بندی زیر را برای نوار موبیوس در نظر می‌گیریم :



بنابراین چندوجهی K به صورت :

$$\begin{aligned} K = &\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\} \\ &\{1,2\},\{1,3\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\} \\ &\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}, \\ &\{1,2,3\},\{1,2,6\},\{2,3,4\},\{2,5,6\}, \\ &\{3,4,5\},\{4,5,6\} \end{aligned}$$

بنابراین می‌توان L را به صورت زیر انتخاب کرد :

$$L = \{1,2\} \cup \{2,3\} \cup \{3,4\} \cup \{4,5\} \cup \{5,6\}$$

بنابراین $\{1\} = g_{12} = g_{23} = g_{34} = g_{45} = g_{56}$ و بقیه مولدها باید در ۶ رابطه به دست آمده از ۶ سادک دوبعدی صدق کنند و لذا داریم

$$g_{12}\, g_{23} = g_{13}$$

$$g_{24}\, g_{43} = g_{23}$$

$$g_{35}\, g_{54} = g_{34}$$

$$g_{46}\, g_{65} = g_{45}$$

$$g_{25}\, g_{56} = g_{26}$$

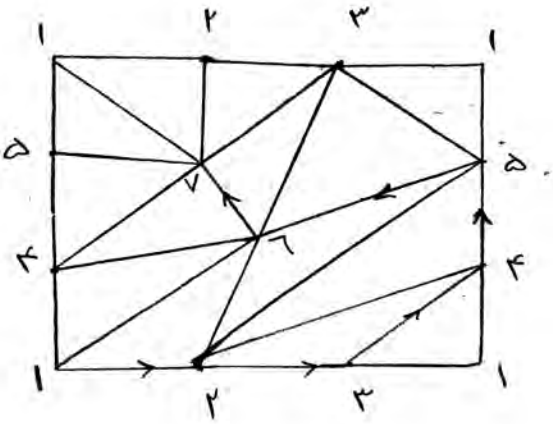
$$g_{12}\, g_{26} = g_{16}$$

بنابراین داریم: $g_{13} = g_{24} = g_{35} = 1$ ، $g_{25} = g_{26} = g_{16} = g$

و لذا $\pi_1(\text{mobus band}, x_0)$ توسط یک مولد تولید می‌شود پس یکریخت با $\mathbb{Z}$ است

مثال ۵) گروه بنیادی چنبره:

مثلث‌بندی چنبره را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



مثلث‌بندی K شامل ۷ سادک صفر بعدی، ۱۴ سادک ۱ بعدی و ۱۴ سادک دو بعدی است. (به عنوان تمرین تمام سادک‌ها را مشخص کنید.)

زیرچندوجهی L را به صورت $\{1,2\}\cup\{2,3\}\cup\{3,4\}\cup\{4,5\}\cup\{5,6\}\cup\{6,7\}$ در نظر می‌گیریم.

لذا $g_{12}=g_{23}=g_{34}=g_{45}=g_{56}=g_{67}=1$ و ۱۵ مولد باقیمانده که در ۱۴ رابطه نوشته شوند نتیجه می‌شود:

$$g_{13}=g_{14}=g_{64}=g_{47}=g_{75}=\underline{g}$$

$$g_{17}=g_{27}=g_{37}=g_{36}=g_{35}=\underline{k}$$

$$g_{16}=g_{26}=g_{25}=g_{24}=\underline{1}$$

(به عنوان تمرین روابط را بنویسید و نتیجه را به دست آورید) لذا گروه فوق دارای دو مولد g و k می‌باشد و لذا یکریخت است با $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

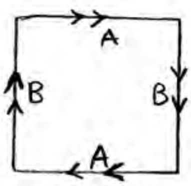
مثال ۶) گروه بنیادی صفحه تصویری :

یادآوری : صفحه تصویری از چسباندن اضلاع یک مربع واحد با ضابطه زیر به دست می آید

$$(0,y) \sim (1,1-y) \quad \text{for} \quad 0 \leq y \leq 1$$

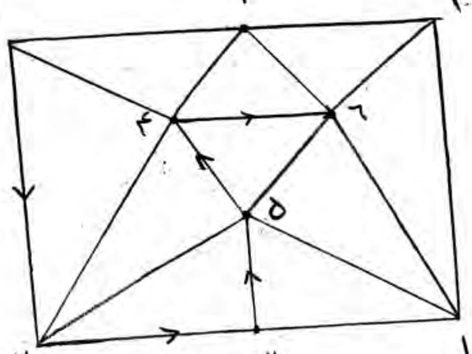
$$(x,0) \sim (1-x,1) \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq 1$$

مطابق شکل زیر:



صفحه تصویری قابل نشاندن در فضای ۳ بعدی نیست.

حال مثلث بندی زیر را برای صفحه تصویری در نظر می گیریم:



مثلث بندی فوق شامل ۶ سادک صفربعدی ، ۱۵ سادک یک بعدی و ۱۰ سادک ۲ بعدی است (سادک ها را به طور کامل بیابید). جهتی که در شکل مشخص شده است زیر چندوجهی ما را معرفی می کند. لذا $g_{12}=g_{23}=g_{34}=g_{45}=g_{56}=\{1\}$. اگر ۱۰ مولد باقیمانده را در ۱۰ رابطه به دست آمده از سادک های دو بعدی قرار دهیم ، داریم ،

$$g_{25}=g_{24}=g_{14}=g_{56}=1$$

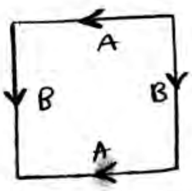
$$g_{13}=g_{61}=g_{15}=g_{62}=g_{63}=g_{43}=g$$

$$g^2=1$$

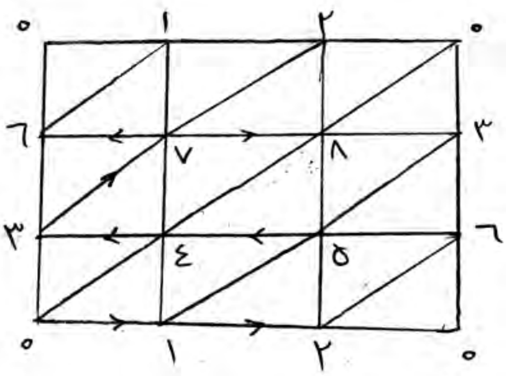
$$\Longrightarrow \quad \pi_1(\text{projective plane}) \simeq \mathbb{Z}_2$$

مثال ۷) گروه بنیادی سطح کلاین :

اگر دو سر یک استوانه را در جهت مخالف بهم بچسبانیم سطح کلاین حاصل می‌شود شکل زیر:



مثلث بندی زیر را برای سطح کلاین خواهیم داشت



مثلث بندی فوق شامل ۸ سادک صفر بعدی ، ۲۷ سادک ۱-بعدی و ۱۸ سادک ۲-بعدی است. بنابراین با توجه به ما مشخص شده در شکل فوق داریم:

$$g_{01}=g_{12}=g_{25}=g_{45}=g_{34}=g_{37}=g_{78}=g_{67}=1$$

و با توجه به روابط داریم:

$$g_{26}=g_{56}=g_{83}=g_{80}=g_{53}=g$$

$$g_{17} = g_{27} = g_{28} = g_{06} = g_{16} = k$$

$$g_{67} = g_{36} = g_{15} = g_{14} = g_{04} = g_{03} = g_{47} = g_{48} = g_{58} = 1$$

$$gkgk^{-1} = 1$$

بنابراین، $\pi_1(\text{klein bottle}) =$ گروه تولید شده توسط g و k با رابطه $gkgk^{-1}=1$

قضیه ۸) گروه بنیادی حاصلضرب دو فضای توپولوژیک X و Y برابر است با حاصلضرب گروههای بنیادی آنها، یعنی:

$$\pi_1(X \times Y,\, x_0 \times y_0) \simeq \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$$

* از آنجا که یک حلقه در $(X\times Y, x_0\times y_0)$ دقیقاً برابر جفت حلقه‌های (X, x_0) و (Y, y_0) است اثبات واضح است

مثال ۱) . چنبره T برابر است با حاصلضرب $S^1 \times S^1$. بنابراین

$$\pi_1(T, t_0) \simeq \pi_1(S^1, s_0) \times \pi_1(S^1, y_0) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

مثال ۲) استوانه C برابر است با حاصلضرب یک دایره و یک بازه بسته $[0,1]$ ، لذا:

$$\pi_1(C, c_0) = \pi_1(S^1, x_0) \oplus \pi_1([0,1], t_0) \simeq \mathbb{Z} \oplus \{0\} \simeq \mathbb{Z}$$

گروههای همولوژی

سادک های جهت دار و تعریف گروههای همولوژی

تعریف. یک p-سادک جهت دار از یک p-سادک $\sigma^p=[v_0, v_1, \dots, v_p]$ با انتخاب یک ترتیب روی رئوسش بدست می آید. کلاس هم ارزی جایگشت های زوج علامت مثبت و کلاس هم ارزی جایگشت های فرد علامت منفی به سادک جهت دار می دهد.

یک مجتمع سادکی که سادک های آن جهت دار باشند را مجتمع سادکی جهتدار گوییم.

مثال. اگر برای یک ۲-سادک جهت $+\sigma^2=[v_0, v_1, v_2]$ انتخاب شود، آنگاه داریم:

$$+\sigma^2=[v_0, v_1, v_2]=[v_1, v_2, v_0]=[v_2, v_0, v_1]$$

$$-\sigma^2=[v_0, v_2, v_1]=[v_2, v_1, v_0]=[v_1, v_0, v_2]$$

در ادامه یک گروه آبلی موسوم به گروه زنجیری $C_p(K)$ به هر p-سادک مجتمع سادکی K نظیر می کنیم.

تعریف. فرض کنیم K یک مجتمع سادکی n بعدی و شامل l_p سادک p-بعدی باشد. یک p-زنجیر از K، $C_p(K)$، یک گروه آبلی آزاد تولید شده توسط p-سادک های جهتدار K می باشد. بدین صورت که هر عضو دلخواه $c_p\in C_p(K)$ را می توان به صورت

$$c_p=\sum_{i=1}^{l_p} f_i\,\sigma_i^p, \quad f_i\in\mathbb{Z}$$

نوشت که در آن $\sigma_i^p+(-\sigma_i^p)=0, \ \forall i, p$

عمل این گروه:

$$\sum f_i \sigma_i^p + \sum g_i \sigma_i^p = \sum (f_i+g_i)\sigma_i^p$$

می‌باشد.

تعریف. عملگر مرزی ∂_p تابعی است،

$$\partial_p : C_p(K) \to C_{p-1}(K)$$

که خصوصیات زیر را داراست:

۱ـ خطی است یعنی $\partial_p(\sum f_i \sigma_i^p) = \sum f_i \partial \sigma_i^p$

۲ـ برای هر pـ سادک جهت‌دار

$$\sigma^p = [v_0, \dots, v_p]$$

$$\partial [v_0, \dots, v_p] = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p]$$

که در آن $[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p]$ به معنی $p-1$ـ سادک σ^{p-1} به دست آمده از σ^p با حذف رأس v_j می‌باشد.

۳ـ مرز هر زنجیر صفر، صفر تعریف می‌شود.

* به راحتی می‌توان نشان داد که ∂_p یک همریختی از $C_p(K)$ به $C_{p-1}(K)$ می‌باشد.

برای سادگی به جای ∂_p از ∂ استفاده می‌کنیم.

قضیه ۹)
$$\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$$

به عبارت دیگر یک ستاره چیزی وجهی خود ستاره ندارد.

اثبات.

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p \sigma^p = \partial_{p-1} \circ \partial_p [v_0, \ldots, v_p]$$
$$= \partial_{p-1} \left\{ \sum_{j=0}^{p} (-1)^j [v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_p] \right\}$$
$$= \sum (-1)^j \, \partial_{p-1} [v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_p]$$
$$= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \left\{ \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_p] + \sum_{j+1}^{p} (-1)^{i-1} [v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p] \right\}$$
$$= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_p] + \sum_{i>j} (-1)^{i+j-1} [v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p]$$
$$= \sum_{i<j} [(-1)^{i+j} + (-1)^{i+j-1}] [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_p]$$
$$= 0$$

تعریف. $z_p \in C_p(k)$ را دور p-بعدی یا p-دور گوییم هرگاه $\partial z_p = 0$.

بنابراین خانواده همه p-دورها برابر است با هسته همریختی $\partial : C_p \to C_{p-1}$ و لذا زیرگروهی از $C_p(k)$ می‌باشد. این زیرگروه، گروه دورهای p-بعدی از k نامیده می‌شود و آن را با $Z_p(k)$ نمایش می‌دهند.

تعریف. $b_p \in C_p(k)$ را سَتار p-بعدی یا p-ستار گوییم هرگاه وجود داشته باشد $(p+1)$ زنجیر c_{p+1} به طوریکه $\partial c_{p+1} = b_p$. بنابراین خانواده همه ستارهای p-بعدی تصویر همریختی $\partial C_{p+1}(k)$ می‌باشد که زیرگروهی از $C_p(k)$ است. این زیرگروه را گروه ستارهای p-بعدی از k نامیده می‌شود که با $B_p(k)$ نمایش می‌دهند.

توجه کنیم که طبق قضیه (۴.۱۲) برای هر عضو b_p از $B_p(k)$ داریم، $\partial b_p = 0$.

بنابراین $B_p(k)$ یک زیرگروه از $Z_p(k)$ می‌باشد.

تعریف. گروه همولوژی p-بعدی k که با $H_p(k)$ نمایش داده می‌شود گروه خارج قسمتی

$$H_p(k) = Z_p(k) / B_p(k)$$

می‌باشد. عضو h_p از $H_p(k)$ برابر با کلاس هم ارزی $[z_p]$ با رابطه هم ارزی

$$z_p^1 \sim z_p^2 \iff z_p^1 - z_p^2 \in B_p(k)$$

است.

چنین رابطه هم ارزی را همولوژی گوییم و z_p^1 و z_p^2 را درصورت هم ارز بودن همولوگ نامیم.

از آنجا که $Z_p(K)$ و $B_p(K)$ هر دو گروههای آبلی هستند، لذا گروه بودن $H_p(K)$ نتیجه می شود

قضیه ۱۰) فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک از یک نوع هموتوپی باشند درانصورت برای هر p داریم:

$$H_p(X) \cong H_p(Y)$$

قضیه ۱۱) اگر K_1 و K_2 دو مثلث بندی از یک فضای توپولوژیک مثل K باشند، داریم،

$$H_p(K_1) = H_p(K_2)$$

قضیه ۱۲) اگر K یک فضای انقباض پذیر (از یک نوع هموتوپی با یک تک نقطه) باشد، درانصورت

$$H_p(K) = \begin{cases} \{0\}, & p \neq 0 \\ Z, & p = 0 \end{cases}$$

برهان. از قضیه (۱۱) نتیجه می شود که $H_p(K) = H_p([v_0])$. بنابراین برای یافتن گروه همولوژی K، سادک صفر بعدی $\sigma^0 = [v_0]$ را درنظر میگیریم. بنابراین

بعد K برابر صفر است و $C_p(K)=\{0\}$ برای هر $p>0$ و لذا برای $p>0$ داریم
$H_p(K)=\{0\}$. برای $p=0$ توجه کنید که از آنجا که هر عضو c_0 از $C_0(K)$ دارای
این خاصیت است که $\partial c_0=0$، لذا داریم، $Z_0(K)=C_0(K)$. از طرف دیگر
چون هیچ سادکی با بعد بزرگتر از صفر نداریم، لذا $B_0(K)=\{0\}$. بنابراین داریم،

$$H_0(K)=Z_0(K)=\{z_0 \mid z_0=f[v_0],\ f\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}$$

و اثبات کامل می‌شود.

مثال‌های بعدی نشان می‌دهند که چگونه گروه‌های همولوژی محاسبه می‌گردند

مثال ۱) فرض کنیم $K=\sigma^2=[v_0,v_1,v_2]$. توجه کنیم که $\dim K=2$. بنابراین، با توجه
به تعریف برای هر $p>2$ داریم $C_p(K)=\{0\}$ و بنابراین برای $k>2$ داریم $H_k(K)=\{0\}$.
حال کافیست $H_0(K)$، $H_1(K)$ و $H_2(K)$ محاسبه گردد

$H_0(K)$: $Z_0(K)$ یعنی اعضایی از $C_0(K)$ مثل z_0 که $\partial z_0=0$. لذا بنا بر تعریف داریم
$Z_0(K)=C_0(K)$، چون هر زنجیر صفر بعدی مرزش صفر است. همچنین هر عضو $C_0(K)$
را می‌توان به صورت

$$a_0[v_0]+b_0[v_1]+c_0[v_2]$$

نوشت که $a_0,b_0,c_0\in\mathbb{Z}$، بنابراین $Z_0(K)$ سه مولد مستقل دارد و لذا

داریم، $Z_0(K)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^3$. حال لازم است که $B_0(K)$ را

بیابیم. توجه کنیم که $b_0\in B_0(K)$ اگر $b_0\in C_0(K)$ و $b_0=\partial c_1$ که $c_1\in C_1(K)$.

هر عضو $C_1(K)$ را می‌توان به صورت

$$c_1=a_1[v_0,v_1]+b_1[v_0,v_2]+c_1[v_1,v_2]$$

نوشت. بنابراین

$$\partial c_1=a_1([v_1]-[v_0])+b_1([v_2]-[v_0])+c_1([v_2]-[v_1])$$
$$=(a_1-c_1)[v_1]-(a_1+b_1)[v_0]+(b_1+c_1)[v_2]$$

بنابراین ~~هر عضو~~ b_0 از $B_0(K)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت؛

$$b_0=a_0[v_0]+b_0[v_1]+c_0[v_2]$$

که در آن $a_0+b_0+c_0=0$. این نشان می‌دهد که $B_0(K)$ دو مولد مستقل دارد. لذا

$B_0(K)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. حال $h_0\in H_0(K)$ را می‌توان به صورت هم دسته به صورت زیر نوشت:

$$h_0=z_0+B_0(K)$$
$$=a_0[v_0]+b_0[v_1]+c_0[v_2]+\{-a_0[v_0]-b_0[v_1]+(a_0+b_0)[v_2]\}$$
$$=(a_0+b_0+c_0)[v_2]=d_0[v_2]\ ,\ d_0\in\mathbb{Z}$$

بنابراین $H_0(K)$ دارای یک مولد مستقل است، لذا $H_0(K)\cong\mathbb{Z}$.

$H_1(K)$: از آنجا که $H_1(K)=Z_1(K)/B_1(K)$ ، لذا به محاسبه $Z_1(K)$ و $B_1(K)$ می‌پردازیم.

$z_1\in Z_1(K)$ اگر $z_1\in C_1(K)$ و $\partial z_1=0$. اگر $z_1\in C_1(K)$ باشد آنگاه

$$z_1 = a_1[v_0,v_1] + b_1[v_0,v_2] + c_1[v_1,v_2]$$

$$\partial z_1 = (a_1-c_1)[v_1] - (a_1+b_1)[v_0] + (b_1+c_1)[v_2]$$

بنابراین برای اینکه $\partial z_1=0$ باید

$$z_1 = a_1[v_0,v_1] - a_1[v_0,v_1] + a_1[v_1,v_2]$$

بدین معنی که $Z_1(K)\equiv\mathbb{Z}$.

حال $B_1(K)$ را بدست می‌آوریم. می‌دانیم که $b_1\in B_1(K)$ اگر $b_1\in C_1(K)$ و $b_1=\partial c_2$

برای $c_2\in C_2(K)$. هر عضوی از $C_2(K)$ را می‌توان به صورت

$$c_2 = a_2[v_0,v_1,v_2]$$

بنابراین

$$\partial c_2 = a_2\{[v_1,v_2] - [v_0,v_2] + [v_0,v_1]\}$$

لذا هر عضو $b_1\in B_1(K)$ را می‌توان به صورت

$$b_1 = a_2\{[v_1,v_2] - [v_0,v_2] + [v_0,v_1]\}$$

که نشان می‌دهد $B_1(K)\equiv\mathbb{Z}$ و لذا $H_1(K)\equiv\{0\}$.

$H_2(K)$: برای محاسبه $Z_2(K)$ ، طبق محاسبات فوق وقتی $\partial z_2 = 0$ که $a_2 = 0$.

همچنین از آنجا که سادک سه بعدی نداریم $B_2(K)=\{0\}$ و لذا $H_2(K)=\{0\}$.