قضیه. (قضیه شکافت) فرض کنیم K یک مجتمع سادکی شامل زیرمجتمع بسته L و L_0 نیز یک زیرمجتمع باز در L باشد که $\bar{L_0}$ (بستار L_0) در درون L قرار دارد. دراینصورت

$$H_p(K;L) = H_p(K-L_0\,;\,L-L_0)$$

ارتباط بین $H_p(L)$ و $H_p(K)$: از آنجا که $L \subseteq K$ بنابراین نگاشت شمول زیر را داریم،

$$i: C_p(L) \longrightarrow C_p(K)$$

این نگاشت همریختی گروهی زیر را القا می‌کند،

$$i^*: H_p(L) \longrightarrow H_p(K)$$

رابطه بین $H_p(K)$ و $H_p(K;L)$: این ارتباط توسط همریختی زیر بیان می‌گردد:

$$j: C_p(K) \longrightarrow C_p(K;L)$$

$$j[c_p] = c_p + C_p(L)\,,\quad c_p \in C_p(K)$$

لذا j یک همریختی به صورت زیر القا می‌کند،

$$j^*: H_p(K) \longrightarrow H_p(K;L)$$
$$[z_p] \longrightarrow [j(z_p)]$$

از آنجا که $j[\partial c_p] = \partial c_p + C_{p-1}(L)$ ، همچنین داریم :

$\bar{\partial}[j(C_p)] = \bar{\partial}[c_p + C_p(L)] = \partial c_p + C_{p-1}(L)$ ، لذا می‌توان نتیجه گرفت :

$$j\partial = \bar{\partial} j$$

ارتباط بین $H_p(k,L)$ و $H_{p-1}(L)$:

$$\partial^* : H_p(k;L) \to H_{p-1}(L)$$

$$\partial^*([z_p + C_p(L)]) = [\partial z_p]$$

تعریف . یک دنباله همولوژی از مجتمع سادکی K با زیر مجتمع L، یک دنباله از گروهها و همریختی‌ها به صورت زیر می‌باشد ،

$$\cdots \xrightarrow{\partial^*} H_p(L) \xrightarrow{i^*} H_p(k) \xrightarrow{j^*} H_p(k,L) \xrightarrow{\partial^*} H_{p-1}(L) \xrightarrow{i^*} \cdots$$

* دنباله همولوژی فوق خواص زیر را دارد :

۱) دنباله همولوژی یک دنباله دقیق است بدین معنی که تصویر هر همریختی در این دنباله برابر است با هسته همریختی بعدی آن . از سه گزاره زیر دقیق بودن نتیجه می‌شود :

i) $\text{Image } i^* \subset \ker j^*$

ii) $\ker j^* \subset \text{Image } i^*$

iii) $\text{Image } j^* \subset \ker \partial^*$

iv) $\ker \partial^* \subset \text{Image } j^*$

v) $\text{Image } \partial^* \subset \ker i^*$

vi) $\ker i^* \subset \text{Image } \partial^*$

توجه کنیم که براساس تعریف ∂^* عنصر $z_p+C_p(L)$ را به عنصر ∂z_p در $C_{p-1}(L)$ می‌نگارد. از آنجا که ∂z_p یک عضو ستاری است، لذا در هسته همریختی شمول یعنی i^* قرار می‌گیرد و لذا قسمت (v) به دست می‌آید. حال فرض کنیم b_{p-1} یک عضو از هسته i^* باشد. با توجه به تعریف داریم $b_{p-1}=\partial z_p$ که $z_p \in H_p(L)$ که آن را می‌توان به صورت $z_p+C_p(L)$ در $H_p(K,L)$ نوشت، چون $\partial[z_p+C_p(L)]=0$. بنابراین قسمت (vi) به دست می‌آید. بقیه موارد را خودتان اثبات کنید.

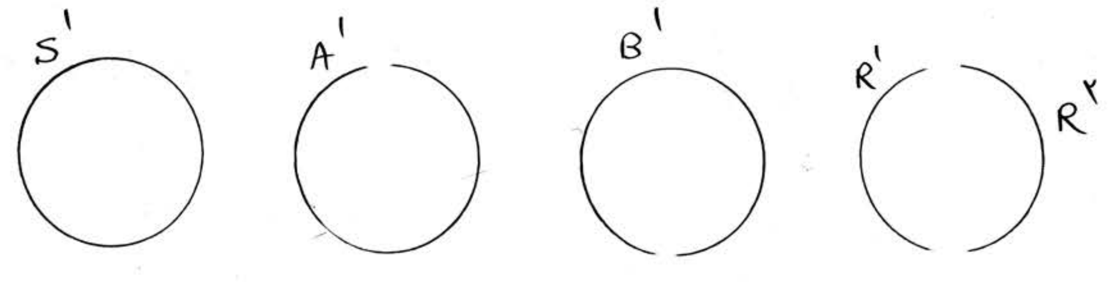
قضیه. فرض کنیم دنباله زیر دقیق باشد:

$$\{0\} \to A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} \{0\}$$

در اینصورت g یک یکریختی از A به B است.

* چند مثال بعد نشان می‌دهد که چگونه از دنباله‌های دقیق و قضیه شکافت برای محاسبه گروه‌های همولوژی استفاده می‌شود

مثال ۱- می‌خواهیم نشان دهیم که برای $p>1$، $H_p(S^1)=\{0\}$. قرار دهیم $A^1=S^1-[n]$ که در آن $[n]$ نقطه شمالی دایره S^1 است. همچنین $B^1=S^1-[s]$ که $[s]$ نقطه جنوبی دایره S^1 است. دیده می‌شود که $A^1\cup B^1=S^1$، $X^1=A^1\cap B^1=R_1\cup R_2$ که $R_1\cap R_2=\emptyset$، مطابق شکل



حال به دنباله های دقیق زیر برای $p>1$ توجه کنید :

$$* \left\{ \to H_p(A^1) \to H_p(S^1) \to H_p(S^1,A^1) \to H_{p-1}(A^1) \to H_{p-1}(S^1) \to \dots \right.$$

$$** \left\{ \begin{array}{l} \to H_p(X^1) \to H_p(B^1) \to H_p(B^1,X^1) \to H_p(X^1) \to H_{p-1}(X^1) \to \\ \to H_{p-1}(B^1) \to \dots \end{array} \right.$$

توجه کنیم که A^1 و B^1 دو فضای انقباض پذیر هستند و لذا

$$H_p(A^1) = H_p(B^1) = \{0\} \quad , \quad p>1$$

بنابراین دنباله های * و ** به صورت زیر تبدیل می شوند :

$$\{0\} \to H_p(S^1) \to H_p(S^1,A^1) \to \{0\}$$

$$\{0\} \to H_p(B^1,X^1) \to H_{p-1}(X^1) \to \{0\}$$

قضیه قبل را استفاده کرده و نتیجه می گیریم که

$$H_p(S^1) = H_p(S^1,A^1)$$

$$H_p(B^1,X^1) = H_{p-1}(X^1)$$

حال با برداشتن نقطه $[s]$ از S^1 و A^1 و با استفاده از قضیه شکافت داریم:

$$H_p(S^1,A^1) = H_p(S^1-[s], A^1-[s]) = H_p(B^1,X^1)$$
$$= H_{p-1}(X^1)$$

X^1 قابل انقباض به دو نقطهٔ $[e]$ و $[w]$ است و چون بعدش صفر است لذا داریم:

$$H_{p-1}(X^1) = H_{p-1}([e],[w]) = \{0\}$$

برای $p>1$ و لذا نتیجه به دست می‌آید.

مثال‌های ۲ و ۳ از صفحات ۱۰۳ و ۱۰۲ کتاب مطالعه شود.

$C_p(K,Q)$ شامل اعضای به صورت

$$c_p = \sum_{i=1}^{l_p} g_i \sigma_i^p \quad , \quad g_i \in Q$$

یعنی ضرایب به جای $\mathbb{Z}$ از Q می‌آیند. به همین صورت می‌توان $H_p(K,Q)$ را مشابه $H_p(K)$ تعریف کرد.

* دقت کنیم که گروه تابدار $H_p(K,Q)$ برابر صفر است و لذا $H_p(K,Q)$ یک گروه آبلی آزاد است.

فرمول کانث

$$H_p(X \times Y ; Q) = \bigoplus_{k+q=p} H_k(X;Q) \otimes H_q(Y;Q)$$

مثال. می‌خواهیم با استفاده از فرمول فوق $H_p(T^2)$ را که $T^2 = S^1 \times S^1$ یک ۲-چنبره است، محاسبه کنیم.

می دانیم که $H_p(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p=0 \\ \{0\}, & p \geq 1 \end{cases}$ ، بنابراین طبق فرمول فوق داریم،

$$H_0(T^2) = H_0(S^1 \times S^1) = H_0(S^1) \otimes H_0(S^1) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$$

$$H_1(T^2) = H_0(S^1) \otimes H_1(S^1) \oplus H_1(S^1) \otimes H_0(S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$$

$$H_2(T^2) = H_0(S^1) \otimes H_2(S^1) \oplus H_1(S^1) \otimes H_1(S^1) \oplus H_2(S^1) \times H_0(S^1)$$

$$= \mathbb{Z}$$

$$H_p(T^2) = \{0\}, \quad p \geq 3$$

فرمول اویلر - پوانکاره :

برای مجتمع سادکی K داریم :

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p l_p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p R_p(K)$$

که در آن l_p تعداد p-سادک های K می باشد و $R_p(K) = \dim(H_p(K))$.

$R_p(K)$ در واقع رتبه $H_p(K)$ می باشد که با تعداد حفره های $(p+1)$ بعدی موجود در K مرتبط است .

برهان .

$$l_p = \dim(C_p(K)) = \dim(Z_p(K)) + \dim(B_{p-1}(K))$$

$$R_p = \dim(H_p(K)) = \dim(Z_p(K)) - \dim(B_p(K))$$

از آنجایی که $B_n = 0$ بنابراین $\sum_{p=0}^{n} (-1)^{p+1} \dim(B_p(K)) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim(B_{p-1}(K))$

ولذا حکم به دست می آید

تعریف: نگاشت پیوسته $\alpha : I^n \to X$ را n-حلقه گوییم هرگاه α رویه ∂I^n را به یک نقطه $x_0 \in X$ بنگارد. در اینصورت α را n حلقه بر پایه x_0 گوییم.

تعریف: فرض کنیم α و β دو n-حلقه باشند در اینصورت $\gamma = \alpha \circ \beta$ یک n-حلقه است که

$$\gamma(t_1, \dots, t_n) = \alpha * \beta(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \dots, t_n) & 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & 1/2 \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

α و β را هموتوپ گوییم اگر نگاشت پیوسته $H(s; t_1, \dots, t_n)$ ، $1 \geq s \geq 0$ به طوریکه

$$H(0; t_1, \dots, t_n) = \alpha(t_1, \dots, t_n)$$

$$H(1, t_1, \dots, t_n) = \beta(t_1, \dots, t_n)$$

$$H(s, t_1, \dots, t_n) = x_0 \quad \text{if } (t_1, \dots, t_n) \in \partial I_n ; \forall s$$

لم:

۱) اگر $\alpha \simeq \alpha'$ و $\beta \simeq \beta'$ در اینصورت $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$

۲) $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$

۳) $e * \alpha \simeq \alpha * e$

۴) اگر $\alpha \simeq \alpha'$ $\Leftarrow$ $\alpha^{-1} \simeq (\alpha')^{-1}$

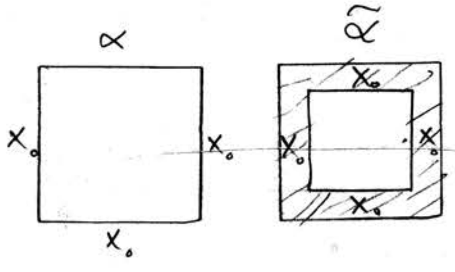
۵) $\alpha * \alpha^{-1} \simeq \alpha^{-1} * \alpha \simeq e$

$$\alpha^{-1}(t_1,\dots,t_n)=\alpha(1-t_1,t_2,\dots,t_n)$$

* کلاس‌های هموتوپی n-حلقه‌های بر پایه x_0 همراه با عمل $[\alpha]\circ[\beta]=[\alpha*\beta]$ تشکیل یک گروه می‌دهد که آن گروه هموتوپی n-بعدی، $\pi_n(X,x_0)$ گوییم.

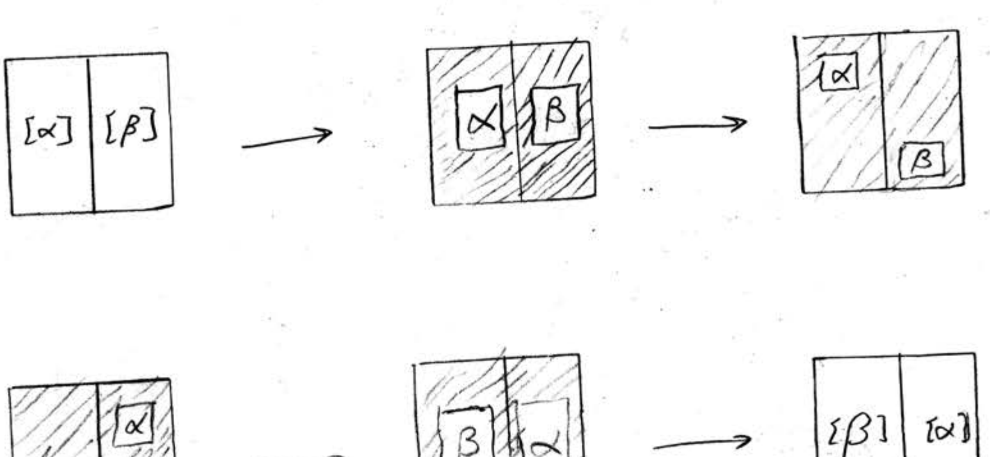
قضیه. گروه هموتوپی $\pi_n(X,x_0)$ برای هر $n>1$ یک گروه آبلی است.

برهان. با توجه به شکل زیر می‌بینیم که α و $\tilde{\alpha}$ هموتوپ هستند: (با شکل برای $n=2$ حکم را نشان می‌دهیم و برای $n>2$ مشابهاً اثبات می‌شود)



در α نقاط $\partial(I_2)$ به x_0 می‌روند ولی در $\tilde{\alpha}$ قسمت‌های هاشورخورده همگی به x_0 می‌روند.

با توجه به این شکل می‌توان هموتوپی $\alpha*\beta$ و $\beta*\alpha$ را در شکل زیر نشان داد:



توجه کنید $\alpha*\beta$ به معنی اتصال دو n-حلقه α و β در یک ضلع از I^n می‌باشد. تفاوت $n=1$ با $n>1$ در این است که برای $n=1$، ∂I_1 همبند نیست. لذا این حکم برای $n=1$ برقرار نیست.