Complex

اعداد مختلط

number

$$C = \left\{ x + iy \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \qquad , \qquad i = \sqrt{-1} \right\}$$

نماد گذاری

$$Z = x + iy \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \operatorname{Re}(z) & \text{قسمت حقیقی} \\ y = \operatorname{Im}(z) & \text{قسمت موهومی} \end{cases}$$

تعریف:

$$Z_1 = Z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \end{cases}$$

یعنی:

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

مثال)

$$Z_1 = \frac{a + 2bi}{3}$$

$$Z_2 = \frac{a - b + i}{4}$$

$$Z_1 = Z_2$$

$$\longrightarrow \quad a = ? \quad , \quad b = ?$$

راه حل)

$$Z_1=\frac{a+2bi}{3}=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}bi$$

$$Z_2=\frac{a-b+i}{4}=\frac{a-b}{4}+\frac{1}{4}i$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}a=\frac{a-b}{4}\\ \frac{2}{3}b=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\boxed{b=\frac{3}{8}}\ ,\ \boxed{a=\frac{-9}{8}}$$

توجه :

تعاریف زیر را در نظر می گیریم

$$0 + ai = ai$$

$$1\,i = i$$

$$0\,i = 0$$

اعمال جبری روی اعداد مختلط

$Z_1 = x_1 + y_1 i$

$Z_2 = x_2 + y_2 i$

تعریف عمل جمع : $Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$

تعریف عمل ضرب : $Z_1 \times Z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$

در واقع

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$$

$$\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$$

خواص عمل جمع و عمل ضرب

1	$Z+0=0+Z=Z$	عضو خنثی
2	$Z1=1Z=Z$	عضو خنثی
3	$Z0=0Z=0$	
4	$Z_1+Z_2=Z_2+Z_1$	خاصیت جابجایی
5	$Z_1\times Z_2=Z_2\times Z_1$	خاصیت جابجایی
6	$(Z_1+Z_2)+Z_3=Z_1+(Z_2+Z_3)$	خاصیت شرکت پذیری
7	$(Z_1\times Z_2)\times Z_3=Z_1\times(Z_2\times Z_3)$	خاصیت شرکت پذیری
8	$Z_1\times(Z_2+Z_3)=Z_1Z_2+Z_1Z_3$	خاصیت توزیع پذیری

تعریف : با فرض $z=x+yi$ و $\alpha\in R$ تعریف می کنیم .

$$\alpha z=\alpha x+\alpha yi$$

توجه

$$i.i=(0+1i)(0+1i)=(0-1)+i(0-0)=-1$$

تعریف : قرینه عدد مختلط $z=x+iy$ را نسبت به عمل جمع را نماد $-Z$

نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$-z=(-1)z=-x-yi$$

تعریف : وارون عدد مختلط $z \neq 0$ را با نماد z^{-1} نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$z\,z^{-1} = z^{-1}z = 1$$

وارون $z \neq 0$ را با نماد $\frac{1}{z}$ نیز نمایش می دهند .

قضیه :

$$\boxed{Z = a+bi \quad \xRightarrow{z \neq 0} \quad \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i}$$

توان در اعداد مختلط: $Z \in \mathbb{C}$

تعریف $\begin{cases} Z^{\circ} = 1 \\ Z^{n} = Z^{n-1}.Z & (n \in N) \end{cases}$

$$i^{\circ} = 1$$
$$i = \sqrt{-1}$$
$$i^{2} = -1$$
$$i^{3} = i^{2}.i = -i$$
$$i^{4} = i^{2}.i^{2} = 1$$

$\xrightarrow{\text{به طور کلی}}$

$$i^{4k} = 1$$
$$i^{4k+1} = i$$
$$i^{4k+2} = -1$$
$$i^{4k+3} = -i$$

نکته :

چهار عمل اصلی در اعداد مختلط ←

مانند چهار عمل اصلی در چند جمله ایها با توجه به توانهای مختلف i

نکته :

مجموعه اعداد مختلط نسبت به چهار عمل تعریف شده $(+), (-), (\times), (\div)$ بسته است .

مثال)

$$(-2+3i)(3-4i)=-6+8i+9i+12=6+17i$$

$$(-1+i)^3=(-1)^3+3(-1)^2i+3(-1)i^2+i^3=-1+3i+3-i=2+2i$$

توجه :

در عبارات کسری ابتدا مخرج کسر را محاسبه می کنیم تا به صورت عدد مختلط $a+bi$ درآید . سپس با ضرب صورت و مخرج کسر در عبارت $(a-bi)$ کسر به صورت یک عدد حقیقی تبدیل می شود .

مثال)

$$Z = 2+3i \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{Im}\left(z^{-1}\right) = ?$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{2+3i} = \frac{1}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13} i$$

$$\Rightarrow \qquad \operatorname{Im}\left(z^{-1}\right) = \frac{-3}{13}$$

مثال)

عبارات زیر را به صورت یک عدد مختلط بنویسید .

الف) $$I=\frac{\left(2i^3-3\right)\left(i^7-2i+1\right)}{\left(4i^2-2i-1\right)\left(i-1\right)}$$

$$I=\frac{(-2i-3)(-i-2i-1)}{(-4-2i-1)(i-1)}=\frac{(-2i-3)(-3i-1)}{(-2i-5)(i-1)}=\frac{-6+2i+9i+3}{2+2i-5i+5}$$

$$=-\frac{-3+11i}{7-3i}\times\frac{7+3i}{7+3i}=\frac{-21-9i+77i-33}{49+9}$$

$$=\frac{-54+68\,i}{58}$$

ب) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{101}$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+2i-1}{1-(-1)}=i$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{101}=i^{101}=i^{(25\times4)+1}=\left(i^{4}\right)^{25}.i=i$$

تعبیر هندسی

اعداد مختلط

محور x : محور حقیقی

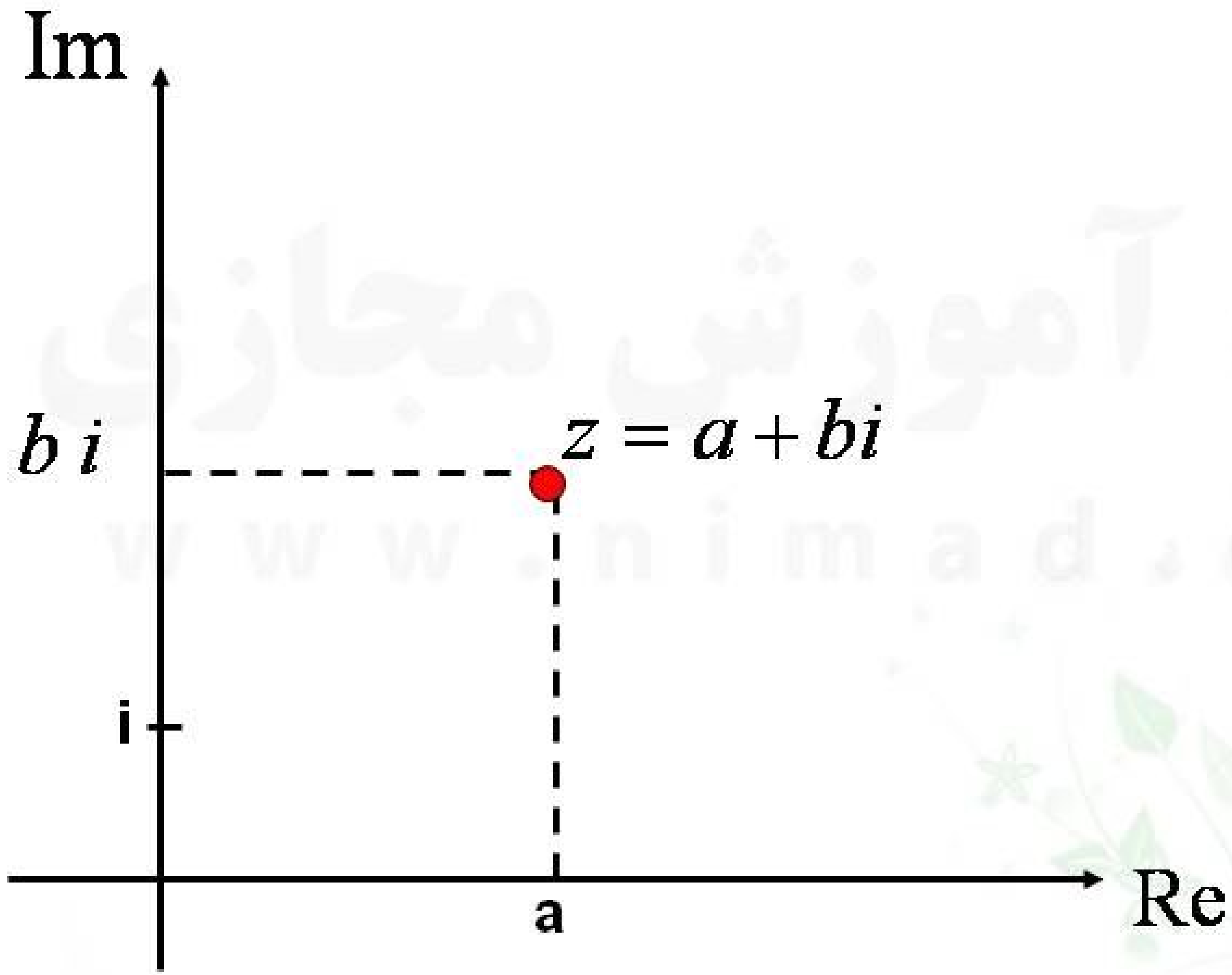
محور y : محور موهومی

صفحه ای که در محور x و y قراردارد : صفحه مختلط

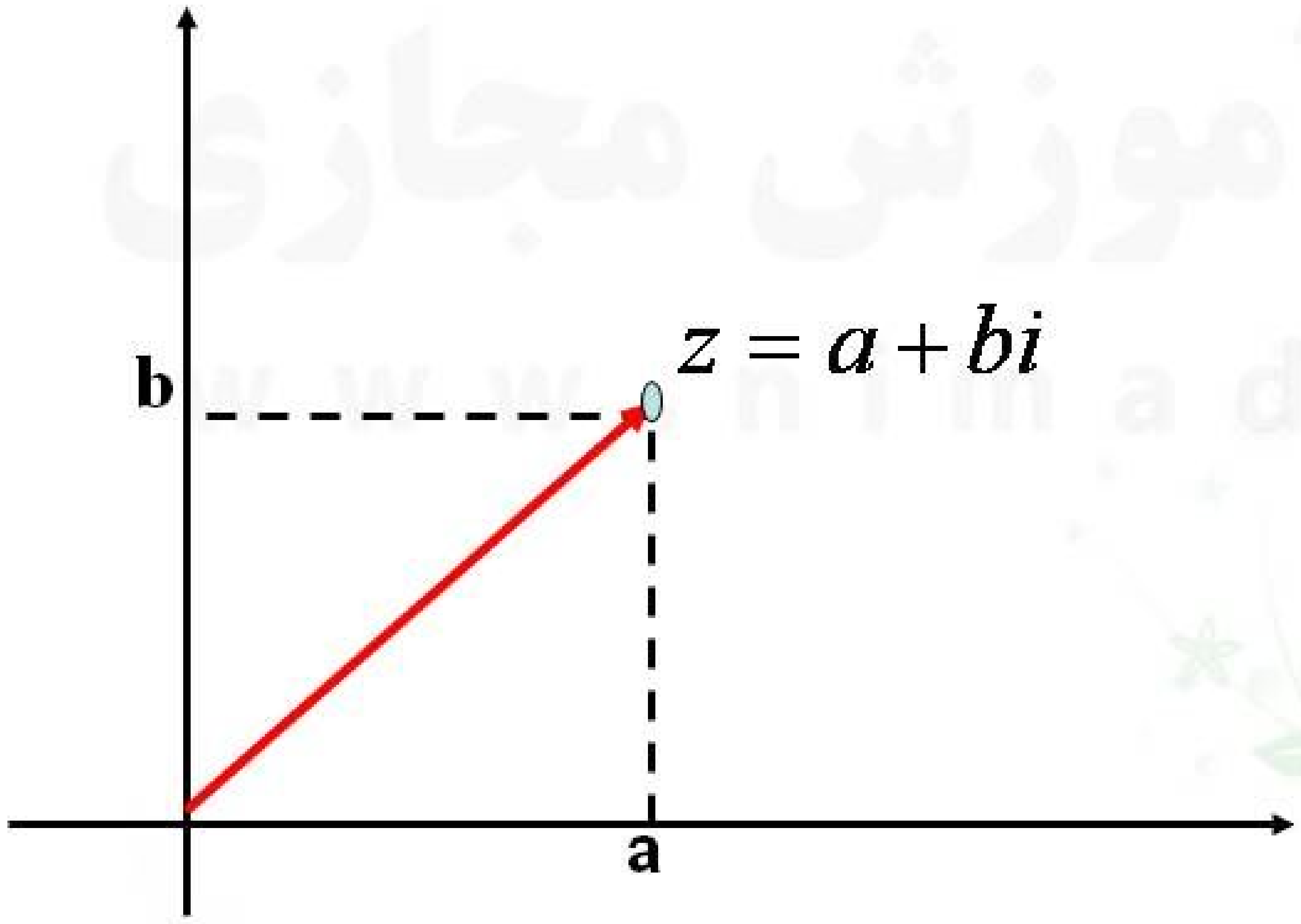
نقاط صفحه $\xrightarrow[\text{1-1}]{\text{متناظر}}$ **اعداد مختلط**

$$Z = a + bi \xrightarrow{\text{نمایش هندسی}} (a, b)$$

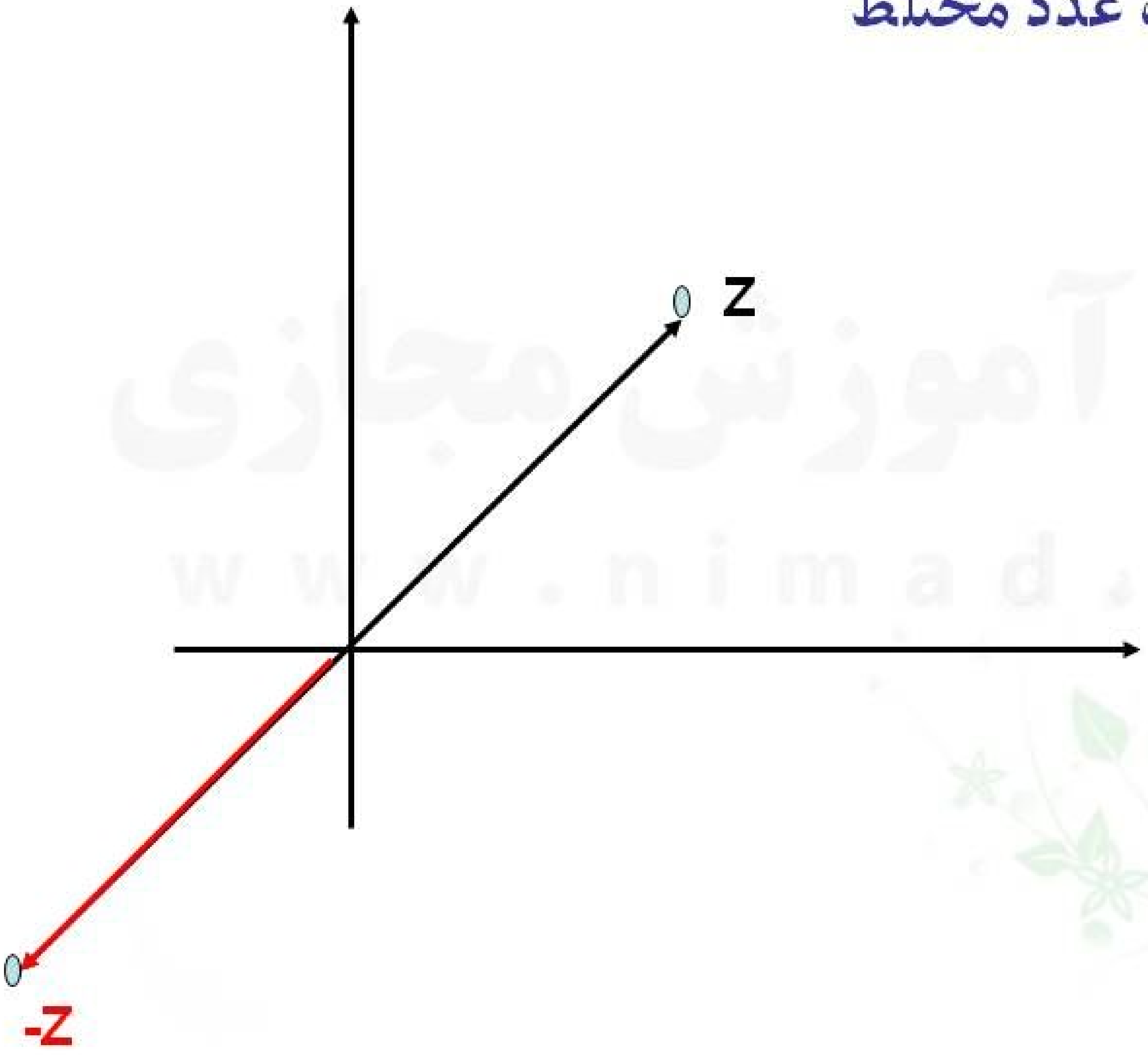
نمایش هندسی عدد مختلط با یک نقطه



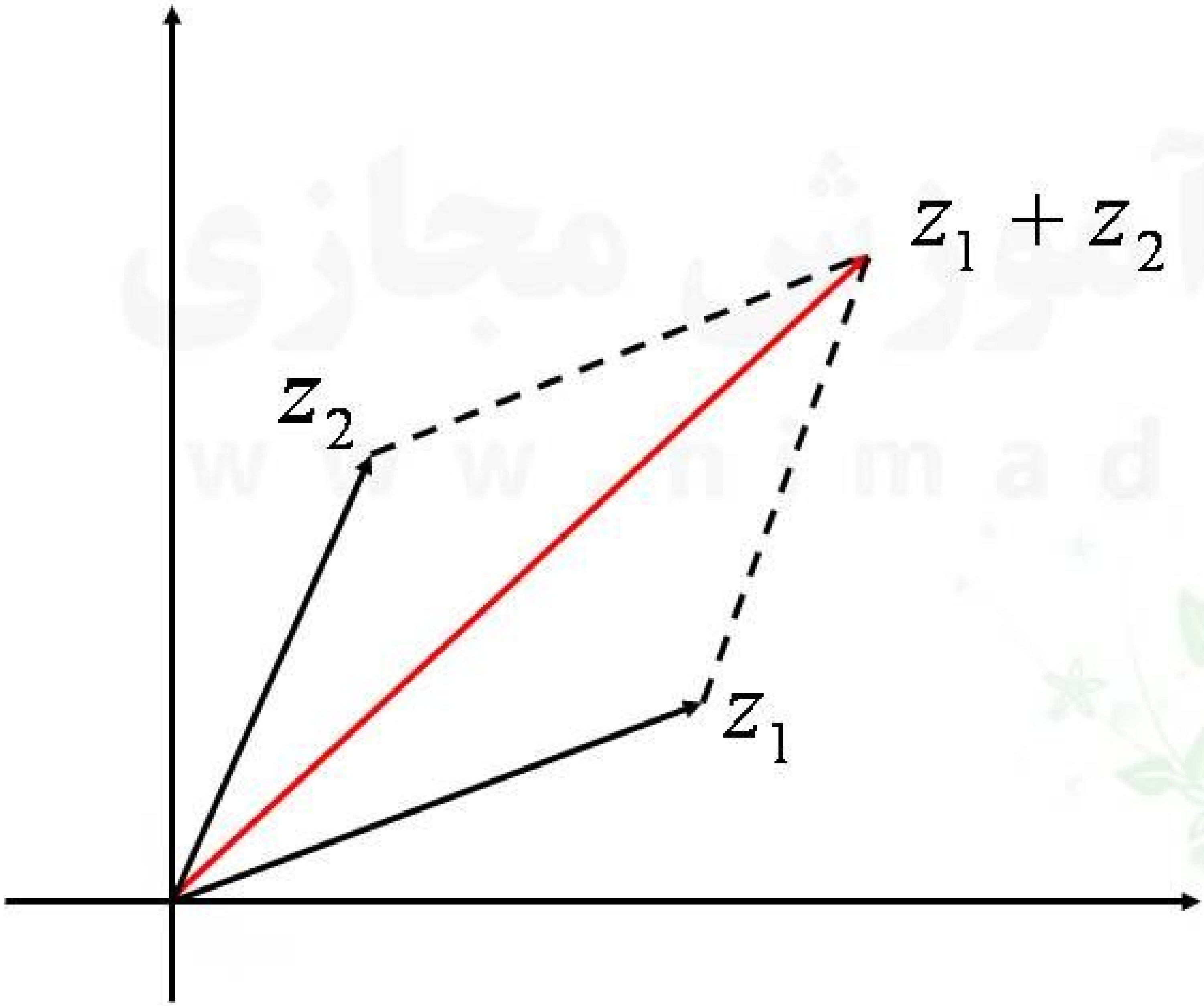
نمایش برداری اعداد مختلط



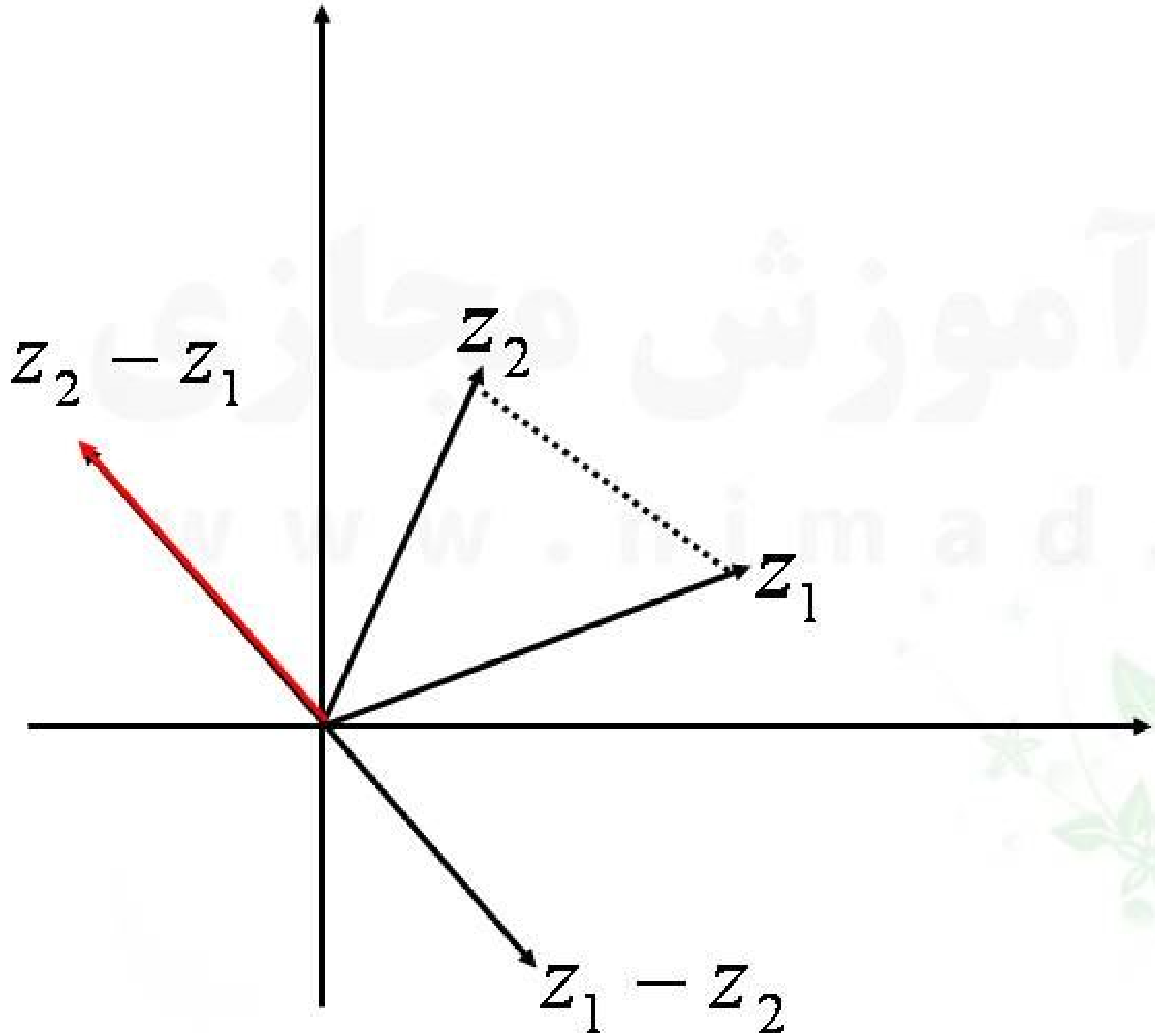
نمایش قرینه یک عدد مختلط



نمایش هندسی جمع اعداد مختلط به وسیله قانون متوازی الاضلاع



نمایش هندسی تفریق اعداد مختلط به وسیله قانون متوازی الاضلاع



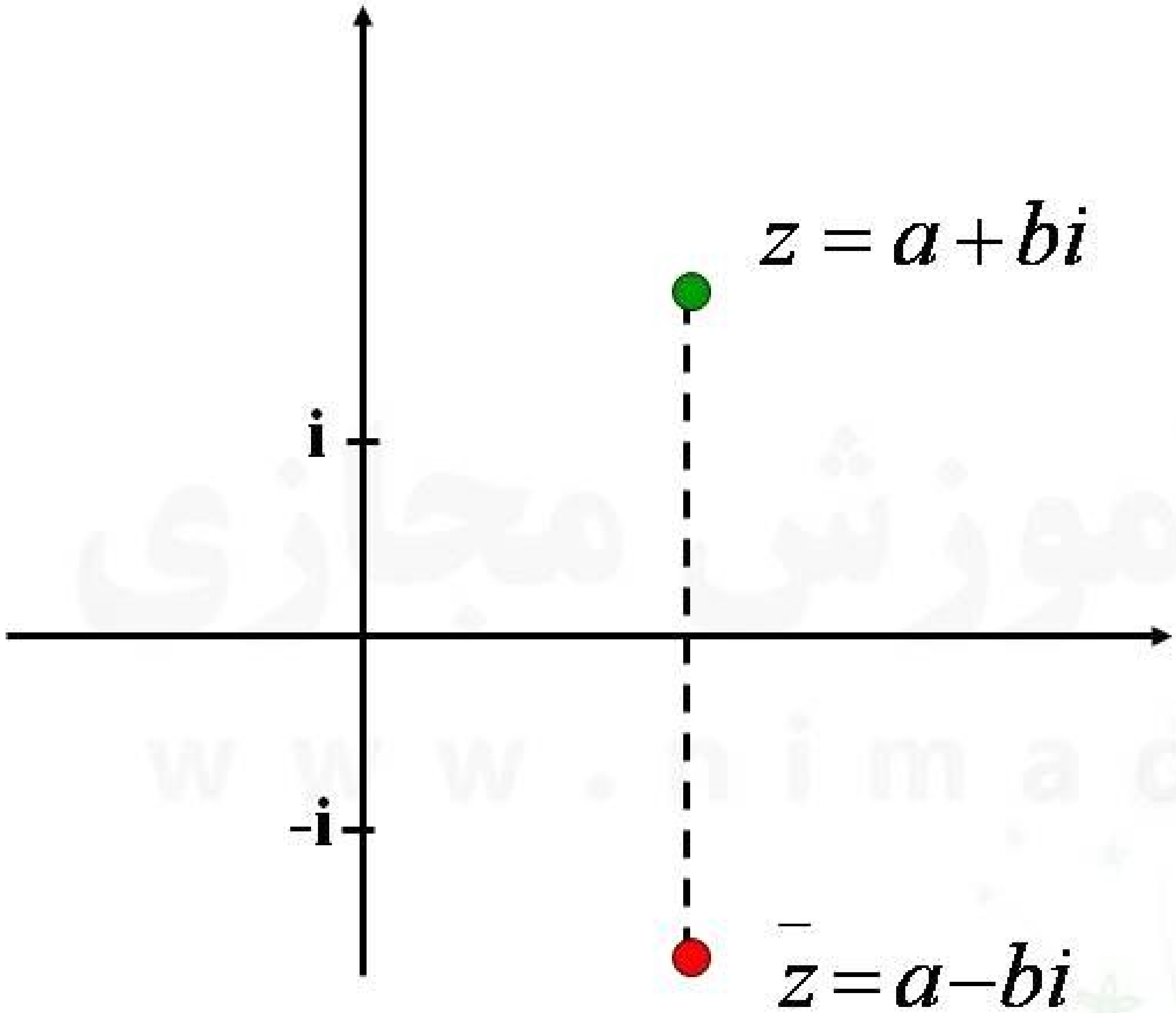
تعریف : مزدوج

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = \overline{(x+iy)} = x - iy$$

مثال) $\overline{3i+1} = -3i+1$

مثال) $\overline{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)} = \bar{i} = -i$

تعبیر هندسی مزدوج



$\bar{z}$ انعکاس z نسبت به محور x ها ست

خواص مزدوج عدد مختلط

1	$\overline{(\overline{Z})} = Z$
2	$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$
3	$\overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$
4	$\overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z_1}\ \overline{Z_2}$
5	$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$ $\qquad Z_2 \neq ٠$
6	$\mathrm{Re}(Z) = \mathrm{Re}(\overline{Z})$

7	$Z+\overline{Z}=2\operatorname{Re} z$
8	$Z-\overline{Z}=2i\operatorname{Im} Z$
9	$Z\overline{Z}\geq 0$
10	$Z\overline{Z}=0 \quad \Leftrightarrow \quad Z=0$
11	$\overline{\alpha Z}=\alpha \overline{Z} \quad (\alpha \in R)$
12	$\overline{Z_1+Z_2+\ldots+Z_n}=\overline{Z_1}+\overline{Z_2}+\ldots+\overline{Z_n}$ تعمیم خاصیت دوم
13	$\overline{Z_1 Z_2 \ldots Z_n}=\overline{Z_1}\;\overline{Z_2}\ldots\overline{Z_n}$ تعمیم خاصیت چهارم
14	$\overline{Z^n}=\overline{Z}^{\,n}$

مثال) $Z-\overline{Z}=2\,\mathrm{Im}Z\,i$

فرض

$$\left.\begin{array}{l} Z=x+yi \\ \overline{Z}=x-y\,i \end{array}\right\} \Rightarrow Z-\overline{Z}=x+i\,y-(x-y\,i)=2y\,i$$

$$=2\,\mathrm{Im}\,Z\,i$$

مثال)

$$Z\bar{Z}=0 \quad \Leftrightarrow \quad Z=0$$

راه حل:

$(\Rightarrow)$ $\quad Z=x+yi \quad \Rightarrow \quad \bar{Z}=x-yi$

$$\Rightarrow \quad Z\bar{Z}=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2=0 \Rightarrow x^2=-y^2$$

$$\Rightarrow \quad x=y=0 \Rightarrow Z=0$$

$(\Leftarrow)$ $\quad Z=0 \quad \Rightarrow \quad Z\bar{Z}=0\bar{Z}=0$

مثال)

f چند جمله ای درجه n با ضریب حقیقی و $f(z)=0$ $\Longrightarrow$ $\boxed{f\left(\bar{z}\right)=0}$

حل)

$$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$$

خاصیت ۱۴

$$f(\bar{z})=a_n\bar{z}^n+\ldots+a_1\bar{z}+a_0=\bar{a}_n\overline{z^n}+\ldots+\bar{a}_1\bar{z}+\bar{a}_0$$

خاصیت ۴

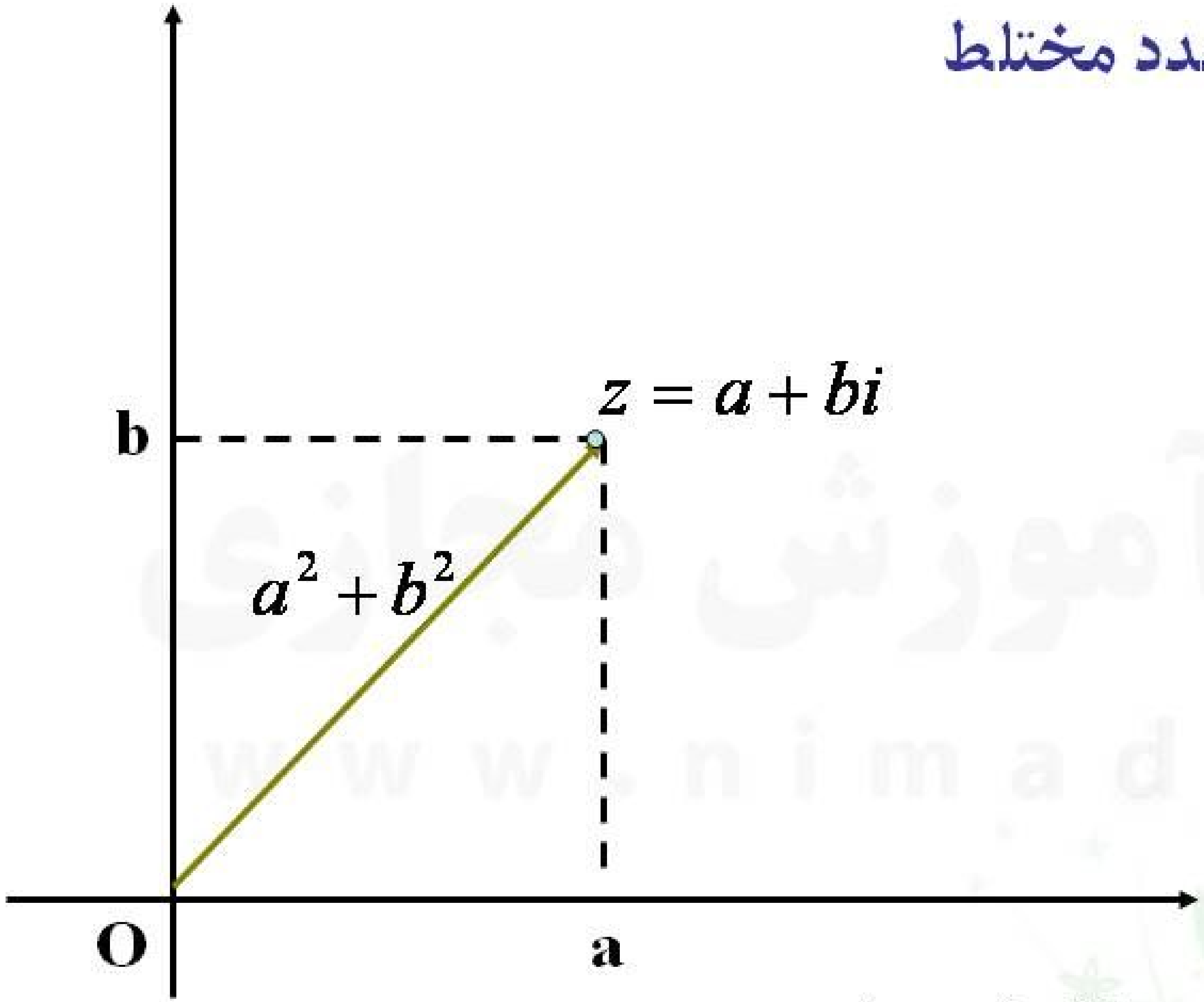
$$=\overline{a_nz^n}+\ldots+\overline{a_1z}+\overline{a_0}$$

خاصیت ۱۲

$$=\overline{a_nz^n+\ldots+a_1z+a_0}$$

$$=\overline{f(z)}=\bar{0}=0$$

قدر مطلق یا نرم یک عدد مختلط



$|Z|$ نشان دهنده فاصله عدد مختلط (a,b) از مبدأ مختصات می باشد .

$$\boxed{Z = a + bi} \xrightarrow{\text{تعریف}} \boxed{|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

خواص قدر مطلق عدد مختلط :

چون قدر مطلق عدد مختلط Z صرفاً طول یک پاره خط است .لذا قدرمطلق اعداد

مختلط خواص معمولی قدرمطلق های اعداد حقیقی را دارا می باشد .

1	$\|Z\| \geq 0$
2	$\|Z\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Z = 0$
3	$\|Z\| = \|\overline{Z}\|$
4	$Z.\overline{Z} = \|Z\|^2$
5	$\operatorname{Re} z \leq \|Z\|$

6	$\operatorname{Im} Z \leq \lvert Z \rvert$
7	$\lvert Z_1 Z_2 \rvert = \lvert Z_1 \rvert \lvert Z_2 \rvert$
8	$\left\lvert \frac{Z_1}{Z_2} \right\rvert = \frac{\lvert Z_1 \rvert}{\lvert Z_2 \rvert}$
9	$\lvert Z_1 + Z_2 \rvert \leq \lvert Z_1 \rvert + \lvert Z_2 \rvert$
10	$\lvert Z_1 - Z_2 \rvert \leq \lvert Z_1 \rvert + \lvert Z_2 \rvert$
11	$\lvert Z_1 - Z_2 \rvert \geq \lvert Z_1 \rvert - \lvert Z_2 \rvert$
12	$\big\lvert \lvert Z_1 \rvert - \lvert Z_2 \rvert \big\rvert \leq \lvert Z_1 - Z_2 \rvert$

مثال)

تعبیر هندسی $|Z_1 - Z_2|$ را به دست آورید .

$$\left.\begin{array}{l} Z_1 = a_1 + b_1 i \\ \\ Z_2 = a_2 + b_2 i \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \\ \\ \Rightarrow |Z_1 - Z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \end{array}$$

که نشان دهنده فاصله دو عدد مختلط Z_2, Z_1 می باشد

مثال)

ثابت کنید $Z.\overline{Z}=|Z|^2$

$$\left.\begin{array}{l} Z=a+bi \\ \\ \overline{Z}=a-bi \end{array}\right\} \Rightarrow \quad Z.\overline{Z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|Z|^2$$

مثال)

ثابت کنید $|Z_1+Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right)$$ خاصیت ۴ قدرمطلق

$$= (z_1+z_2)\left(\bar{z}_1+\bar{z}_2\right)$$ خاصیت ۲ مزدوج

$$= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}$$ خاصیت ۱، ۴ مزدوج

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right)$$ خاصیت ۷ مزدوج

$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|\bar{z}_2|$$ خاصیت ۹ قدرمطلق

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2|$$ خاصیت ۳ قدرمطلق

$$= \left(|z_1| + |z_2| \right)^2$$

$$\Rightarrow \quad |z_1 + z_2|^2 \leq \left(|z_1| + |z_2| \right)^2 \quad \Rightarrow \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

مثال) ثابت کنید $\left|z_1\right| - \left|z_2\right| \le \left|z_1 - z_2\right|$

$$\left|z_1\right| = \left|z_1 - z_2 + z_2\right|$$

$$\le \left|z_1 - z_2\right| + \left|z_2\right|$$ بنا به خاصیت ۹ قدر مطلق

$$\Rightarrow \quad \left|z_1\right| \le \left|z_1 - z_2\right| + \left|z_2\right|$$

$$\Rightarrow \quad \left|z_1\right| - \left|z_2\right| \le \left|z_1 - z_2\right|$$

مثال) اگر $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, $\bar{z}_1 z_2 \neq 1$ ثابت کنید .

$$\left|z_1 - z_2\right| = \left|1 - \bar{z}_1 z_2\right|$$

راه حل)

$$\left|z_1 - z_2\right|^2 = \left(z_1 - z_2\right)\left(\overline{z_1 - z_2}\right)$$

بنا به خاصیت ۴ قدرمطلق

$$= \left(z_1 - z_2\right)\left(\bar{z}_1 - \bar{z}_2\right)$$

بنا به خاصیت ۳ مزدوج

$$= z_1 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2$$

بنا به خاصیت ۴ قدرمطلق

$$= 1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + 1$$

بنا به فرض

$$= 1 - \left(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1\right) + \left(|z_1||z_2| \right)^2$$

$$= 1 - \left(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1\right) + z_1\bar{z}_1 \quad z_2\bar{z}_2$$

$$= \left(1 - \bar{z}_1 z_2\right)\left(1 - z_1\bar{z}_2\right)$$

$$= \left(1 - \bar{z}_1 z_2\right)\left(\overline{1 - \bar{z}_1 z_2}\right)$$

خاصیت ۱ مزدوج

$$= |1 - \bar{z}_1 z_2|^2$$

خاصیت ۴ قدرمطلق

$$\Rightarrow \quad |z_1 - z_2| = |1 - \bar{z}_1 z_2|$$

مثال)

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

$\rightarrow$

الف) $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} = 0$

ب) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$

حل الف)

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=\frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}+\frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}+\frac{\overline{z_3}}{|z_3|^2}$$

(بنا به فرض مثال)

$$=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3$$

بنا به خاصیت ۱۲ مزدوج

$$=\overline{z_1+z_2+z_3}$$

$$=\bar{0}=0$$

حل ب)

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)$$

(بنا به فرض مثال)

$$= -2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)$$

(توجه : $z \neq 0 \Rightarrow |z| \neq 0$)

$$= -2 z_1 z_2 z_3 \left(\frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} \right)$$

(بنا به الف)

$$= 0$$

مکان های هندسی در صفحه مختلط

اعداد مختلط

تناظر ۱-۱

نقاط صفحه

مکان های هندسی به صورت مختلط

مثال)

$R, Z_\circ$ معلوم ، مطلوب است مکان هندسی $A=\{Z \mid \quad |Z-Z_\circ|=R\}$

حل) فرض می کنیم $Z=x+iy$, $Z_\circ=a+bi$ پس

$$z-z_0=(x-a)+(y-b)i \quad \Rightarrow \quad |z-z_0|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$\Rightarrow \quad R=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

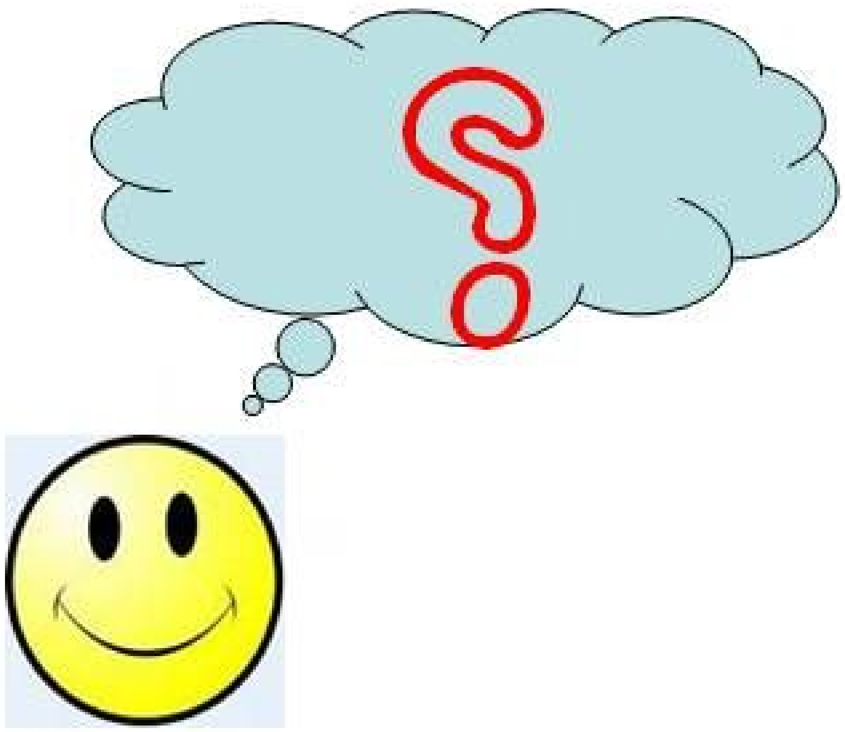
$$\Rightarrow \quad R^2=(x-a)^2+(y-b)^2$$

معادله دایره به مرکز $Z_\circ$ و شعاع R

مثال)

مطلوب است مکان هندسی

$$\left\{ Z \;\middle|\; \quad |Z-i|+|Z+i| < 5 \right\}$$



راه حل : با فرض $Z = x + yi$ داریم

$$z+i=x+iy+i=x+i(y+1) \quad \Rightarrow \quad |z+i|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

,

$$z-i=x+iy-i=x+i(y-1) \quad \Rightarrow \quad |z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad |z-i|+|z+i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2} < 5$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+(y-1)^2} < 5-\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad x^2+(y-1)^2 < \left(5-\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 100x^2+84y^2 < 525$$

$$\Rightarrow \quad \frac{100}{525}x^2+\frac{84}{525}y^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{525}{100}}+\frac{y^2}{\frac{525}{84}} < 1$$

درون بیضی می باشد.

نکته : به طور کلی

معادله دایره به مرکز Z_0 و شعاع R در صفحه مختلط عبارت است از

$$|z - z_0| = R$$

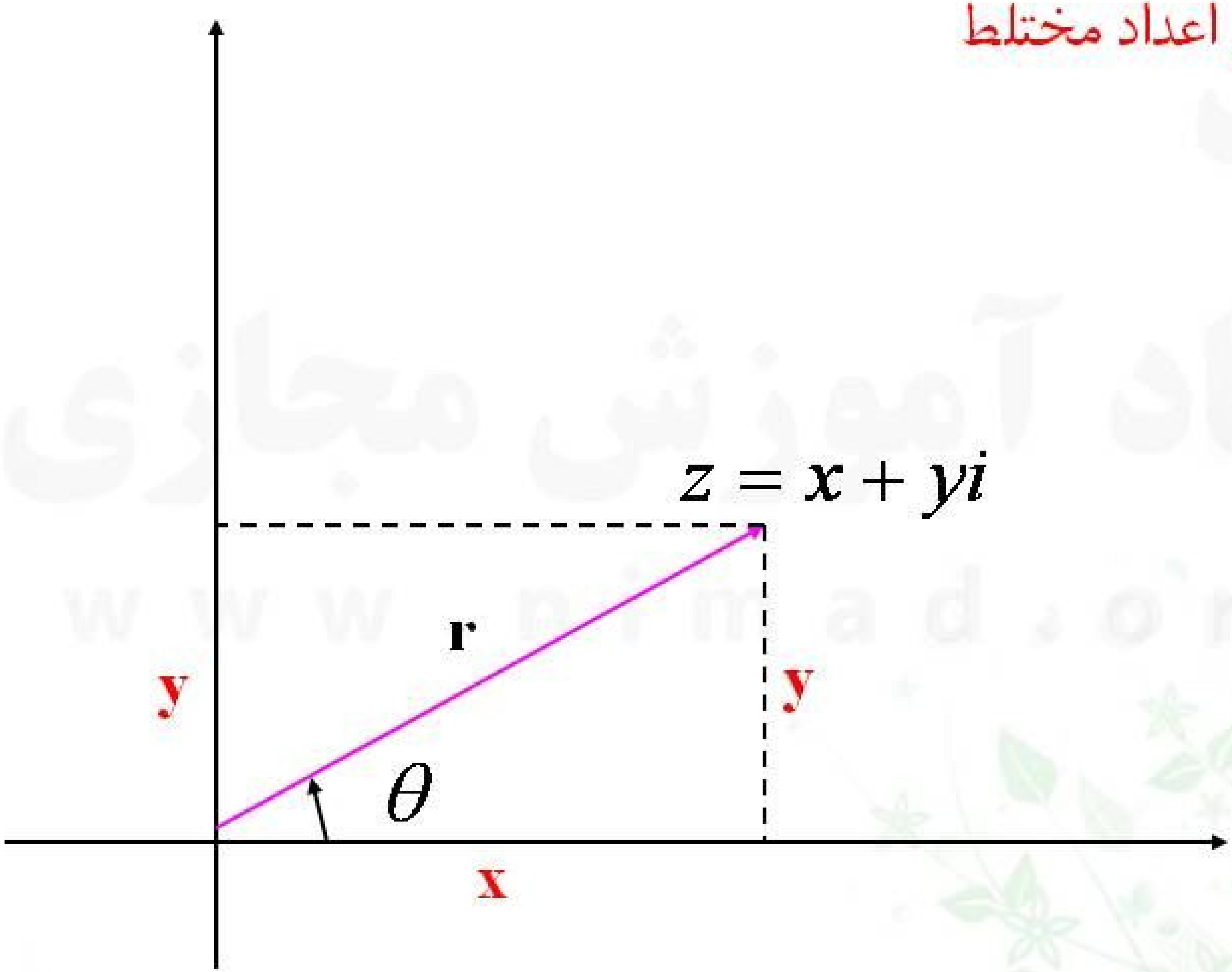
معادله بیضی به قطر $2a$ و کانون های Z_2, Z_1 عبارت است از

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$$

معادله هذلولی به قطر $2a$ و کانون های Z_2, Z_1 عبارت است از

$$|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$$

نمایش قطبی اعداد مختلط



$$z = x + yi$$

نمایش دکارتی $\longrightarrow (x, y)$

نمایش قطبی $\longrightarrow (r, \theta)$ $\qquad r \geq 0$

θ را آرگومان z می نامند و با نماد arg z نمایش می دهیم .

یک عدد مختلط آرگومانهای متفاوتی دارد. آرگومانی که در فاصله $[0, 2\pi)$

باشد را آرگومان اصلی نامیده و با نماد Arg z نمایش می دهیم .

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

توجه :

انتخاب θ

به گونه ای باشد

که

(r,θ) در ربع صحیح

توجه :

❶ $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

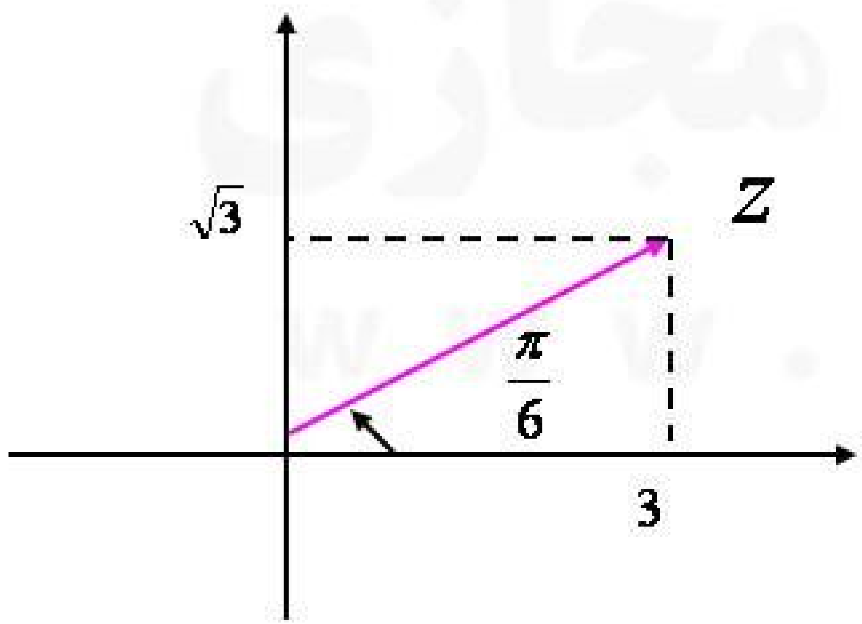
نمایش قطبی

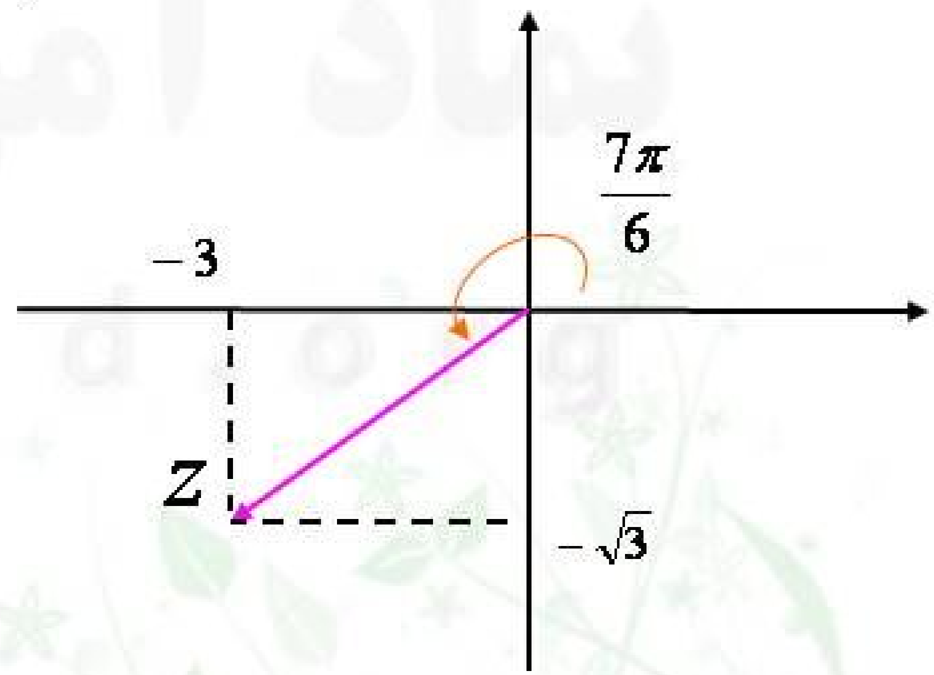
❷ $z = x + yi \quad \Rightarrow \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad r \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi$

تعریف : $cis\theta = \cos\theta + i\sin\theta$ لذا $z = r\,cis\theta$

مثال) اعداد زیر را به فرم مثلثاتی بنویسید

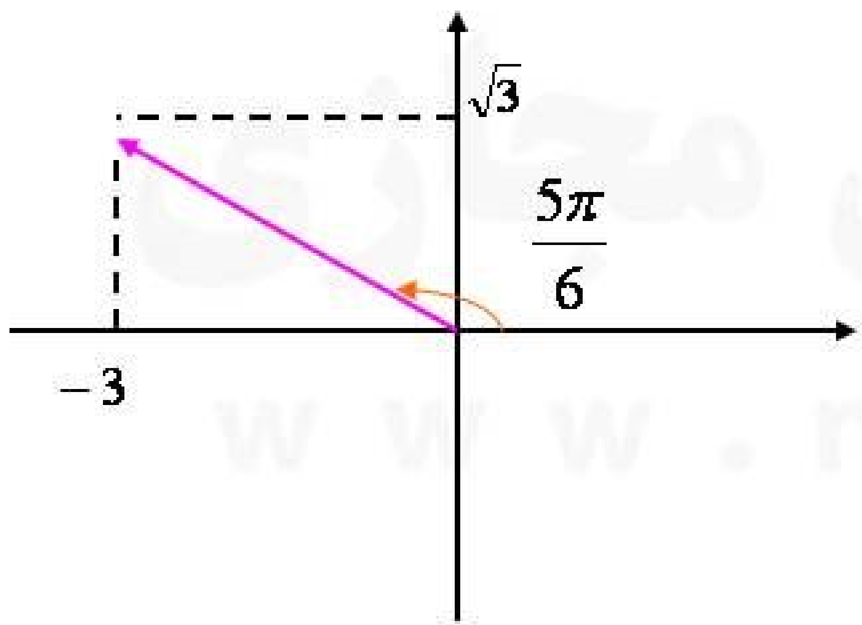
$$z=3+\sqrt{3}\,i \;\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{9+3}=\sqrt{12} \\ \tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \;\underset{y>0}{\overset{x>0}{\Longrightarrow}}\; \theta=\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \quad z=\sqrt{2}cis\frac{\pi}{6}$$

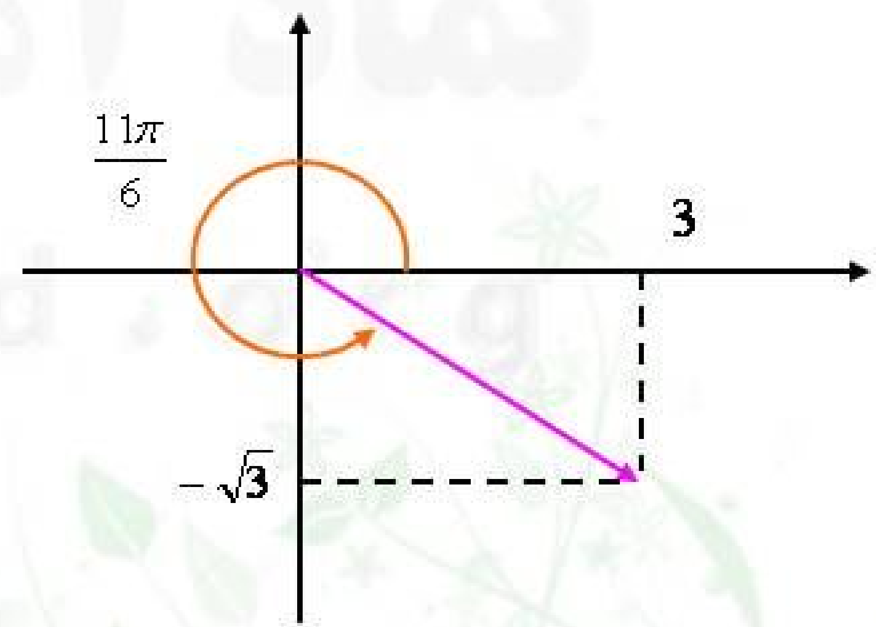




$$z=-3-\sqrt{3}\,i \;\Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{12} \\ \tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \;\underset{y<0}{\overset{x<0}{\Longrightarrow}}\; \theta=\pi+\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow z=\sqrt{12}\,cis\frac{7\pi}{6}$$

$$z=-3+\sqrt{3}\,i \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{12} \\ \tan\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{3} \end{cases} \underset{y>0}{\overset{x<0}{\Longrightarrow}} \theta=\pi-\frac{\pi}{6} \Rightarrow z=\sqrt{12}\,cis\frac{5\pi}{6}$$





$$z=3-\sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{12} \\ \tan\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{3} \end{cases} \underset{y<0}{\overset{x>0}{\Longrightarrow}} \theta=2\pi-\frac{\pi}{6} \Rightarrow z=\sqrt{12}\,cis\frac{11\pi}{6}$$

مثال) عدد زیر را به صورت فرم مثلثاتی نمایش دهید .

$$\omega = \frac{1+\cos a + i\sin\alpha}{1+\cos\alpha - i\sin\alpha}$$

راه حل :

در نظر می گیریم $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ لذا

$$\omega=\frac{1+z}{1-\bar{z}}=\frac{z+z^2}{z+z\bar{z}}=\frac{z+z^2}{z+|z|^2}=\frac{z+z^2}{z+1}$$

$$=\frac{z(1+z)}{z+1}=z=\cos\alpha+i\sin\alpha$$

اعمال روی اعداد مختلط در مختصات قطبی

❶ $z = r\,cis\theta \Rightarrow \bar{z} = r\,cis(-\theta) \Rightarrow \begin{cases} \arg\bar{z} = -\arg z \\ |z| = |\bar{z}| \end{cases}$

❷ $z = r\,cis\theta \xrightarrow{r \neq 0} z^{-1} = \frac{1}{r}\,cis(-\theta) \Rightarrow \begin{cases} \arg z^{-1} = -\arg z \\ |z^{-1}| = \frac{1}{|z|} \end{cases} \quad |z| \neq 0$

❸

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= r_1\ cis\theta_1 \\ z_2 &= r_2\ cis\theta_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad z_1 z_2 = r_1 r_2\ cis(\theta_1+\theta_2) \quad \Rightarrow \begin{cases} \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \\ |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \end{cases}$$

❹

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= r_1\ cis\theta_1 \\ z_2 &= r_2\ cis\theta_2 \end{aligned}\right\} \overset{r_2 \neq 0}{\Longrightarrow} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\ cis(\theta_1-\theta_2) \quad \Rightarrow \begin{cases} \arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \\ \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \qquad |Z_2| \neq 0 \end{cases}$$

اثبات رابطه ۳ :

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad , \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

$$= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

اثبات رابطه ۴ : از رابطه ۲ و ۳ کمک می گیریم

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

بنا به ۲

$$\Rightarrow z_2^{-1} = \frac{1}{r_2}(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2))$$

بنا به 3

$$\Rightarrow z_1 z_2^{-1} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

مثال)

حاصلضرب اعداد مختلط $(1+i)$ و $(\sqrt{3}-i)$ را به شکل قطبی نمایش دهید.

راه حل)

$$\sqrt{3}-i=2\left[\cos\left(-\pi/6\right)+i\sin\left(-\pi/6\right)\right] \quad , \quad 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\pi/4+i\sin\pi/4\right)$$

بنا به حاصلضرب

$$\Rightarrow \quad (1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

قضیه (دستور دوموآور) :

$$\forall n \in Z$$

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \quad \Rightarrow \quad z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

برهان : اثبات به استقرا :

حالت اول : اگر $n \in N$,

$$p(n): \qquad (r\,cis\theta)^n = r^n cis\, n\theta$$

$$p(1): \qquad r\ cis\ \theta = r\ cis\ \theta$$

$p(n):$ فرض استقرا برقرار

$p(n+1):$ حکم استقرا

$$p(n+1): \qquad (r\,cis\theta)^{n+1} = (r\,cis\theta)^{n}(r\,cis\theta)$$

$$= r^{n}\,cis\,n\theta \quad . \quad r\,cis\theta$$ بنا به فرض استقرا

$$= r^{n+1} cis\,(n\theta+\theta)$$ حاصلضرب دو عدد مختلط

$$= r^{n+1}\,cis\,((n+1)\theta)$$

حالت دوم n=0 : در این صورت

$$(r\,cis\theta)^0 = 1 = 1\,(1+0i) = r^0(\cos 0\,\theta + i\,\sin 0\,\theta) = r^0\,cis\,0\,\theta$$

حالت سوم : فرض کنید n عدد صحیح منفی باشد در این صورت

$$(r\,cis\theta)^n = \left((r\,cis\theta)^{-1}\right)^{-n} \qquad (-n>0)$$

$$= \left(\frac{1}{r}cis\,(-\theta)\right)^{-n} = \left(\frac{1}{r}\right)^{-n} cis\,(-n)(-\theta) = r^n\;cis\,n\theta$$

دستور دوموآور :

$$\left[r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\right]^{n} = r^{n}\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

نتیجه :

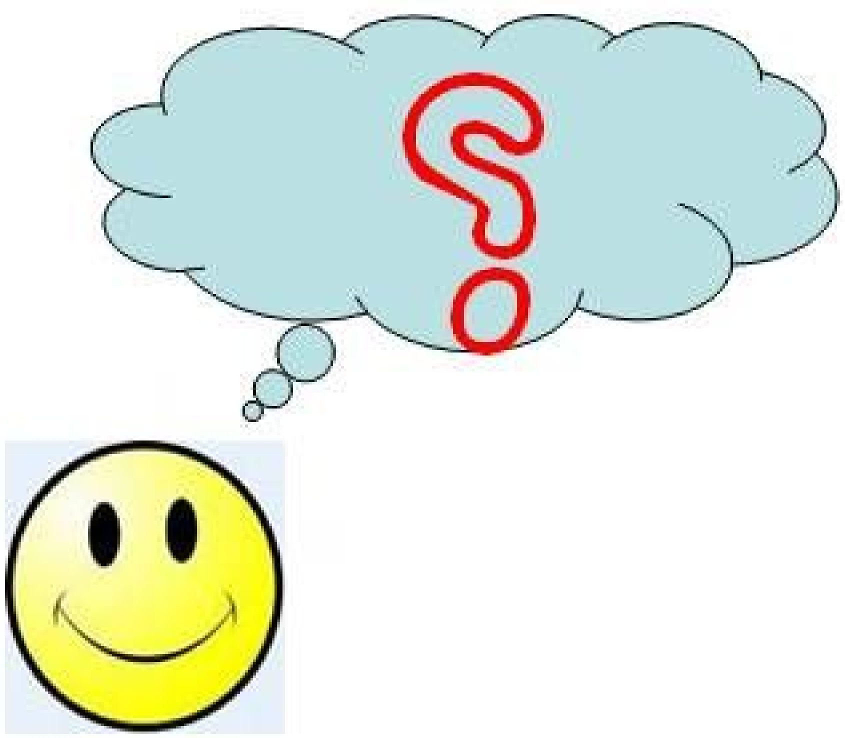
$$\arg z^{n} = n\arg z$$

مثال) فرض کنید

$$z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right) \quad , \quad z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

مطلوبست

$$Arg\left(\frac{z_1^{32}}{z_2^{3}}\right)$$



راه حل)   بنا به خاصیت ۴ اعمال

$$\arg\left(\frac{z_1^{32}}{z_2^3}\right)=\arg\left(z_1^{32}\right)-\arg\left(z_2^3\right)$$

بنا به قضیه دو موآور

$$=32\arg(z_1)-3\arg(z_2)$$

(صورت مساله)

$$=32\frac{\pi}{8}-3\frac{\pi}{7}$$

$$=4\pi-\frac{3\pi}{7}$$

$$\Rightarrow \qquad Arg\left(\frac{z_1^{32}}{z_2^3}\right)=2\pi-\frac{3\pi}{7}$$

مثال) مطلوب است محاسبه

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}$$

راه حل :

$$\boxed{z=-1+i\sqrt{3}} \Longrightarrow \boxed{\begin{matrix} x=-1 \\ y=\sqrt{3} \end{matrix}} \Longrightarrow \boxed{\begin{matrix} r=2 \\ \tan\theta=-\sqrt{3} \xrightarrow[y\rangle \circ]{x\langle \circ} \theta=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3} \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \qquad z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad z^{60}=2^{60}\left(\cos\frac{120\pi}{3}+i\sin\frac{120\pi}{3}\right)$$

$$=2^{60}\left(\cos 40\pi+i\sin 40\pi\right)$$

$$=2^{60}\left(1+0\right)=2^{60}$$

مثال)

اعداد حقیقی b , a را چنان بیابید که $z=1+i$

یک جواب معادله $z^5+a\,z^3+b=0$ باشد .

(راه حل

$$z=1+i \quad \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \theta=tg^{-1}1=\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad z^5 + az^3 + b = \left(\sqrt{2}\right)^5 \cos\left(\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) + a\left(\sqrt{2}\right)^3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) + b = 0$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2a\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b = 0$$

$$= -4 - 2i - 2a + 2ai + b = 0$$

$$\rightarrow \qquad (-4 - 2a + b) + (-2 + 2a)i = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} -2 + 2a = 0 \\ -4 - 2a + b = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \end{cases}$$

مثال)

با استفاده از فرمول دوموآور

$$\sin 3\theta \quad , \quad \cos 3\theta$$

را برحسب $\sin\theta, \cos\theta$ بدست آورید.

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$$

$$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta - i\sin^3\theta$$

$$= \left(\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)$$

$$\Rightarrow \quad \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$$

$$= \cos^3\theta - 3\left(1 - \cos^2\theta\right)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

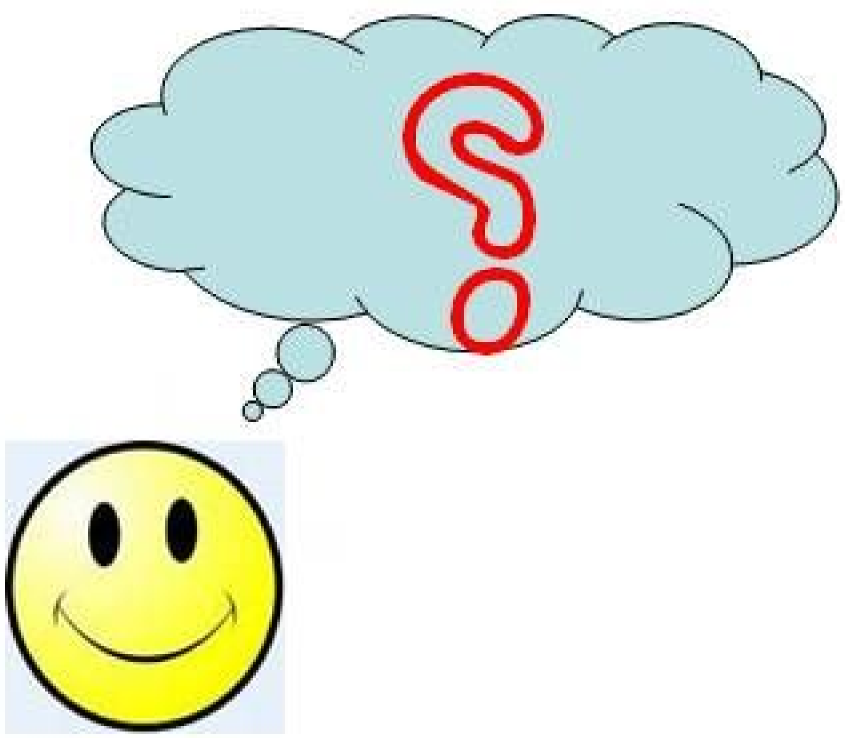
$$\Rightarrow \quad \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

$$= 3\left(1 - \sin^2\theta\right)\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

مثال)

نشان دهید :

$$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n=\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} \quad , \qquad n=0,1,2,\ldots$$



$$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n=\left(\frac{1+i\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right)^n=\left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n$$

$$=\frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{\cos n\theta-i\sin n\theta}$$

$$=\frac{1+i\tan n\theta}{1-i\tan n\theta}$$

ریشه nام عدد مختلط

ریشه n ام یک عدد مختلط

با استفاده از

قضیه دوموآور

تعریف : عدد مختلط w را یک ریشه n ام عدد مختلط z می نامیم هرگاه $w^n = z$

در این صورت می نویسیم :

$$w = z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$$

قضیه : اگر z یک عدد مختلط باشد .

z مختلط $\Rightarrow$ $w^n = z$، دارای n ریشه است

ریشه های n ام عدد مختلط z

$$w_k = \sqrt[n]{r}\ cis\,\frac{2k\pi + \theta}{n}$$

$$k = 0,1,2,\ldots,(n-1)$$

نتایج :

اگر $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ ریشه های n ام عدد مختلط z باشند ، آنگاه

❶ $w_k^n = z \qquad \forall \quad 0 \le k \le n-1$

❷ $|w_k| = \sqrt[n]{r} \qquad \forall \quad 0 \le k \le n-1$

❸ تفاوت آرگومانهای اصلی دو ریشه متوالی w_j و w_{j+1} برابر است با $\frac{2\pi}{n}$

یعنی

$$Arg\ w_{k+1} - Arg\ w_k = \frac{2\pi}{n}$$

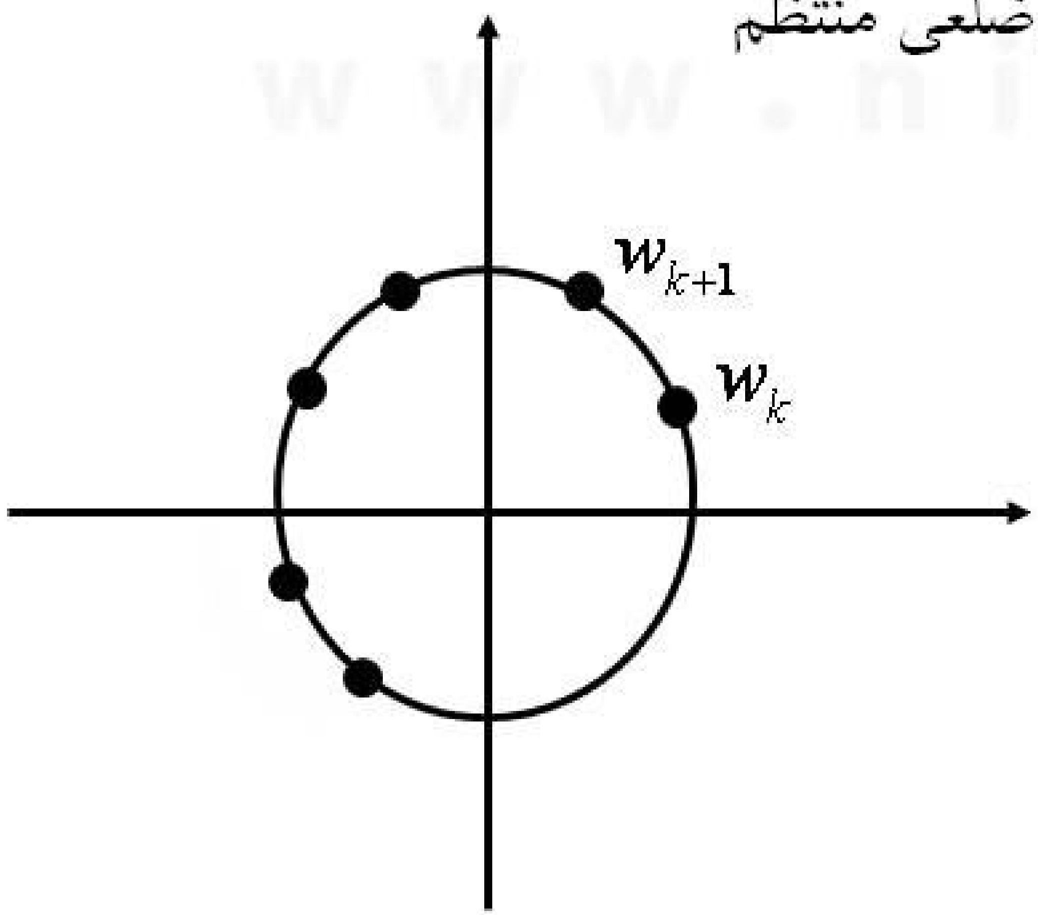
تعبیر هندسی ریشه های n ام یک عدد مختلط :

$$|w_i| = \sqrt[n]{r} \Rightarrow$$ روی یک دایره به شعاع $\sqrt[n]{r}$

$$Arg \quad w_{k+1} - Arg \quad w_k = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow$$ با فاصله های برابر $\frac{2\pi}{n}$ از یکدیگر قرار بگیرند.

در واقع w_i ها $(0 \le i \le n-1)$ تشکیل یک n ضلعی منتظم

محاط بر دایره ای به شعاع $\sqrt[n]{r}$ را می دهند .



مثال)

اگر $a > ۰$ مطلوب است حل معادله $w^2 = -a$

$$z = -a \qquad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -a \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \begin{cases} r = a \\ \theta = \tan^{-1} \circ = \pi \end{cases}$$

$$w_k = \sqrt{a}\,cis\left(\frac{2k\pi + \pi}{2}\right) \qquad\qquad k = 0,1$$

$$w_0 = \sqrt{a}\,cis\left(\pi/2\right)$$

$$= \sqrt{a}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{a}(0 + i) = \sqrt{a}i$$

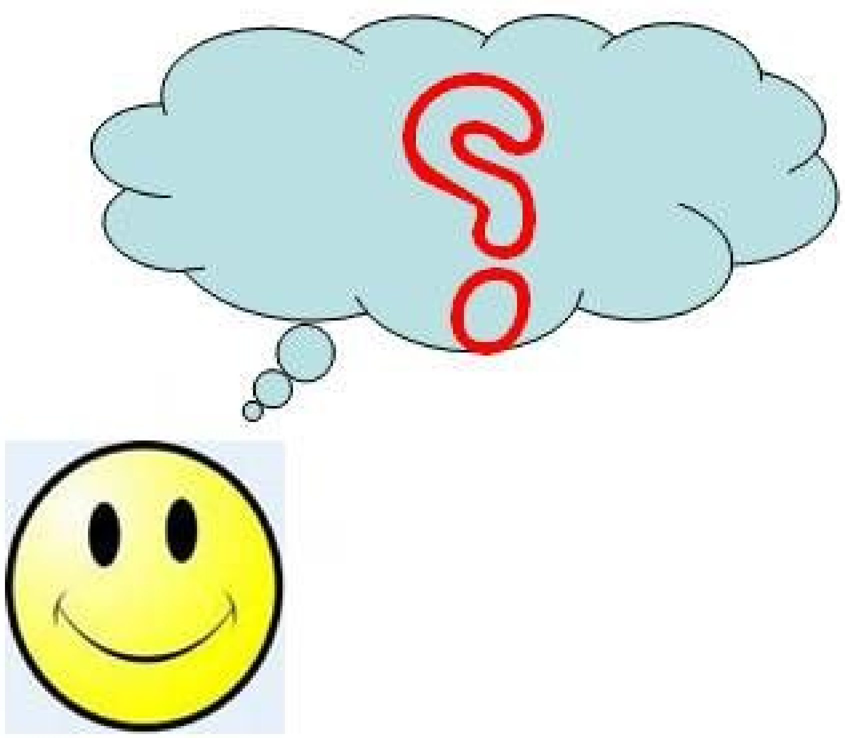
$$w_1 = \sqrt{a}\,cis\left(\frac{2\pi + \pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt{a}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{a}(0 - i) = -\sqrt{a}i$$

مثال)

معادله زیر را حل کنید .

$$z^4 - 1 - \sqrt{3}i = 0$$



$$z^4 - 1 - \sqrt{3}\, i = 0 \quad \Rightarrow \quad z^4 = 1 + \sqrt{3}\, i$$

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$w_k = \sqrt[4]{2}\ cis\left(\frac{2k\pi + \dfrac{\pi}{3}}{4}\right) \qquad k = 0,1,2,3$$

$$w_k = \sqrt[4]{2}\, cis\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{3}}{4}\right) \qquad k = 0,1,2,3$$

$$w_0 = \sqrt[4]{2}\, cis\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2}\, cis\left(\frac{2\pi + \frac{\pi}{3}}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\, cis\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[4]{2}\, cis\left(\frac{4\pi + \frac{\pi}{3}}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\, cis\left(\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$w_3 = \sqrt[4]{2}\, cis\left(\frac{6\pi + \frac{\pi}{3}}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\, cis\left(\frac{19\pi}{12}\right)$$

مثال : ثابت کنید

$$z_1 z_2 = 0 \quad \Rightarrow z_1 = 0 \quad \text{یا} \quad z_2 = 0$$

راه حل :

بنا به خاصیت ۲ قدر مطلق

$$z_1 z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |z_1 z_2| = 0$$

بنا به خاصیت ۷ قدر مطلق

$$\Rightarrow \quad |z_1||z_2| = 0$$

خاصیت اعداد حقیقی

$$\Rightarrow \quad |z_1| = 0 \quad \text{یا} \quad |z_2| = 0$$

خاصیت ۲ قدرمطلق

$$\Rightarrow \quad z_1 = 0 \quad \text{یا} \quad z_2 = 0$$

قضیه : یک معادله درجه دوم $az^2 + bz + c = 0$ که ضریب آن حقیقی یا مختلط باشد

را می توان با همان فرمول معادله درجه دوم معمول(روش Δ) حل کرد .

مثال) معادله زیر را حل کنید .

$$z^4 - 16 = 0$$

راه حل :

$$z^4 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad (z^2 - 4)(z^2 + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \pm 2 \\ z^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -4 \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \end{cases}$$

مثال) معادله زیر را حل کنید .

$$z^2 + z + 1 = 0$$

راه حل :

$$\Delta = 1 - 4 = -3 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$z = \frac{-1}{2} + \sqrt{3}\, i$$

$$z = \frac{-1}{2} - \sqrt{3}\, i$$

مثال)

معادله $(1+z)^5=(1-z)^5$ را حل کنید . $(Z \neq 1)$

راه حل :

$$(1+z)^5=(1-z)^5 \xRightarrow{z\neq 1} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5=1 \Rightarrow \frac{1+z}{1-z}=\sqrt[5]{1}$$

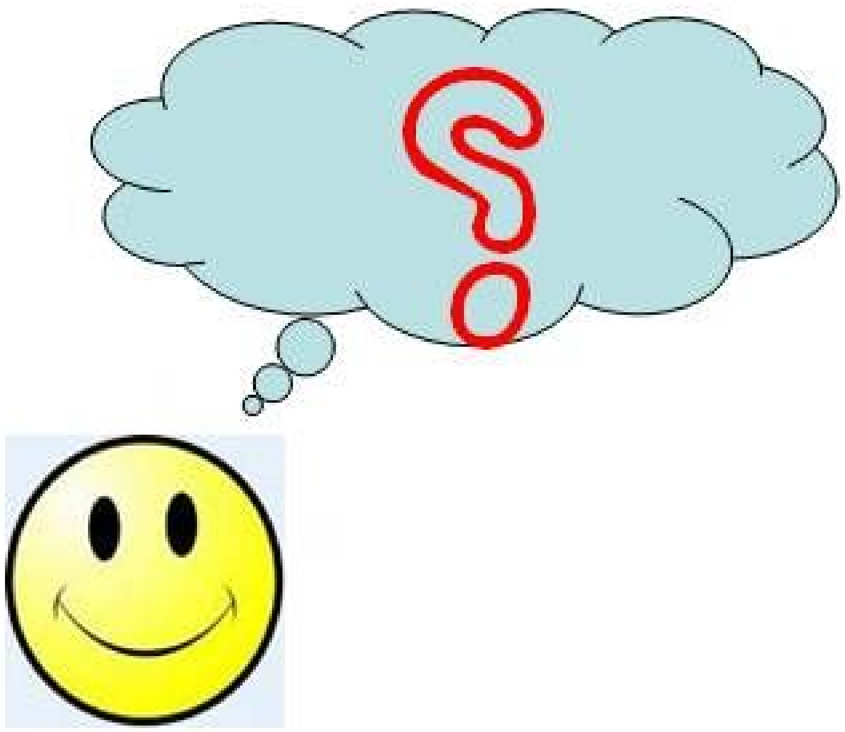
$$z_1=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=0 \end{cases} \Rightarrow w_k=cis\,\frac{2k\pi}{5} \qquad k=0,1,2,3,4$$

$$\Rightarrow \frac{1+z}{1-z}=w_k \Rightarrow 1+z=w_k-zw_k \Rightarrow z+zw_k=w_k-1$$

$$\xRightarrow{W_K\neq 1} z=\frac{w_k-1}{w_k+1} \Rightarrow z=\frac{\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}-1}{\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}+1} \qquad k=0,1,2,3,4$$

مثال)

ریشه های معادله $1+z+z^2+...+z^5=0$ را بیابید .



راه حل)

Z=1 ریشه معادله نیست زیرا در معادله صدق نمی کند لذا $(1-z)\neq 0$

$$(z-1)(1+z+z^2+...+z^5)=0$$

$$z^6-1=0 \quad \Rightarrow \quad z^6=1 \quad \Rightarrow \quad z=\sqrt[6]{1}$$

لذا ریشه های معادله عبارتند از $k=1,2,3,4,5$ $\quad w_k = cis \dfrac{2k\pi}{6}$

k=0 قابل قبول نیست زیرا $w_0=1$ ریشه معادله نمی باشد.

مثال)

معادله زیر را حل کنید .

$$z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$

راه حل)

$$\Rightarrow \qquad \frac{z+1}{z+1}\left(z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1\right) = \frac{z^7+1}{z+1} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad z^7 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z^7 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$\Rightarrow \qquad z = cis\ \frac{2k\pi + \pi}{7} \qquad k = 0,1,\ldots,6 \qquad k \neq 3$$

زیرا اگر k=3 باشد آنگاه z=-1 که این ریشه معادله مورد نظر نیست .

نمایش نمایی اعداد مختلط

تعریف : اگر z=x+iy عدد مختلط e^z را به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right)$$

نتیجه

فرمول اویلر $\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$

اگر $y = \pi$

$$\boxed{e^{i\pi} = -1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

توجه :

هر عدد مختلط $z \neq 0$ را می توان به صورت $z = re^{i\theta}$ نوشت که در آن

$\theta = \arg(z), r = |z|$ می باشد .

مثال: عدد مختلط $z = 1+i$ رابه صورت نمایی نمایش دهید.

$$z = 1+i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \tan^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

مثال) عدد مختلط $z = i + e^{2\pi i}$ را به شکل $z = x + iy$ بنویسید .

راه حل)

$$z_1 = e^{2\pi i} \quad \Rightarrow \quad r = 1 \;,\;\; \theta = 2\pi$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 - \cos 2\pi = 1 \\ y = 1 . \sin 2\pi = 0 \end{cases}$$

$$z = i + \left(1 + i \times 0\right) = i + 1$$