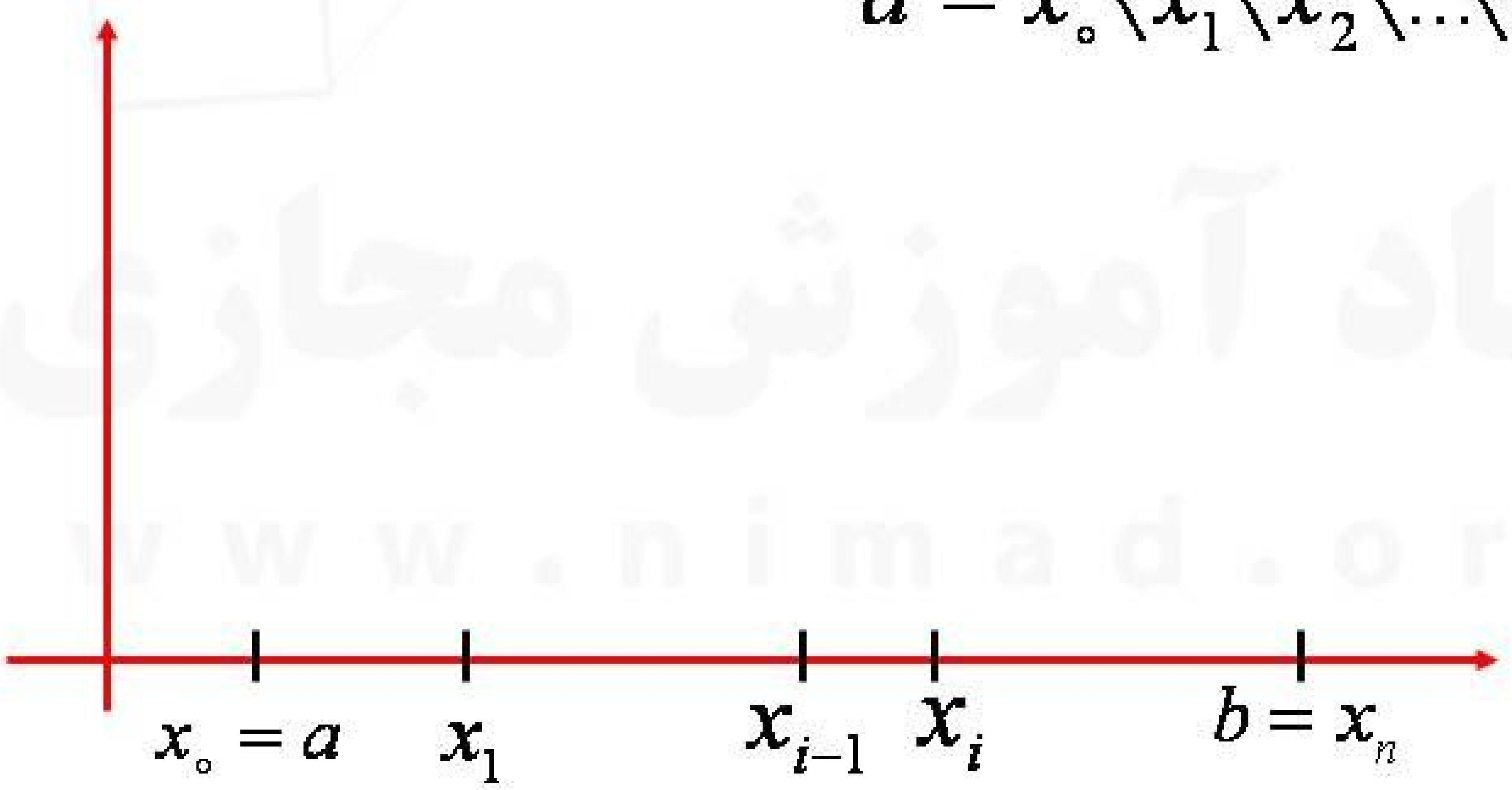
انتگرال معین

فرض کنید $[a,b]$ بازه و افراز $p=\{x_\circ, x_1, \ldots x_n\}$ به طوری که

$$[a,b]=[x_\circ, x_1]\cup[x_1, x_2]\cup\ldots\cup[x_{n-1}, x_n]$$

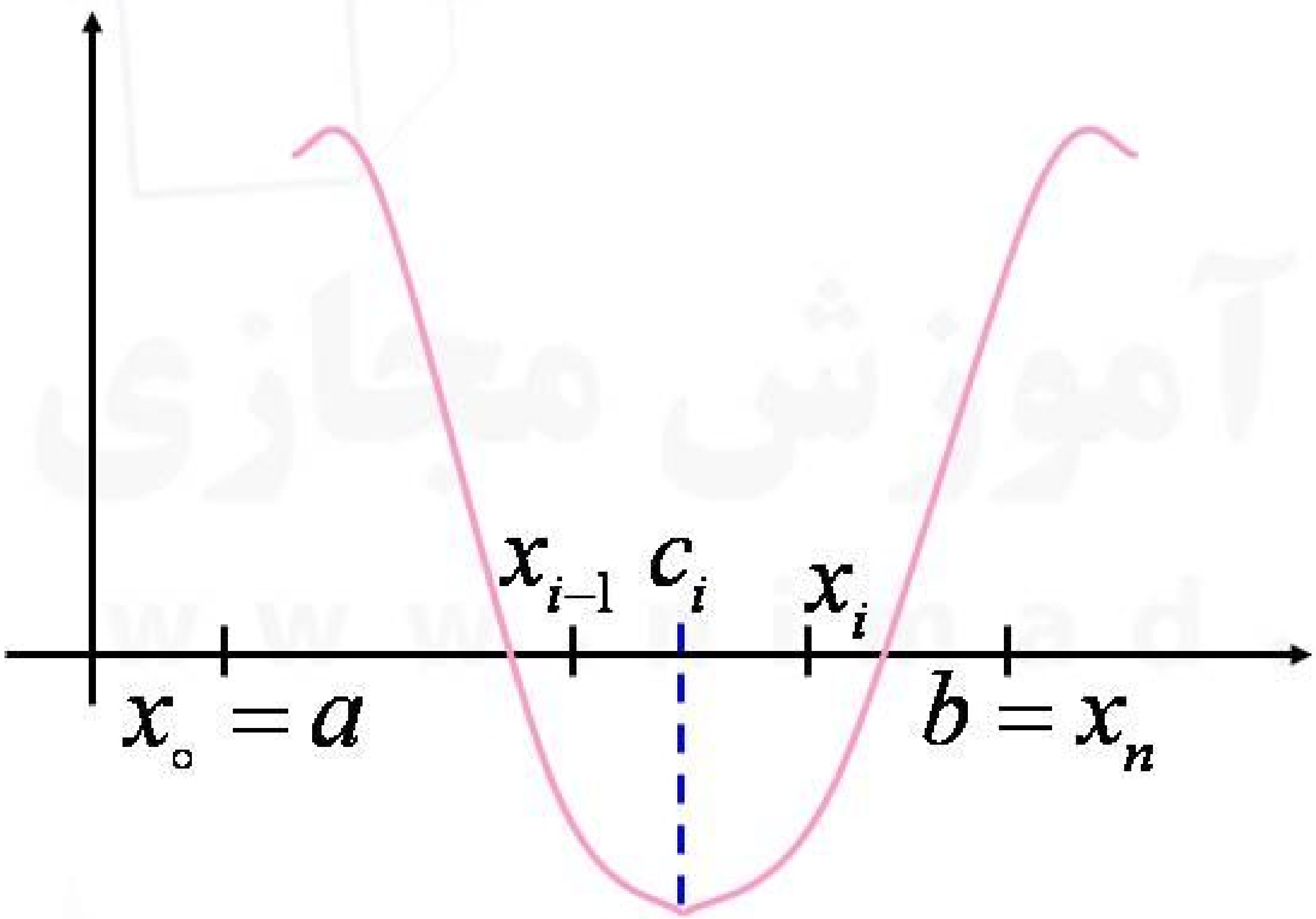
که $a=x_\circ \langle x_1 \langle x_2 \langle \ldots \langle x_{n-1} \langle x_n = b$

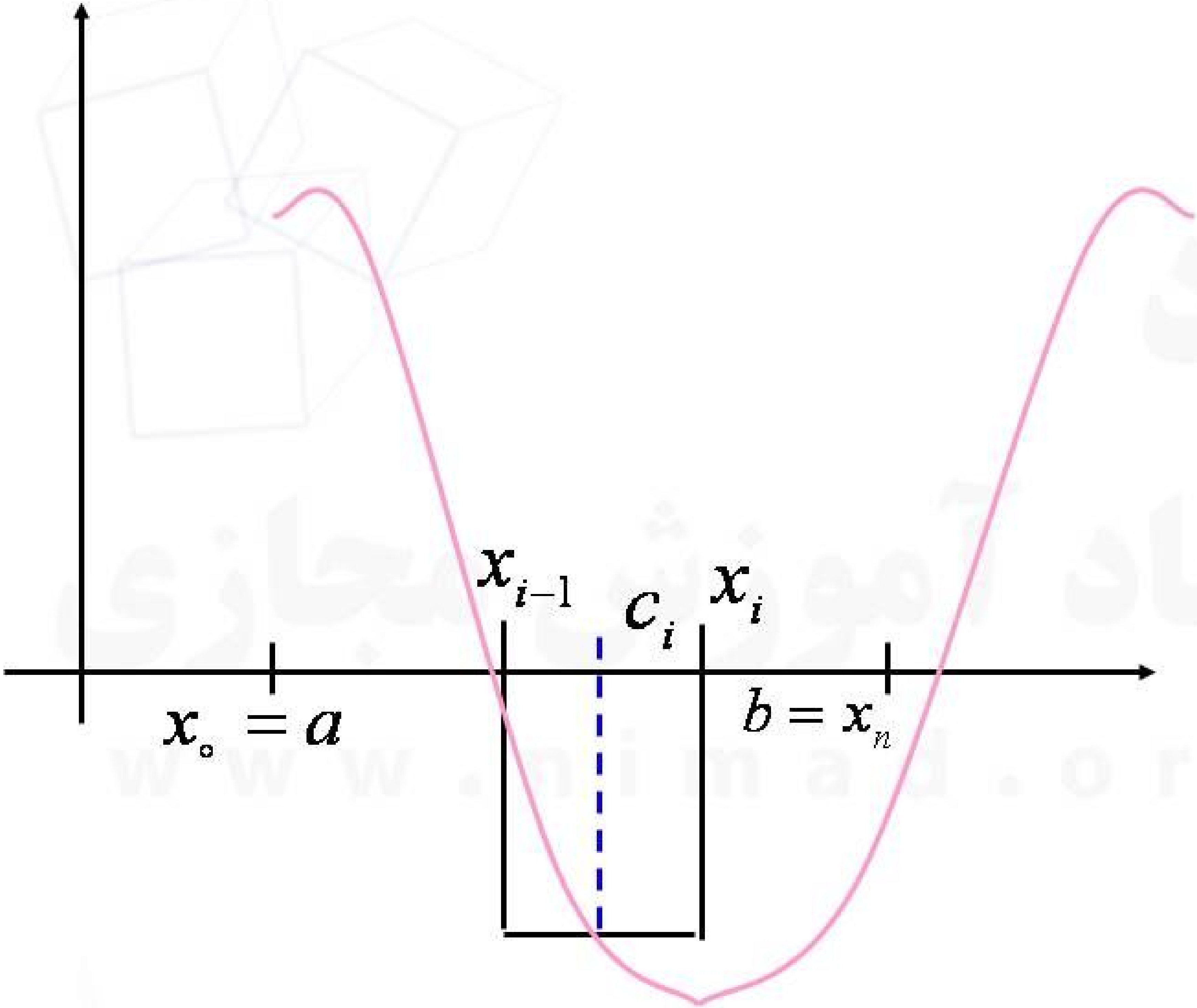


$$\|p\| = Max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\} \quad , \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

f: [a,b] تعریف شده باشد

$$\forall i \quad : \quad ci \in [x_{i-1}, x_i]$$



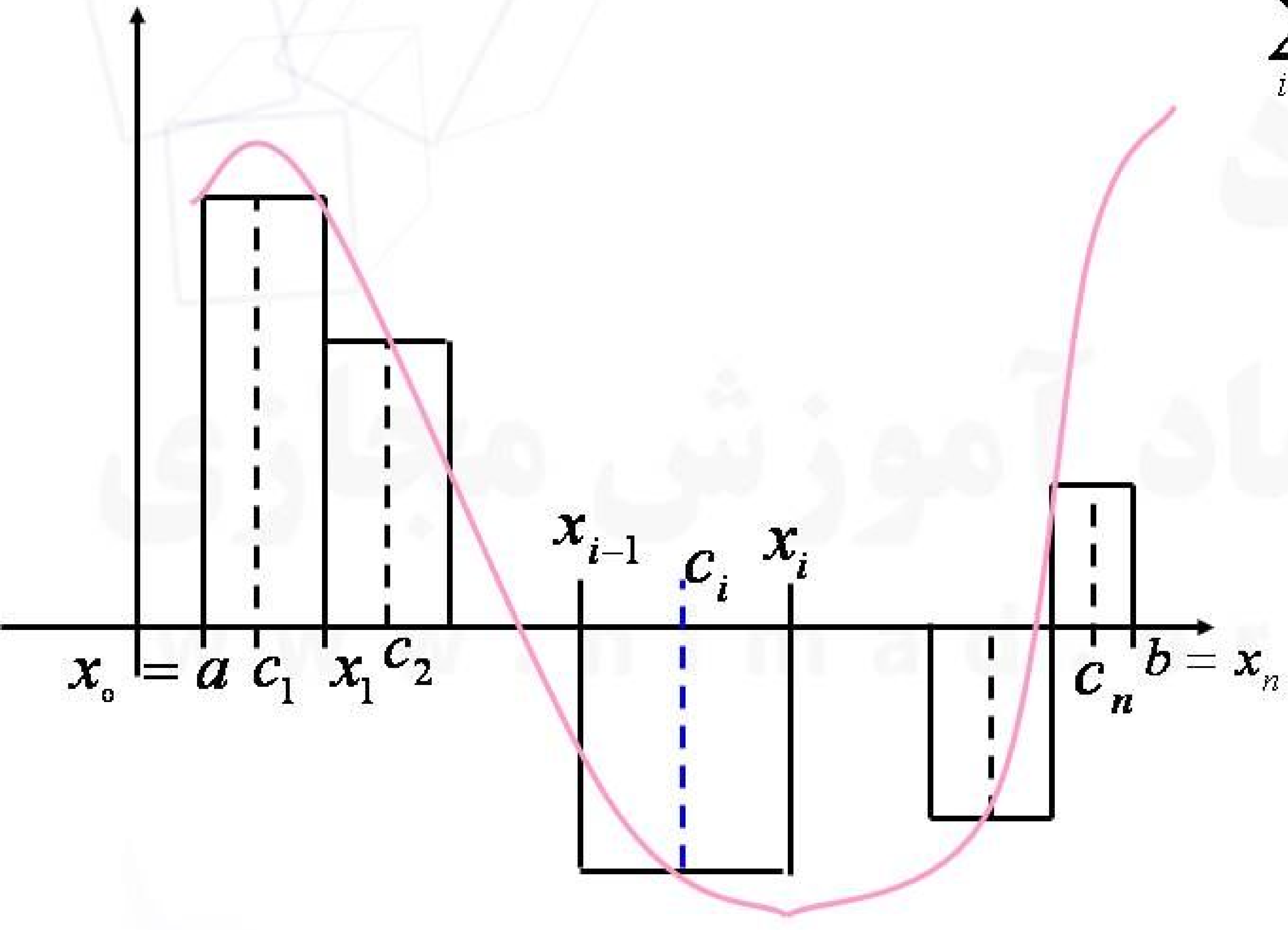


$$f(c_i)\Delta x_i$$

(جمع جبری مساحتهای مستطیل شکل)

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

(مجموع ریمان)



$$\lim_{\|p\| \to \circ} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

در صورت وجود → انتگرال معین f از a تا b

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|p\| \to \circ} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

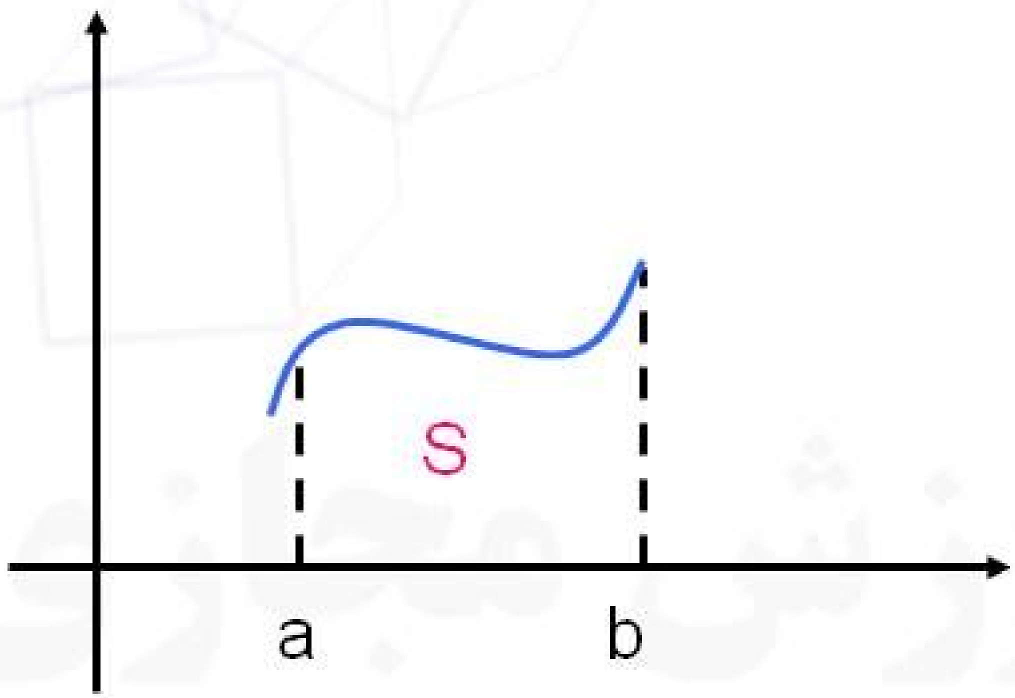
توجهات :

❶ حد فوق به Δx_i و c_i $(1 \le i \le n)$ بستگی ندارد و جواب در صورت وجود یکتاست .

❷ $$\lim_{\|p\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$ (در صورت وجود)

❸

$$\forall x \in [a,b] \quad , \quad f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad S = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

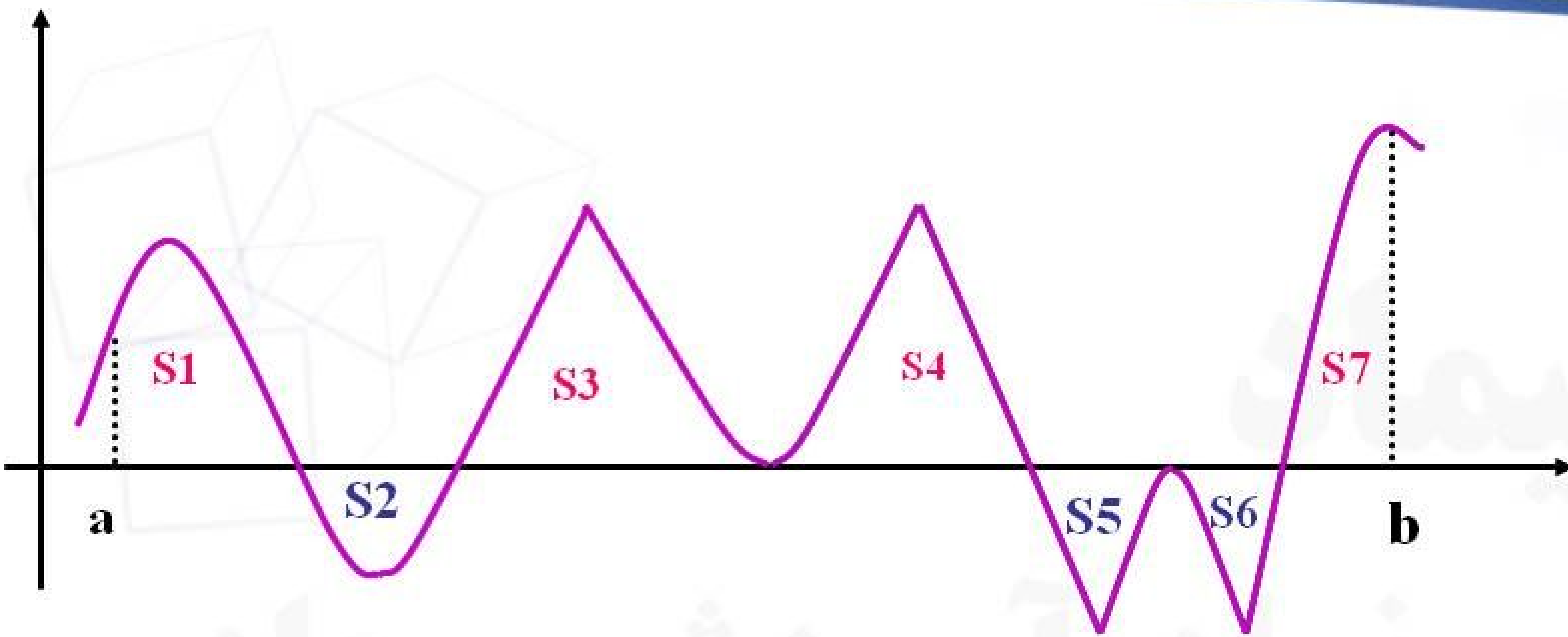


❹

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

(A_1 مجموع مساحت های بالای محور x ها و A_2 مجموع مساحت های زیر محور x ها)

مثال)



$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3 + S_4 - S_5 - S_6 + S_7$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7$$

مساحت محدود بین تابع و محورx ها در فاصله [a,b]

❺ $f : [a ، b]$ پیوسته و یا یکنوا

$\downarrow$

f انتگرال پذیر است (یعنی حد وجود دارد)

❻ $f : [a ، b]$ کراندار و تعداد متناهی (و یا حتی شما را) نقطه ناپیوستگی

$\downarrow$

f انتگرال پذیر است .

سوال: آیا تابعی وجود دارد که انتگرال پذیر نباشد؟

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\in Q^c\end{cases}$$

درفاصله [۱ و ۰]

تعریف :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

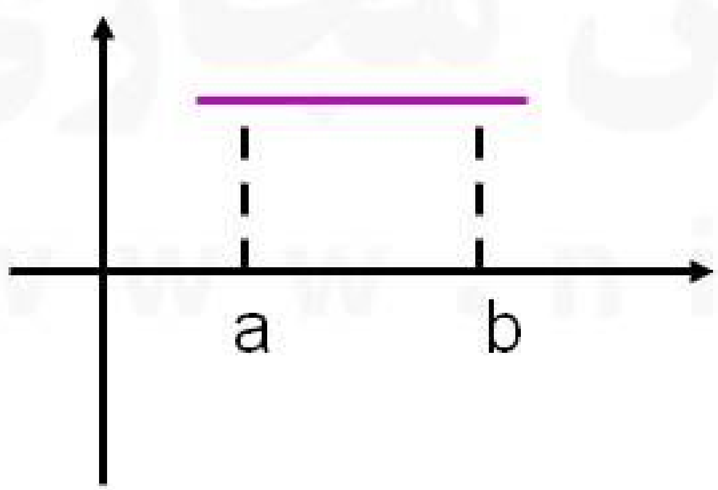
تعریف :

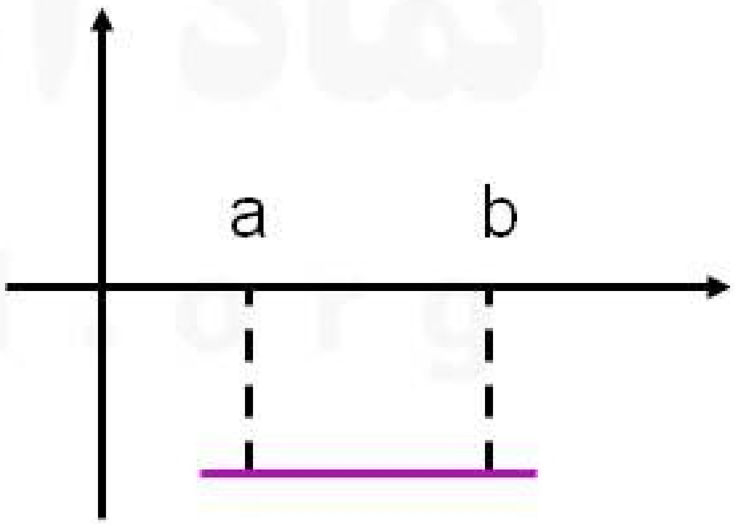
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

خواص انتگرال معین (با فرض انتگرال پذیر بودن f ، g)

خاصیت ۱) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$ (عدم وا بستگی به متغیر)

خاصیت ۲) $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$ (K عدد ثابت)





خاصیت ۳)

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$$

خاصیت ۴)

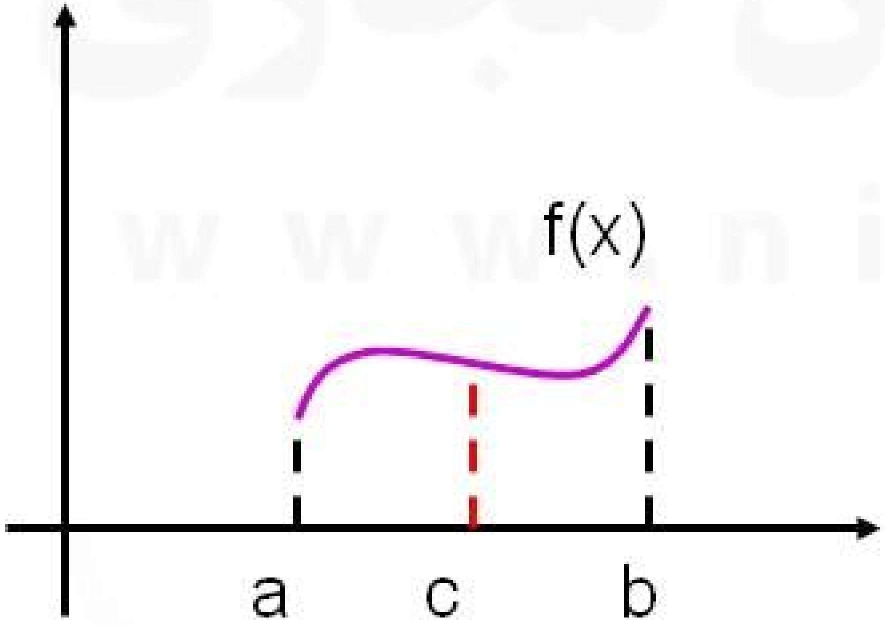
$$\int_a^b k\ f(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx$$

(K عدد ثابت)

خاصیت ۵)

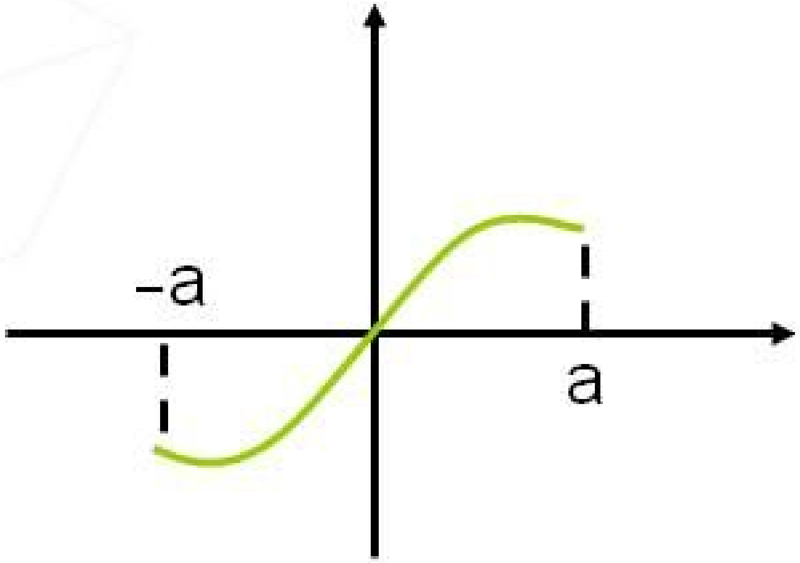
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

(شکستن بازه)

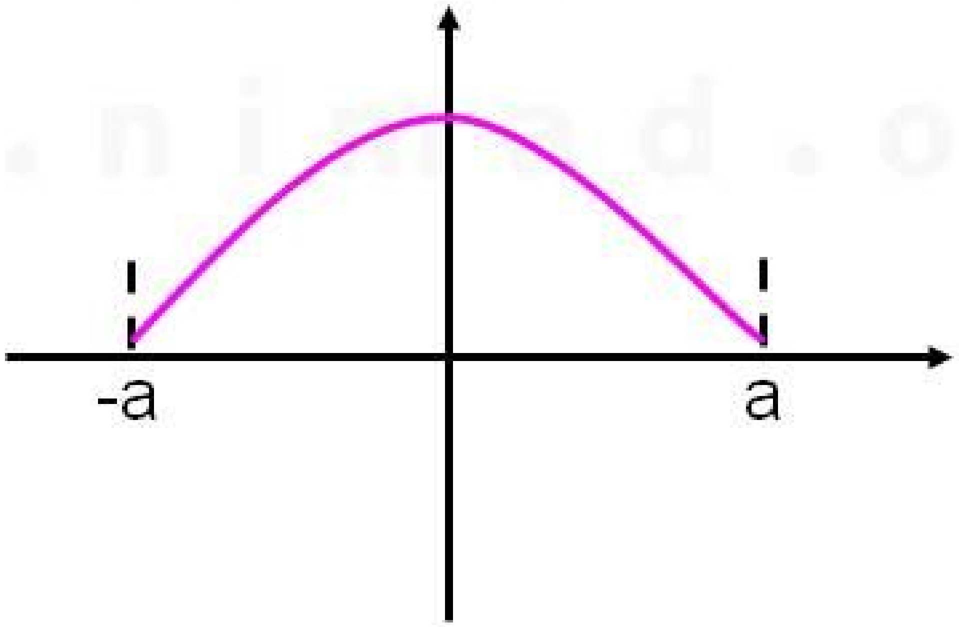


برای حل انتگرال های توابع چند ضابطه ای مانند قدر مطلق و جزء صحیح به کار می رود .

خاصیت ۶) فرد $f:[a,b] \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$



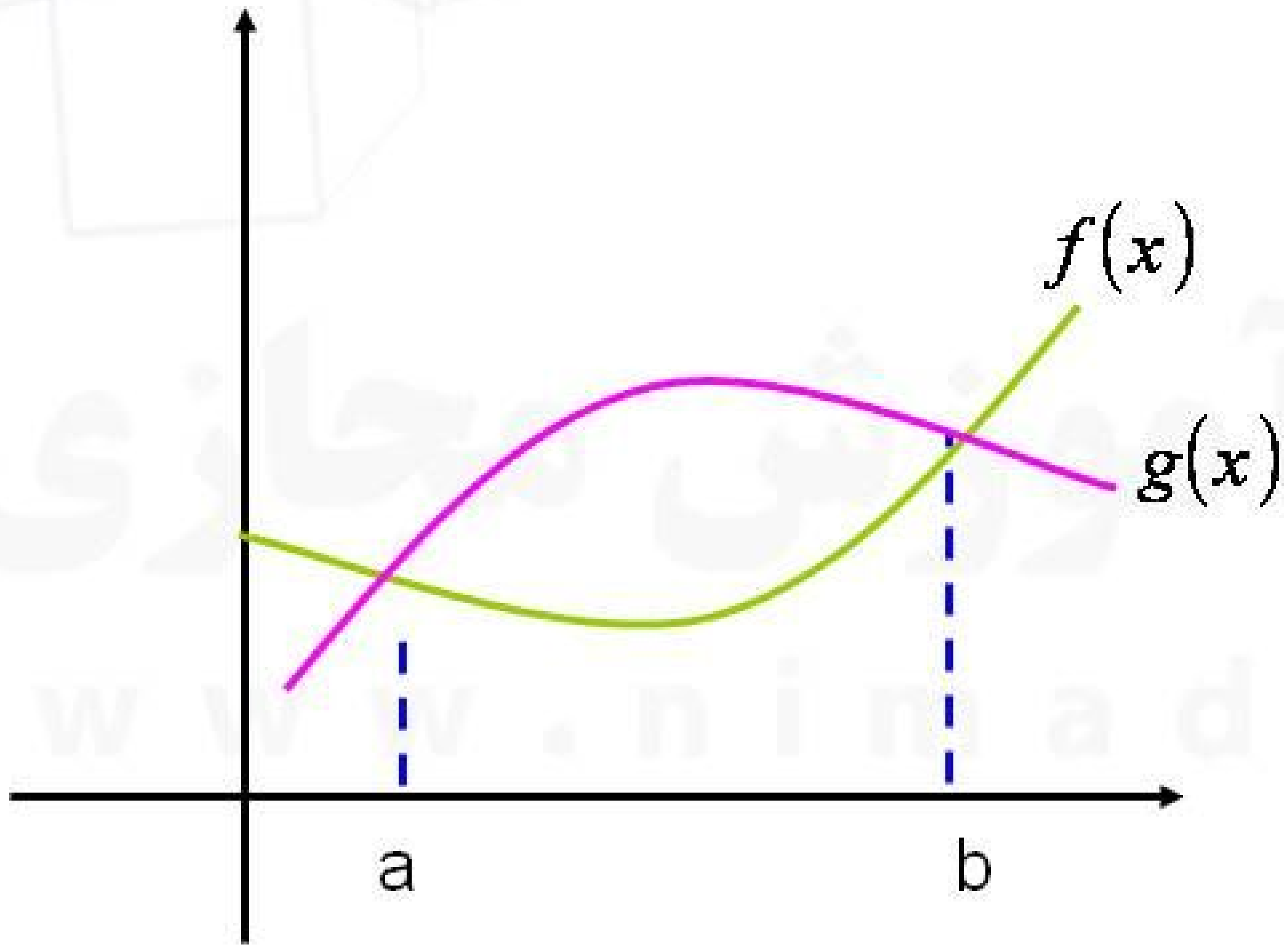
خاصیت ۷) زوج $f:[a,b] \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$



(خاصیت ۸

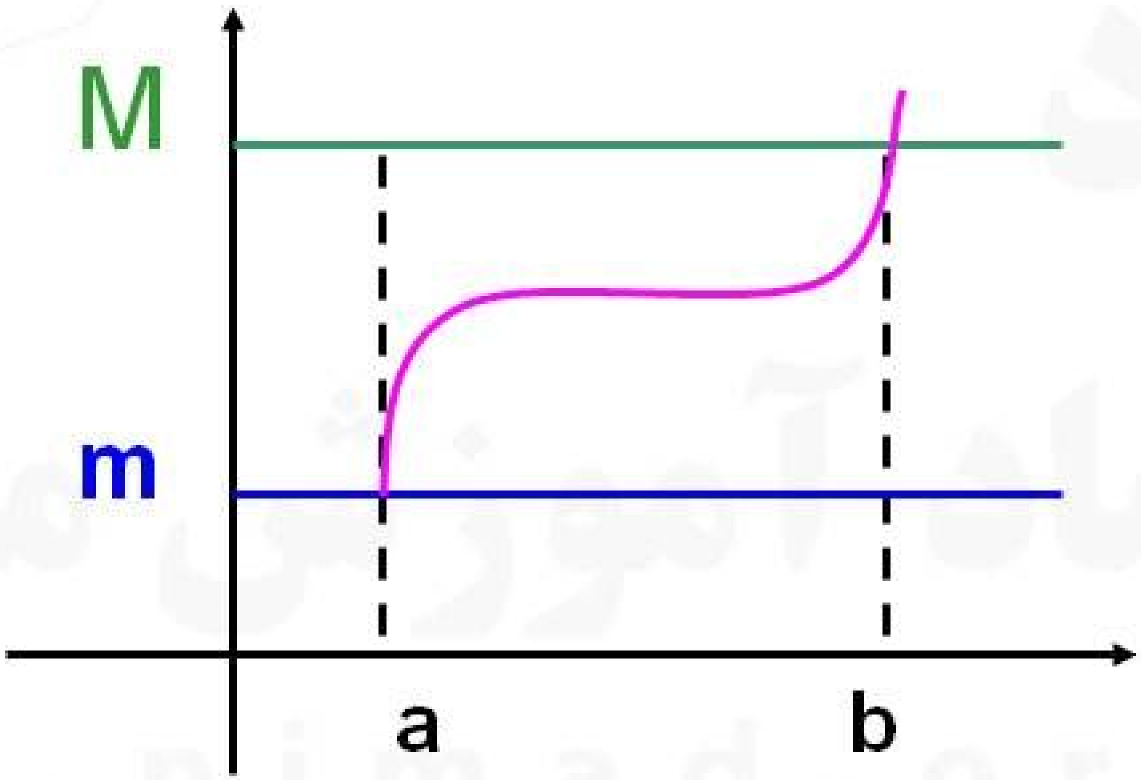
$$\forall x \in [a,b] \quad ؛ \quad f(x) \le g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad \le \quad \int_a^b g(x)\,dx$$

کاربرد : برای حل نا مساوی ها



خاصیت ۹)

$$\forall x \in [a,b] \quad ; \quad m \le f(x) \le M \quad \Rightarrow \quad m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a)$$

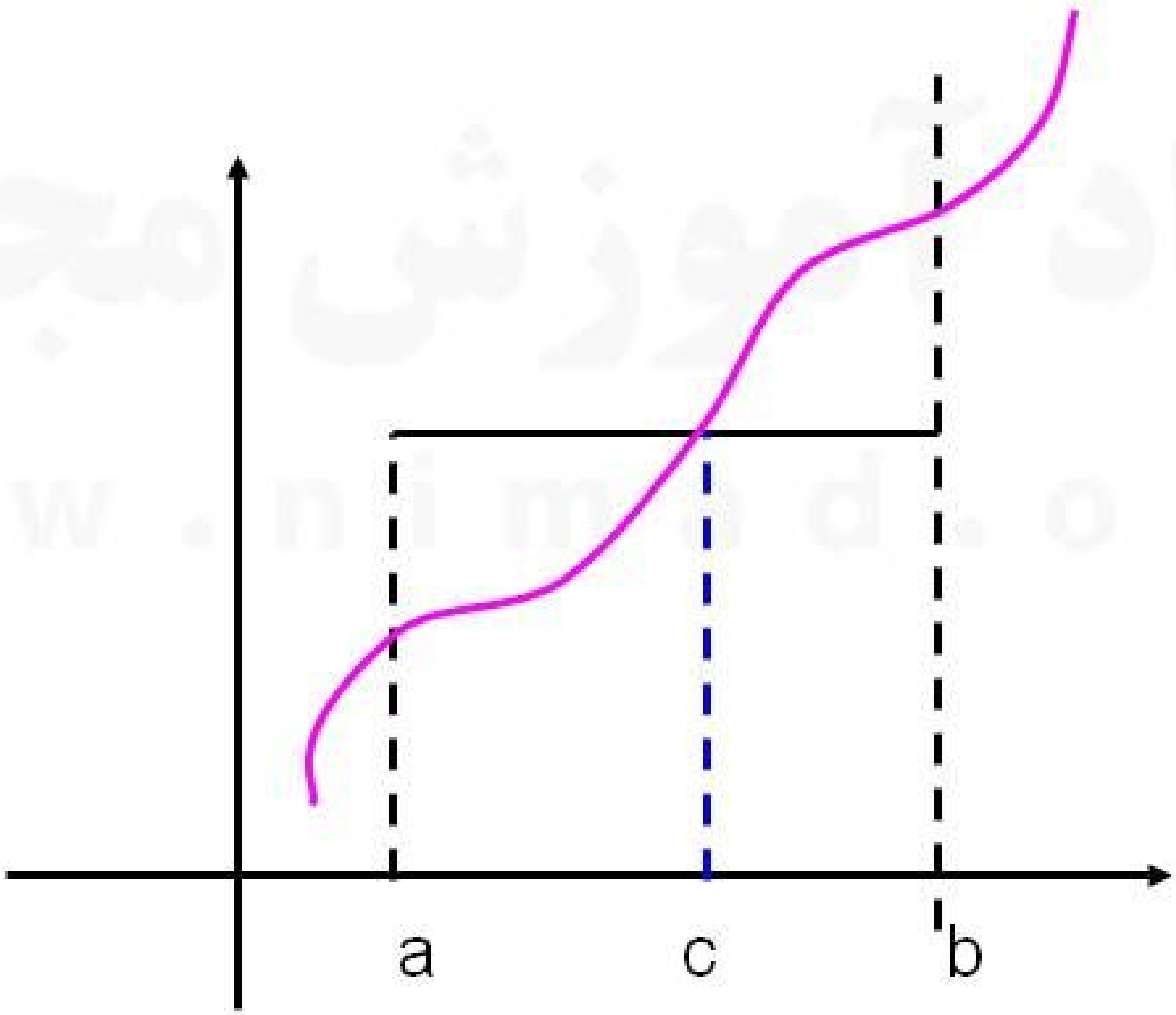


خاصیت ۱۰)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \quad \le \quad \int_a^b |f(x)|\,dx$$

خاصیت ۱۱) قضیه مقدار میانگین برای انتگرال

پیوسته $f:[a,b] \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a,b] \quad s.t. \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$



تعریف:

$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

مقدار متوسط در فاصله [a,b]

خاصیت ۱۲) تعمیم قضیه مقدار میانگین

$$\left.\begin{array}{l} f:[a,b] \\ \text{پیوسته} \\ g:[a,b] \\ \text{پیوسته} \\ g:[a,b] \\ \text{تغییر علامت ندهد} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \exists c\in[a,b] \quad s.t. \quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

خاصیت ۱۳) اولین قضیه حساب دیفرانسیل و انتگرال

انتگرال پذیر : $f:[a,b]$

$$\forall x \in [a,b]; \quad g(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \Rightarrow \begin{cases} g:[a,b] & \text{پیوسته} \\ g:(a,b) & \text{مشتق پذیر} \\ g'(x)=f(x) & \end{cases}$$

در واقع

$$\frac{d\int_a^x f(t)\,dt}{dx}=f(x)$$

خاصیت ۱۴) دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

انتگرال پذیر : $f:[a,b]$

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

دومین قضیه اساسی چه می گوید ؟

خاصیت ۱۵) روش تغییر متغیر در انتگرال های معین

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

$$[\alpha,\beta] \xrightarrow{\mathbf{g}} [a,b]$$

$$\begin{cases} x = g(t) \\ a = g(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \alpha = g^{-1}(a) \\ b = g(\beta) \quad \Rightarrow \quad \beta = g^{-1}(b) \end{cases}$$

خاصیت۱۶) روش جزء به جزء در انتگرال های معین

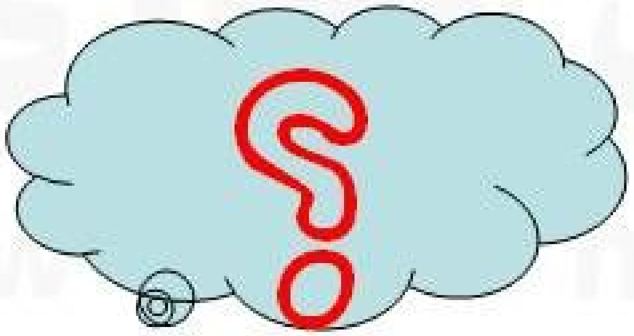
$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

خاصیت ۱۷) g و h مشتق پذیر

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = \left(\frac{dh(x)}{dx}\right) f(h(x)) - \left(\frac{dg(x)}{dx}\right) f(g(x))$$

مثال)

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & x<1 \\ 2x+1 & x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \int_{-2}^{3} f(x)\,dx=?$$



راه حل)

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,d(x)$$

$$= \int_{-2}^{1} x^3\,dx + \int_{1}^{3} (2x+1)\,dx$$

(خاصیت ۵ شکستن بازه)

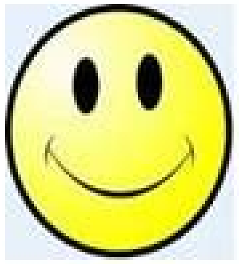
$$= \frac{x^4}{4} \Big|_{-2}^{1} + \left(x^2 + x\right) \Big|_{1}^{3}$$

(فرمول های اصلی انتگرال)

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{(-2)^4}{4}\right) + \left(9 + 3 - (1)^2 - 1\right)$$

(خاصیت۱۴)

$$= \frac{-15}{4} + 10 = \frac{25}{4}$$



مثال)

$$f(x) = |x+2|\,[x] \quad \Rightarrow \quad \int_{-3}^{1} f(x)\,dx = ?$$

راه حل)

$$x+2=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=-2$$

$$\int_{-3}^{1} f(x)\,dx=\int_{-3}^{-2} |x+2|\,[x]\,dx+\int_{-2}^{-1} |x+2|\,[x]\,dx$$

$$+\int_{-1}^{0} |x+2|\,[x]\,dx+\int_{0}^{1} |x+2|\,[x]\,dx$$

$$=-3\int_{-3}^{-2} (-x-2)\,dx-2\int_{-2}^{-1} (x+2)\,dx-1\int_{-1}^{0} (x+2)\,dx$$

$$= -3\left(\frac{-x^2}{2} - 2x \Big|_{-3}^{-2}\right) - 2\left(\frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-2}^{-1}\right) - \left(\frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-1}^{0}\right)$$

$$= -3\left(\frac{-4}{2} + 4 - \left(\frac{-9}{2} + 6\right)\right) - 2\left(\frac{1}{2} - 2 - (2-4)\right) - \left(0 - \left(\frac{1}{2} - 2\right)\right)$$

$$= \frac{-3}{2} - 1 - \frac{3}{2} = -4$$

مثال)

$$\int_{-1/2}^{1/2} \cosh x \,.Ln\, \frac{1-x}{1+x}\, dx$$

راه حل)

فرد $$f(x) = Ln\frac{1-x}{1+x}$$

$$f(-x) = Ln\frac{1+x}{1-x} = Ln(1+x) - Ln(1-x)$$

$$= -(Ln(1-x) - Ln(1+x))$$

$$= -Ln\frac{1-x}{1+x} = -f(x)$$

$$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad ، \qquad g(-x)=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=g(x)$$

زوج

بنا به خاصیت (۶)

$$\Rightarrow \qquad f(x)g.(x) \xrightarrow{} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cosh x \,.Ln\,\frac{1-x}{1+x}\,dx=0$$

فرد است

مثال)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_{0}^{x^2} \frac{t}{e^t}\, dt}{x^4}$$

راه حل)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{t}{e^t}dt}{x^4}=\frac{0}{0}$$

قاعده هوپیتال

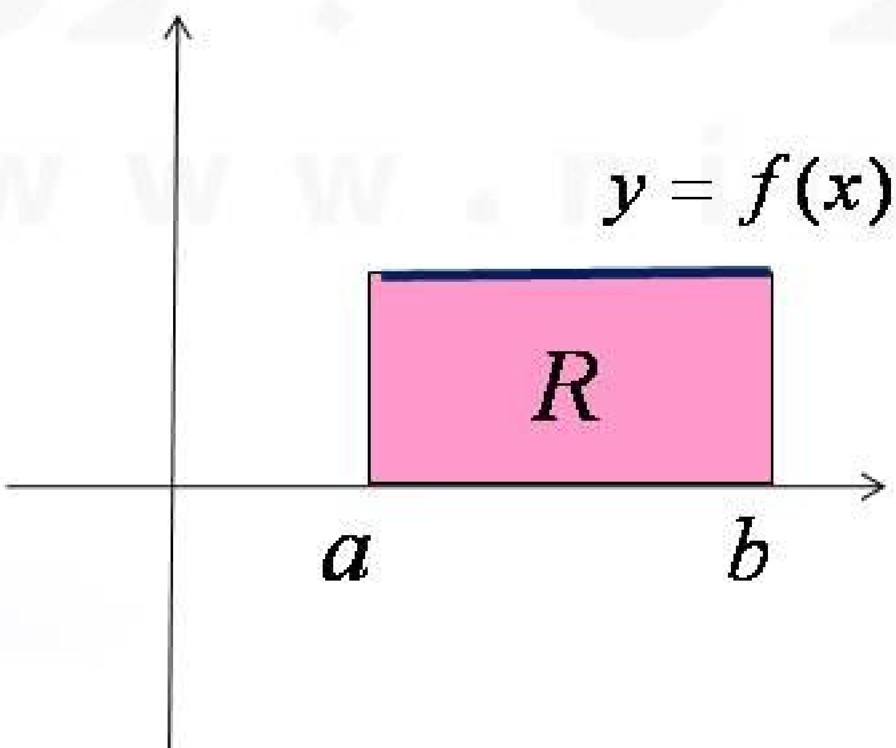
$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^{x^2}\frac{t}{e^t}dt\right)'}{\left(x^4\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\times\frac{x^2}{e^{x2}}}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{4e^{x2}}$$

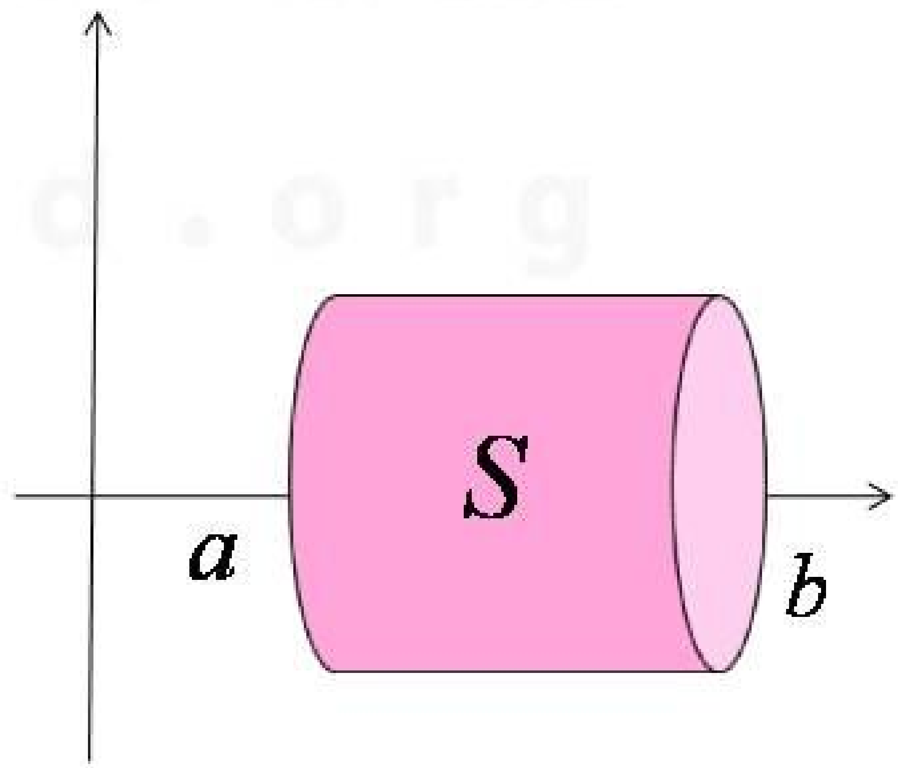
$$=\frac{2}{4e^0}=\frac{1}{2}$$

حجم حاصل از دوران

۱- فرض کنید S جسم حاصل از دوران ناحیه مسطح R، که توسط $y = f(x)$ ، $y = 0$ ، $x = a$ و $x = b$ محصور شده ، حول محور x باشد، در اینصورت حجم S از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$





۲- اگر ناحیه R ناحیه محدود به نمودارهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ ، $(f \geq g)$ در فاصله $[a,b]$ باشد ، در این صورت اگر آن را حول محور x ها دوران دهیم ، حجم جسم حاصل از دستور زیر به دست می آید:

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\,dx$$

۳- اگر R ناحیه محدود به $x=\varphi(y)$ در فاصله $c \le y \le d$ باشد، حجم جسم حاصل از دوران ناحیه R حول خط $x=\alpha$ را از دستور زیر محاسبه می کنیم:

$$V=\pi\int_c^d(\varphi(y)-\alpha)^2\,dy$$

مثال:

حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به سهمی و خط

زیر را حول محور x ها به دست آورید.

$$y = x^2 - 1$$

$$y = x + 1$$

$y = x^2 - 1$

راه حل:

$y = x + 1$

$$x^2 - 1 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

محل تلاقی دو منحنی

$$V = \pi \int_{-1}^{2} [(x+1)^2 - (x^2 - 1)^2]\, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} [x^2 + 2x + 1 - x^4 - 1 + 2x^2]\, dx = \pi \int_{-1}^{2} [3x^2 - x^4 + 2x)]\, dx$$

$$= \pi \left(x^3 - \frac{1}{5} x^5 + x^2 \Big|_{-1}^{2} \right) = \frac{27\pi}{5}$$

مثال:

حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی

$$y = \sin 2x$$

و محور x ها و خطوط $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{2}$

را حول محور x ها به دست آورید.

$y = \sin 2x$ $\qquad x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2}$

راه حل:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 2x)\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos 4x)}{2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{8} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$