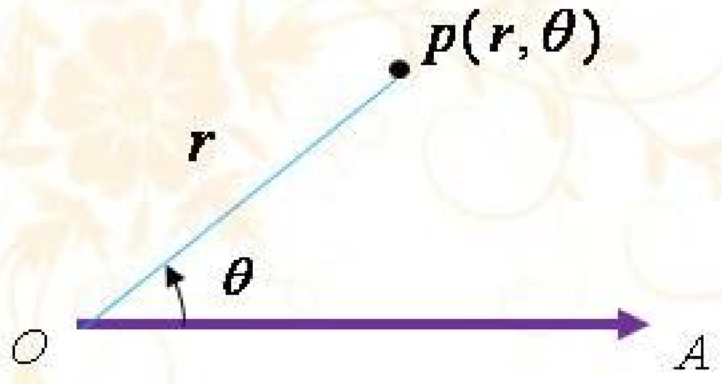
مختصات قطبی

Polar coordinates



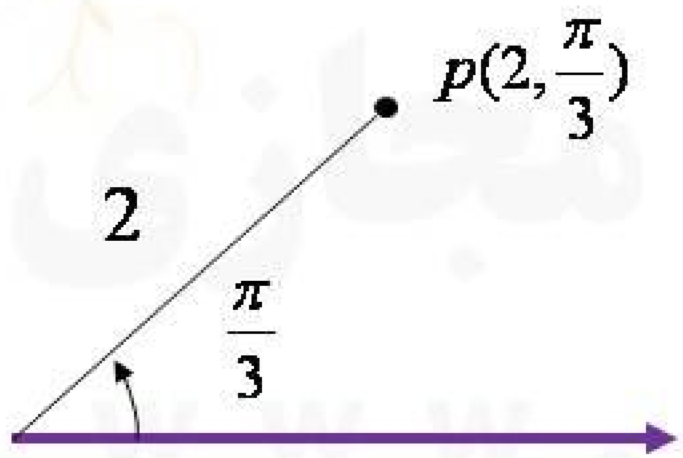
O: مبدأ قطب

OA: محور قطبی

r: فاصله p از O

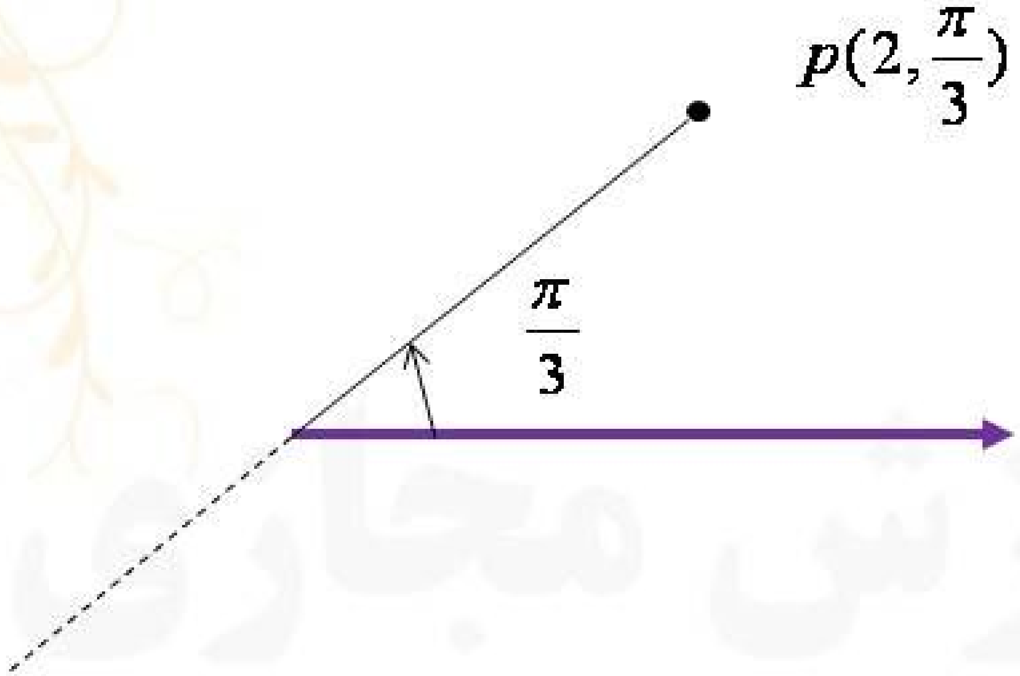
θ: زاویه جهت دار از OA تا Op (جهت مثلثاتی مثبت)

منظور از $-r$:



$$(-r,\theta)=(r,\pi+\theta)$$

توجه می توان برای هر نقطه در مختصات قطبی بی نهایت مختصات قطبی اختیار کرد.

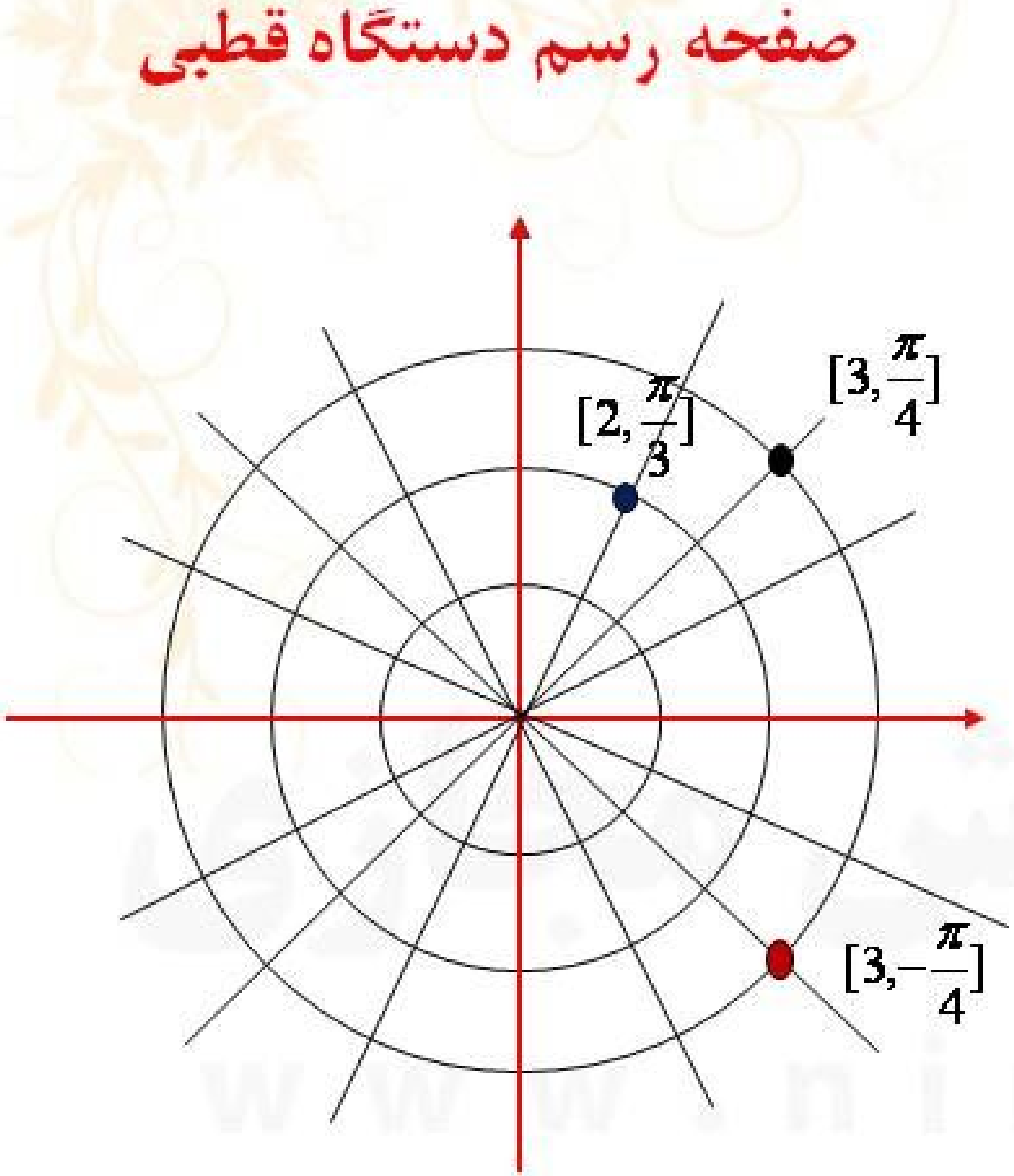


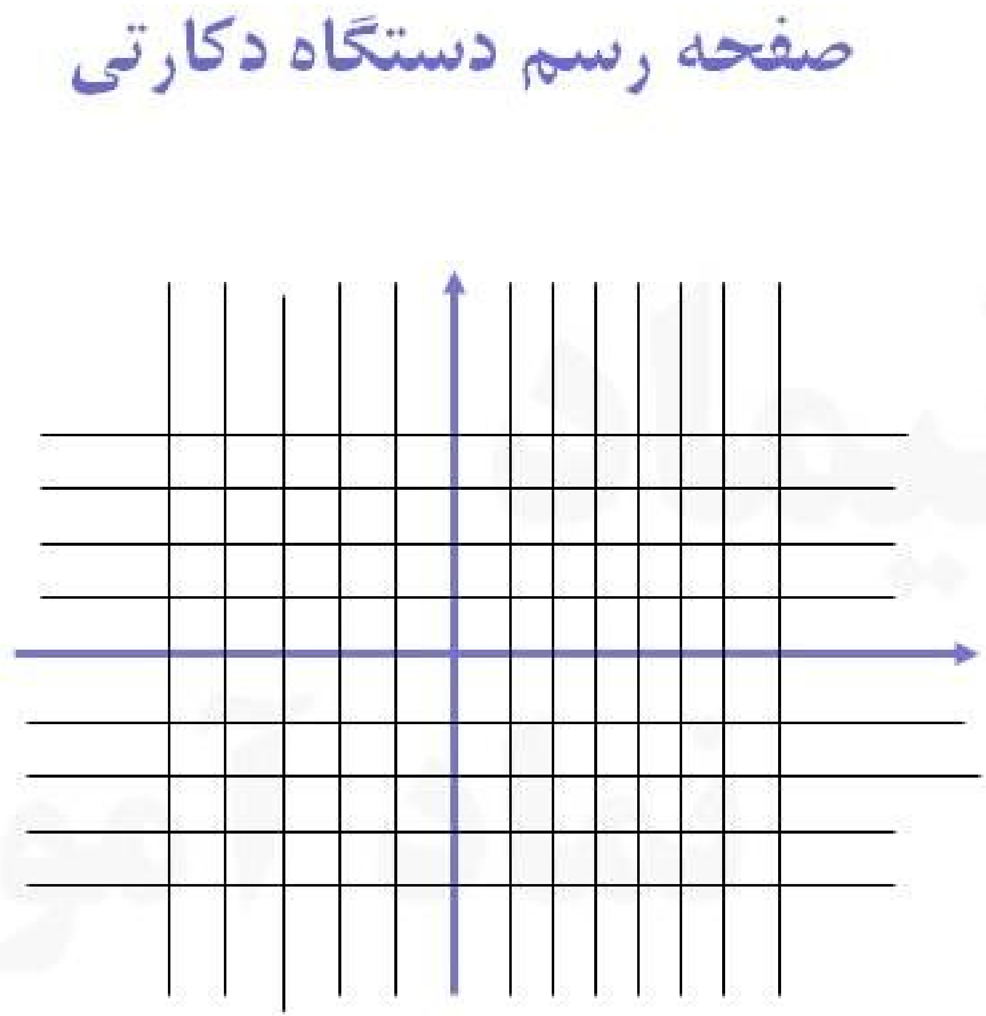
$$p(2,2\pi+\frac{\pi}{3})$$

$$p(2,-2\pi+\frac{\pi}{3})$$

$$p(-2,\pi+\frac{\pi}{3})$$

$$p(-2,-\pi+\frac{\pi}{3})$$





معادلاتی که به صورت $r = f(\theta)$ و $F(r,\theta) = C$ می باشد را معادلات قطبی می نامند.

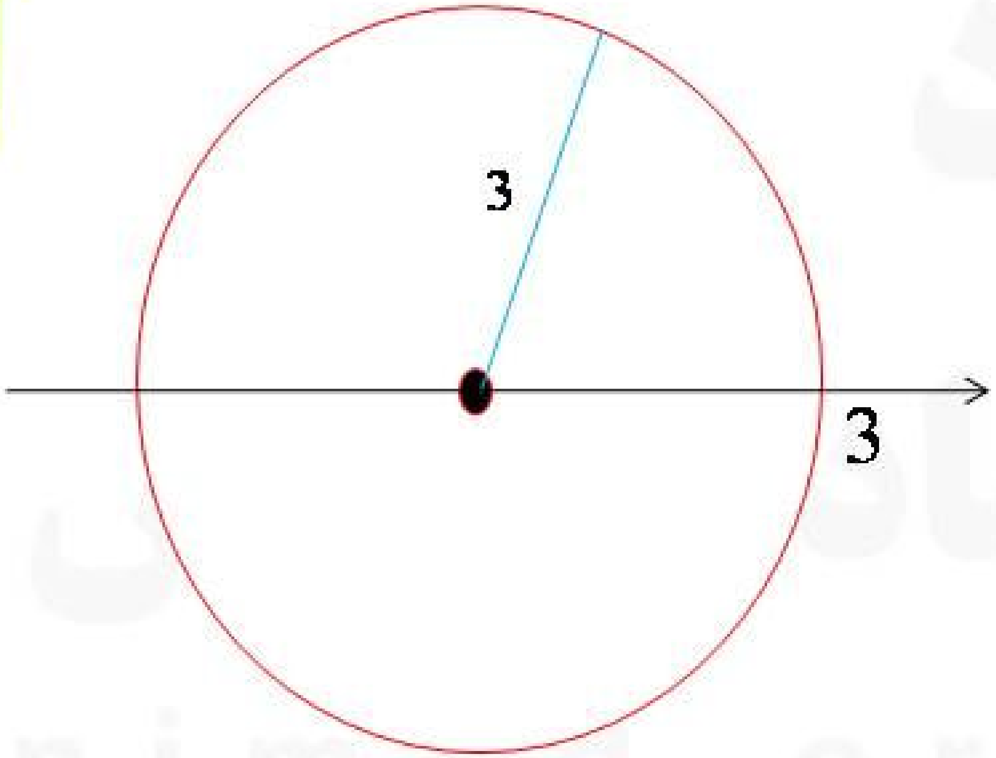
مثال:

نمودار معادله زیر را رسم کنید.

$$r = 3$$

راه حل:

$r = 3$



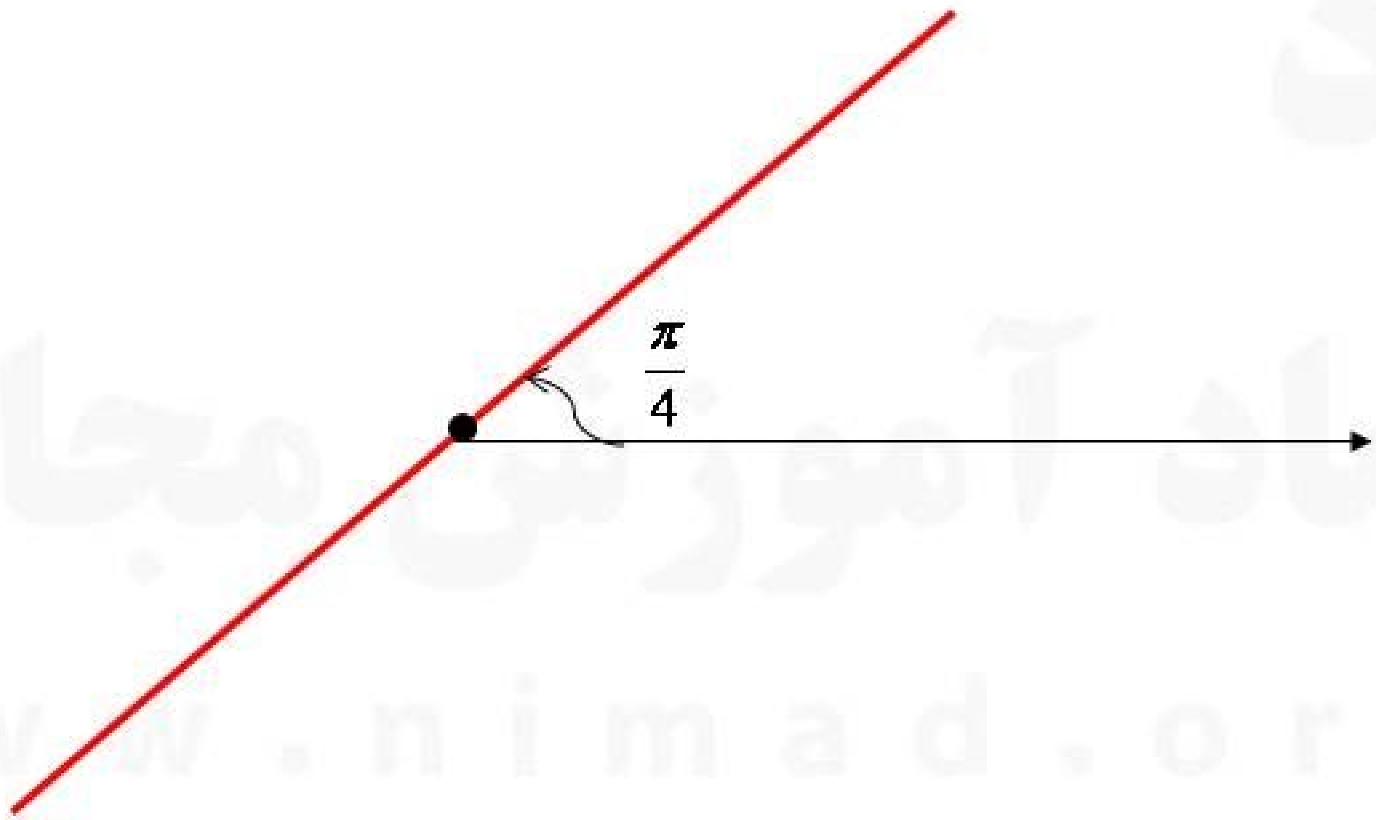
مثال:

نمودار معادله زیر را رسم کنید.

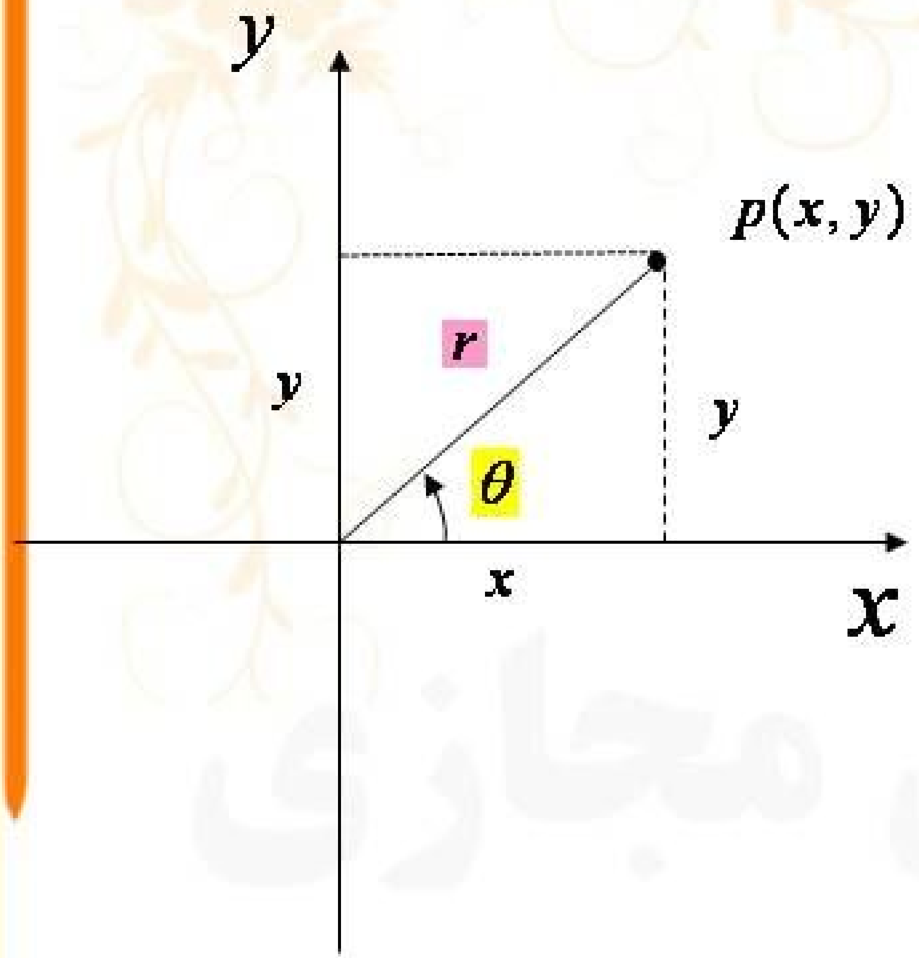
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

راه حل:

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$



رابطه بین مختصات قطبی و دکارتی



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0) \end{cases}$$

توجه : θ باید چنان انتخاب شود که نقطه p در ناحیه درستی قرار بگیرد.

مثال:

مختصات قطبی هر یک از نقاط زیر را بنویسید.

$B = (-2,-2)$ $\qquad$ $A = (2,2)$

$D = (-2,2)$ $\qquad$ $C = (2,-2)$

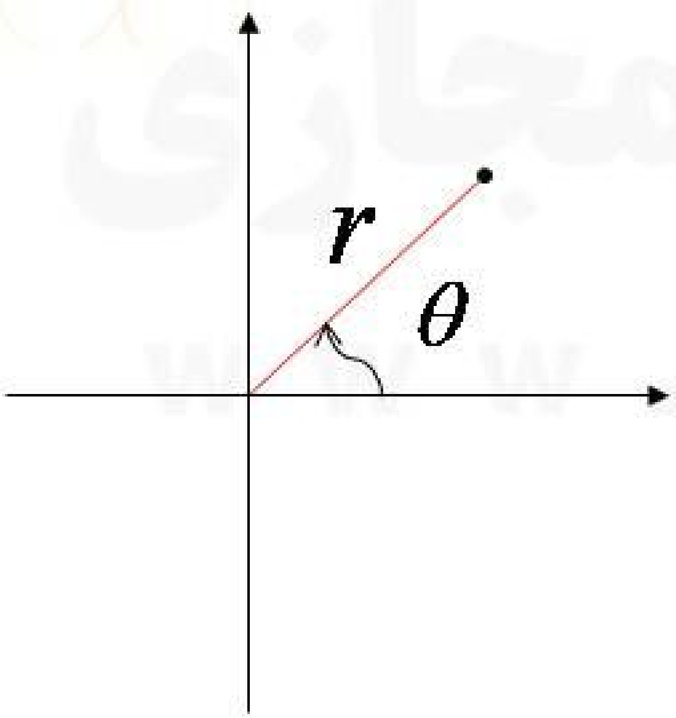
راه حل:

$A=(2,2)$

$r=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

$\tan\theta=\frac{2}{2}=1$

$\Rightarrow \quad \theta=\frac{\pi}{4}$

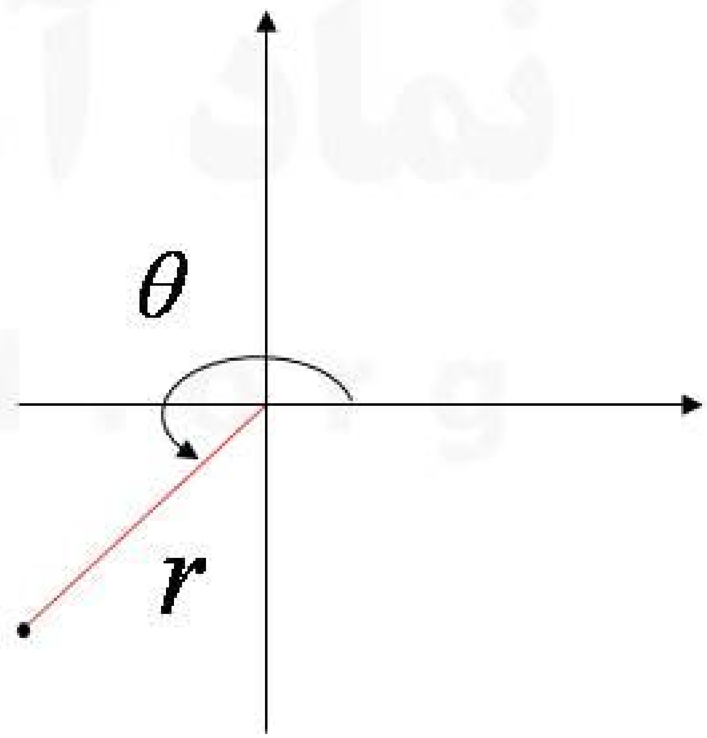


$B=(-2,-2)$

$r=2\sqrt{2}$

$\tan\theta=\frac{-2}{-2}=1$

$\Rightarrow \quad \theta=\pi+\frac{\pi}{4}$

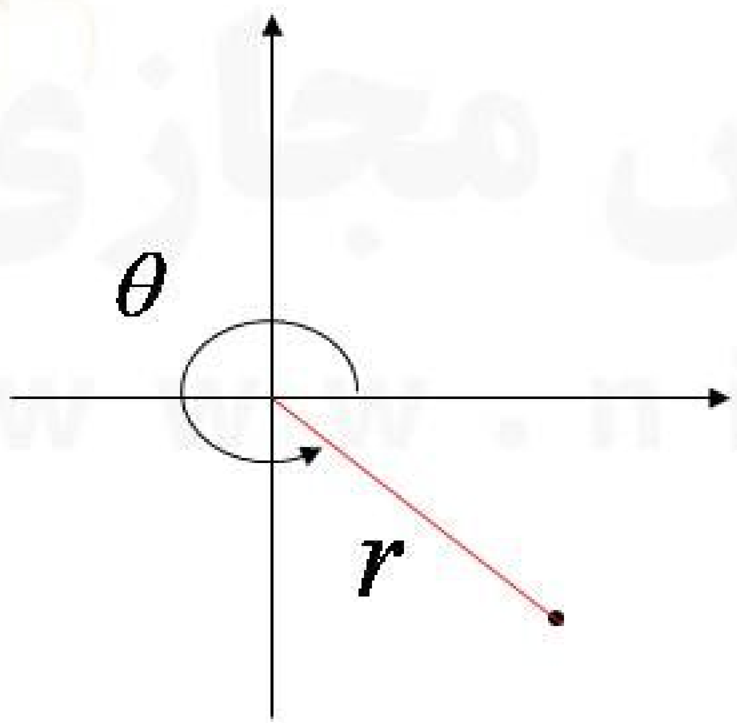


$C = (2,-2)$

$r = 2\sqrt{2}$

$\tan\theta = \dfrac{-2}{2} = -1$

$\Rightarrow \quad \theta = 2\pi - \dfrac{\pi}{4}$

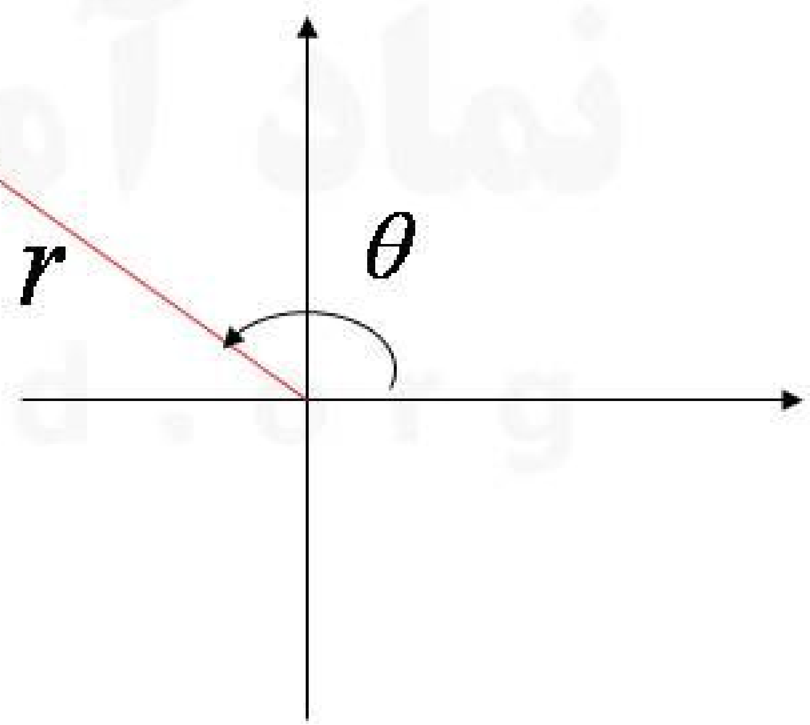


$D = (-2,2)$

$r = 2\sqrt{2}$

$\tan\theta = \dfrac{2}{-2} = -1$

$\Rightarrow \quad \theta = \pi - \dfrac{\pi}{4}$



مثال:

معادله قطبی خط راست زیر را به دست آورید.

$$ax + by = c$$

راه حل:

$$ax + by = c$$

$$\Rightarrow \qquad ar\cos\theta + br\sin\theta = c$$

$$\Rightarrow \qquad r = \frac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$$

مثال:

معادله دکارتی منحنی زیر را بیابید.

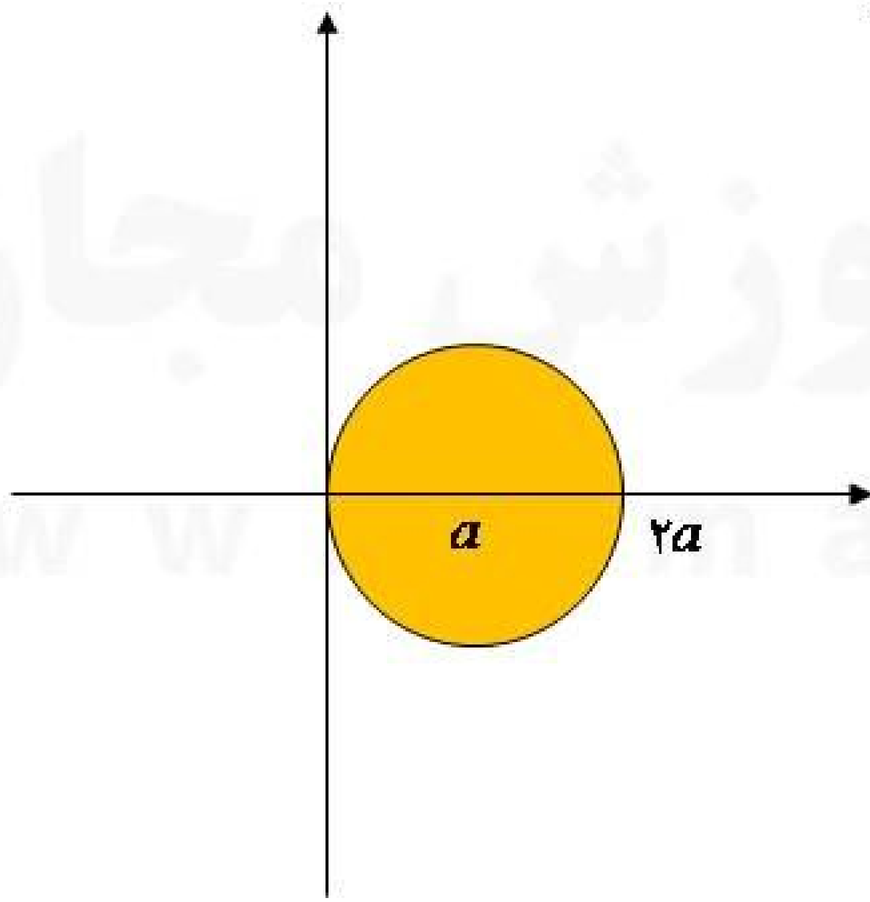
$$r = 2a\cos\theta$$

راه حل:

$$r = 2a\cos\theta \overset{\times r}{\Longrightarrow} r^2 = 2ar\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2ax$$

$$\Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2$$

معادله دایره به مرکز $(a,0)$ و شعاع a



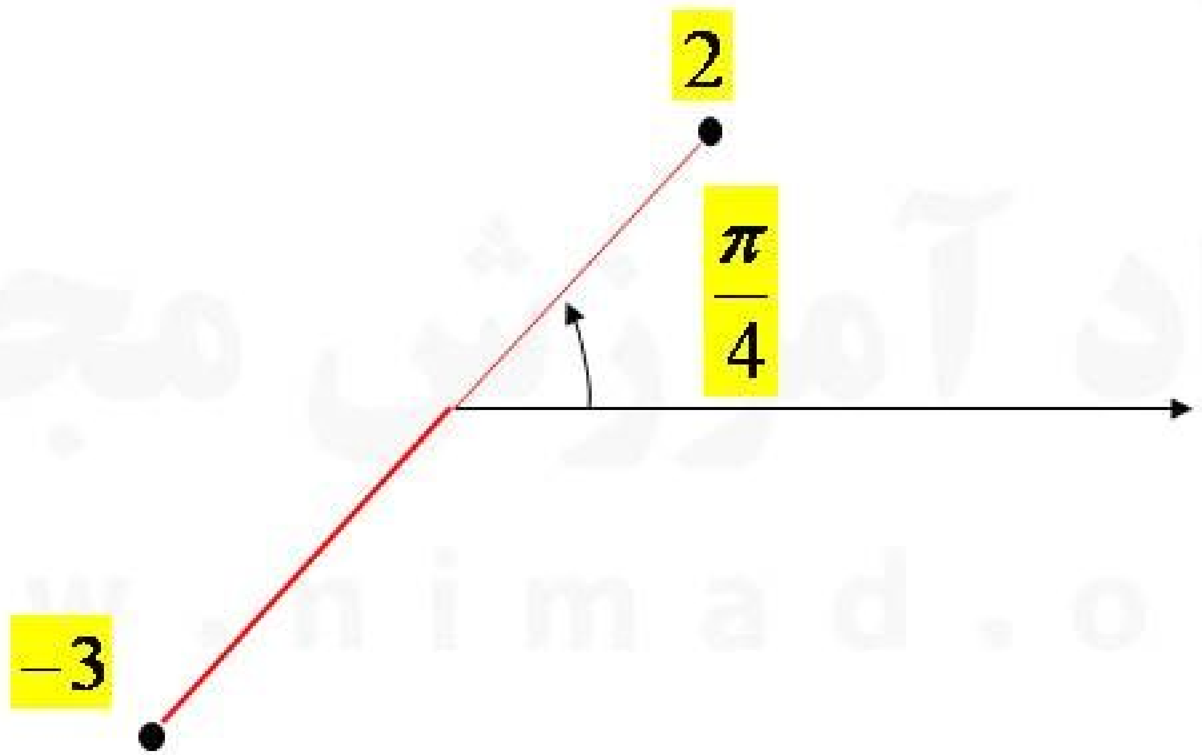
مثال:

ناحیه زیر را رسم کنید.

$$D=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ -3\leq r\leq 2\quad,\quad \theta=\frac{\pi}{4}\right\}$$

راه حل:

$$D=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ -3\le r\le 2\quad,\quad \theta=\frac{\pi}{4}\right\}$$



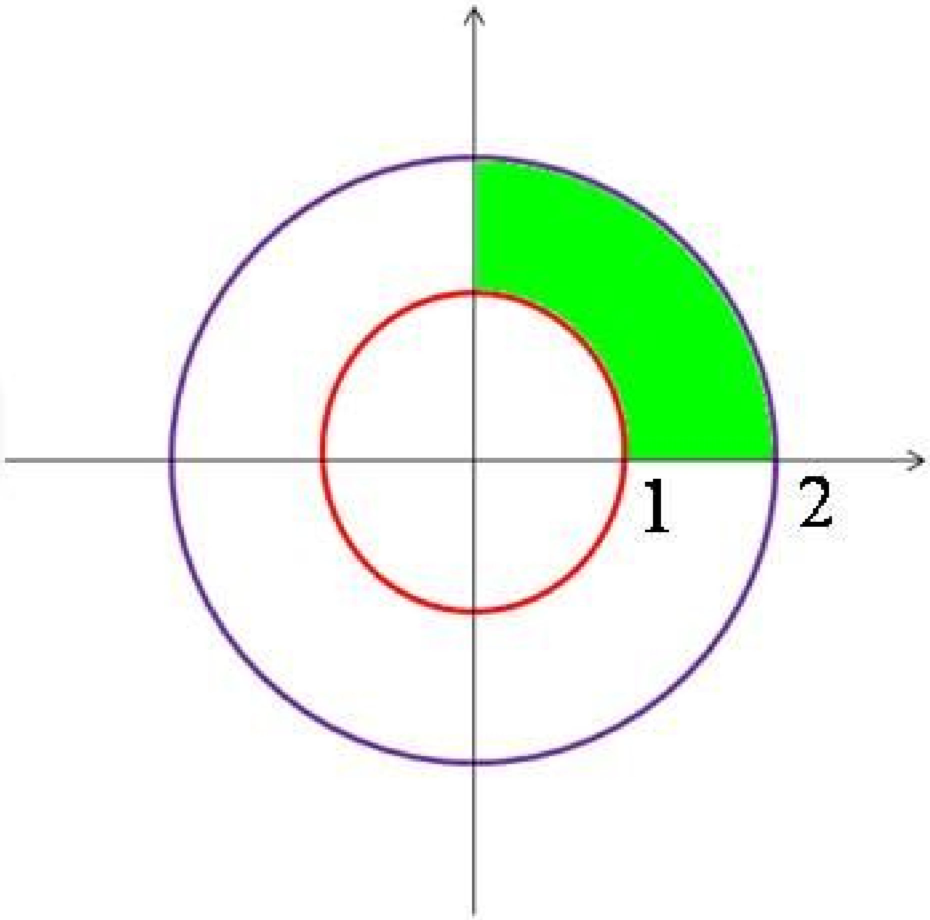
مثال:

ناحیه زیر را رسم کنید.

$$D=\left\{(r,\theta)\quad\middle|\quad 1\le r\le 2\quad,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

راه حل:

$$D = \left\{ (r,\theta) \;\middle|\; 1 \le r \le 2 \quad , \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\}$$



رسم نمودار های قطبی

۱– نقطه یابی

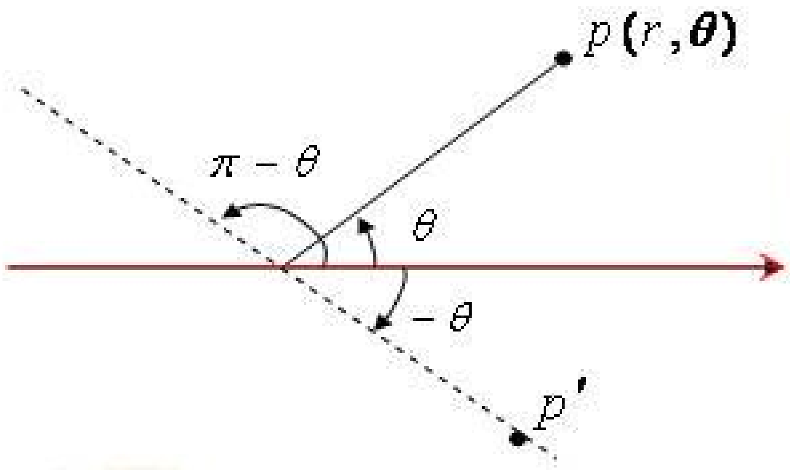
۲– با کمک دستگاه دکارتی

۳– تبدیل به معادله دکارتی

تقارن در مختصات قطبی

تقارن در مختصات قطبی

تقارن نسبت به محور قطبی (محور تقارن)



با تبدیل

θ به $-\theta$

یا

θ به $۲\pi-\theta$

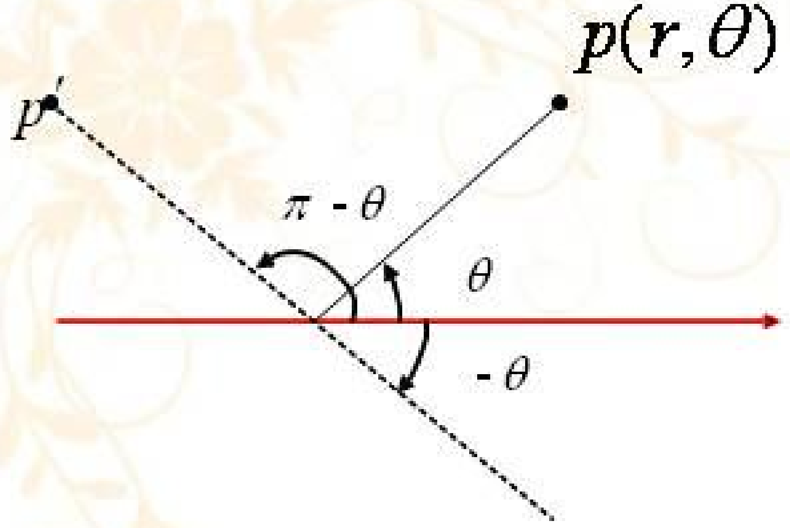
یا

θ به $\pi-\theta$
r به $-r$

معادله تغییر نکند

توجه: نمودار $r = f(\cos\theta)$ نسبت به محور قطبی متقارن است

تقارن نسبت به محور $\frac{\pi}{۲}$ (محور تقارن)



با تبدیل

θ به $\pi-\theta$

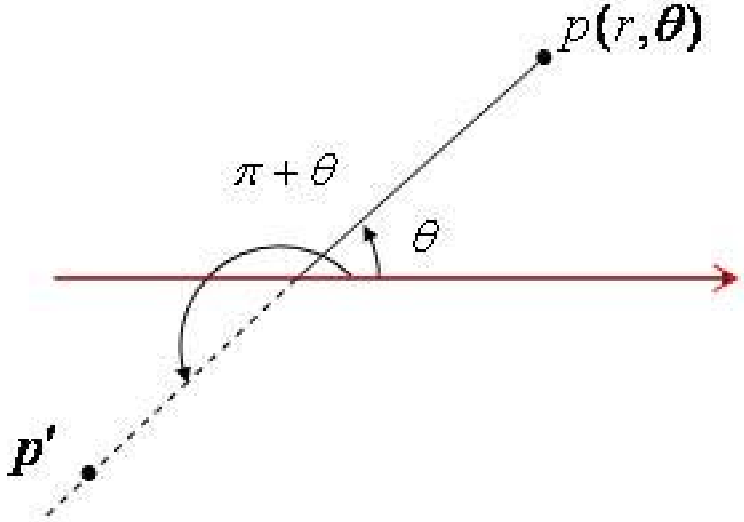
یا

θ به $-\theta$
r به $-r$

معادله تغییر نکند

توجه: نمودار $r = f(\sin\theta)$ نسبت به خط $\theta = \frac{\pi}{۲}$ متقارن است.

تقارن نسبت به قطب (مرکز تقارن)



با تبدیل

r به $-r$

یا

θ به $\pi+\theta$

معادله تغییر نکند

مثال:

$$r^2 = 4\cos\theta$$

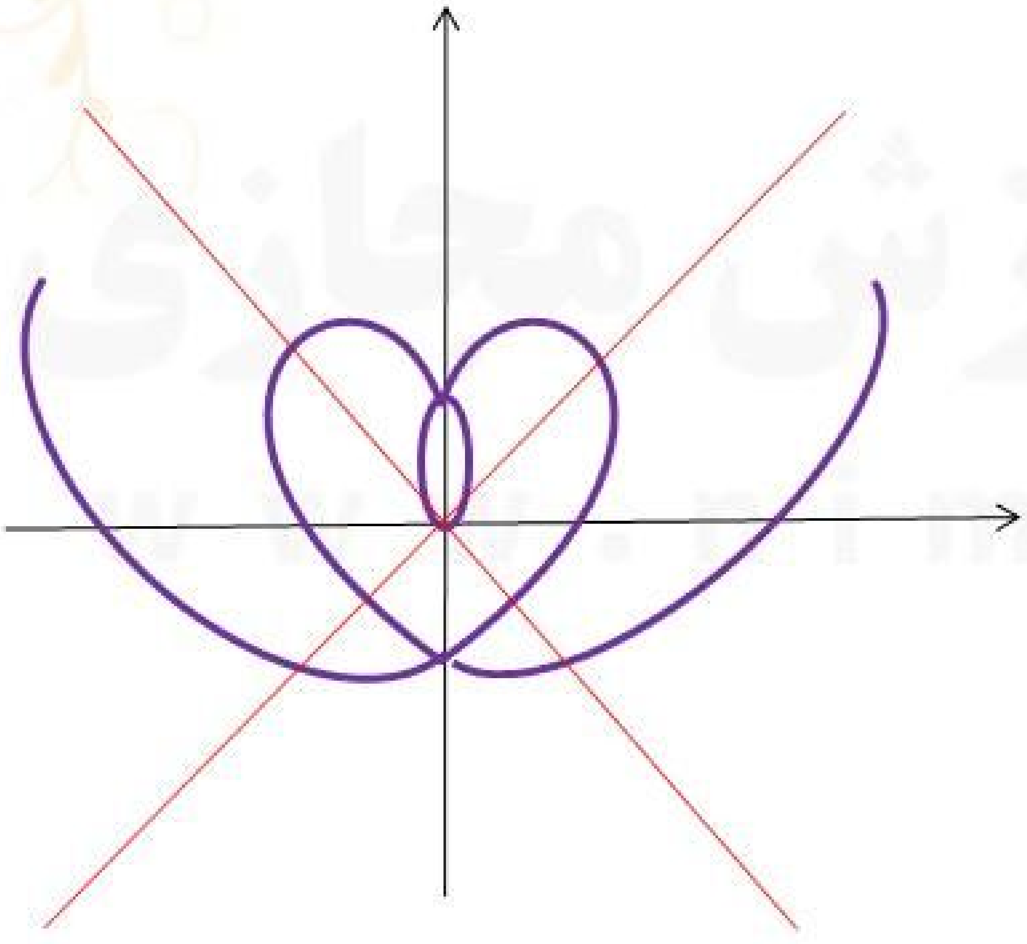
(قطب مرکز تقارن) $r \to -r \quad : (-r)^2 = 4\cos\theta \quad \to \quad r^2 = 4\cos\theta$

($\frac{\pi}{2}$ محور تقارن) $\begin{cases} r \to -r \\ \theta \to -\theta \end{cases} \quad : (-r)^2 = 4\cos(-\theta) \quad \to \quad r^2 = 4\cos\theta$

(محور قطب محور تقارن) $\theta \to -\theta \quad : \quad r^2 = 4\cos(-\theta) \quad \to \quad r^2 = 4\cos\theta$

توجه :

شرایط بیان شده برای تقارن کافی بوده ولی لازم نیست . مثلاً $r = \theta + 2\pi$ نسبت به خط $\theta = \frac{\pi}{2}$ متقارن است ولی آزمون تقارن این مطلب را نشان نمی دهد.



مارپیچ ارشمیدس

رسم نمودارهای قطبی
توسط نقطه یابی

مثال:

نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$r = 2 + \cos\theta$$

راه حل:

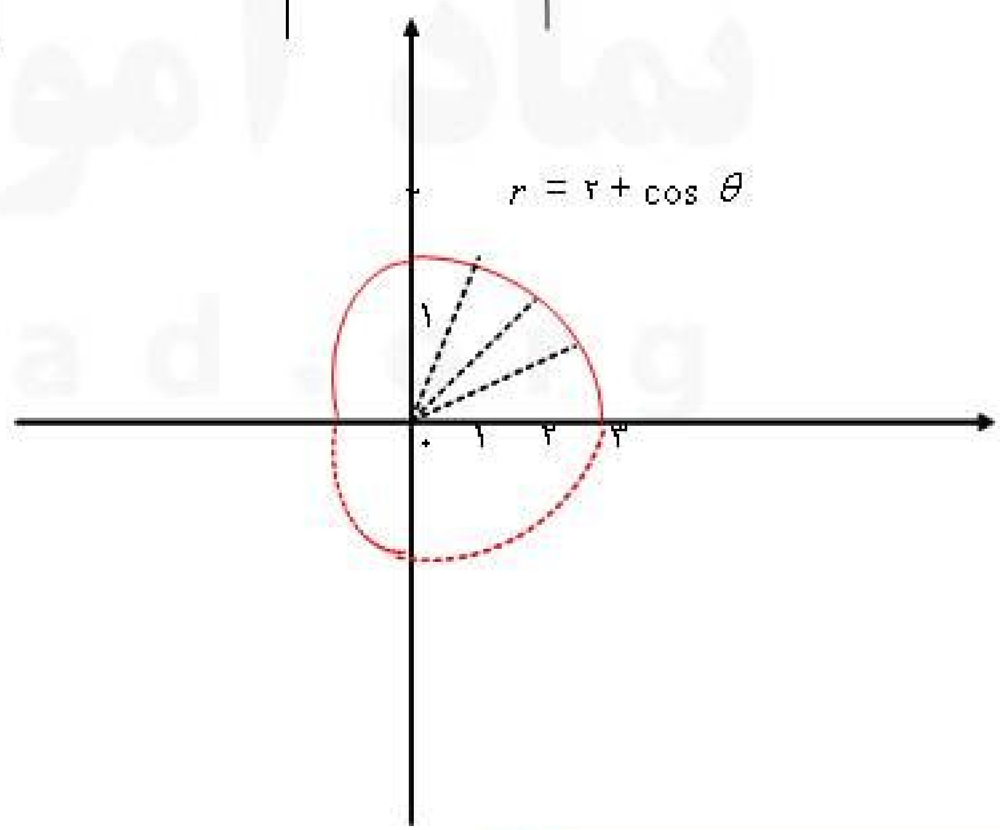
$$r = 2 + \cos\theta$$

$\theta \to -\theta$

$۲ + \cos(-\theta) = ۲ + \cos\theta = r$

محور قطب محور تقارن نمودار

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
r	3	$2+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2+\frac{1}{2}$	2	1



مثال:

نمودار تابع زیر را رسم کنید.

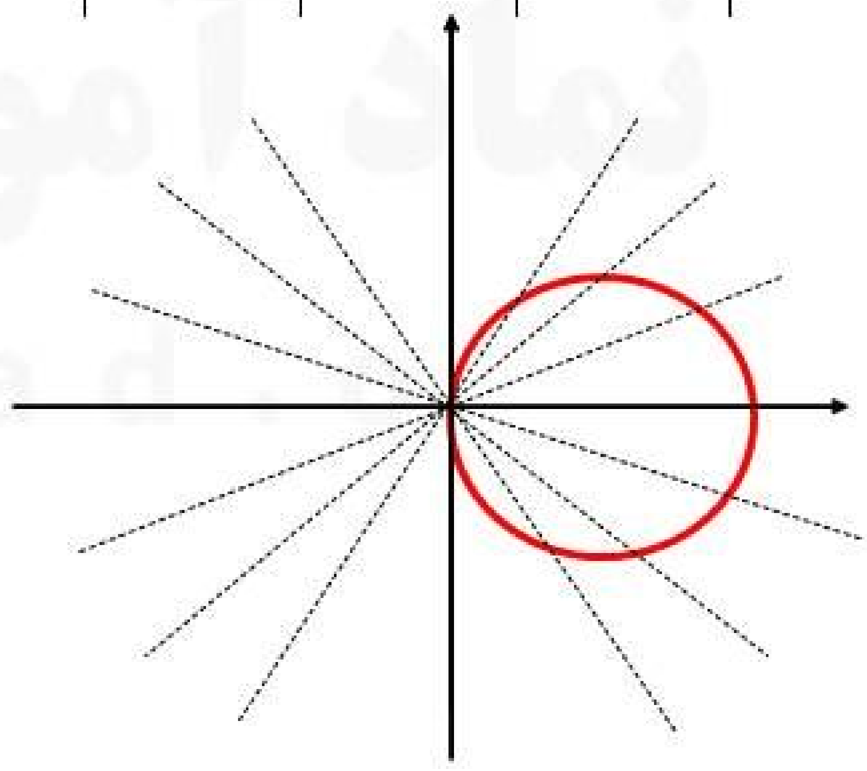
$$r = ۲\cos\theta$$

$$r = ۲\cos\theta$$

راه حل:

$\theta \to -\theta$ $\quad ۲\cos(-\theta) = ۲\cos\theta = r$ $\quad$ محور قطب محور تقارن

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$2\cos\theta$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	-2



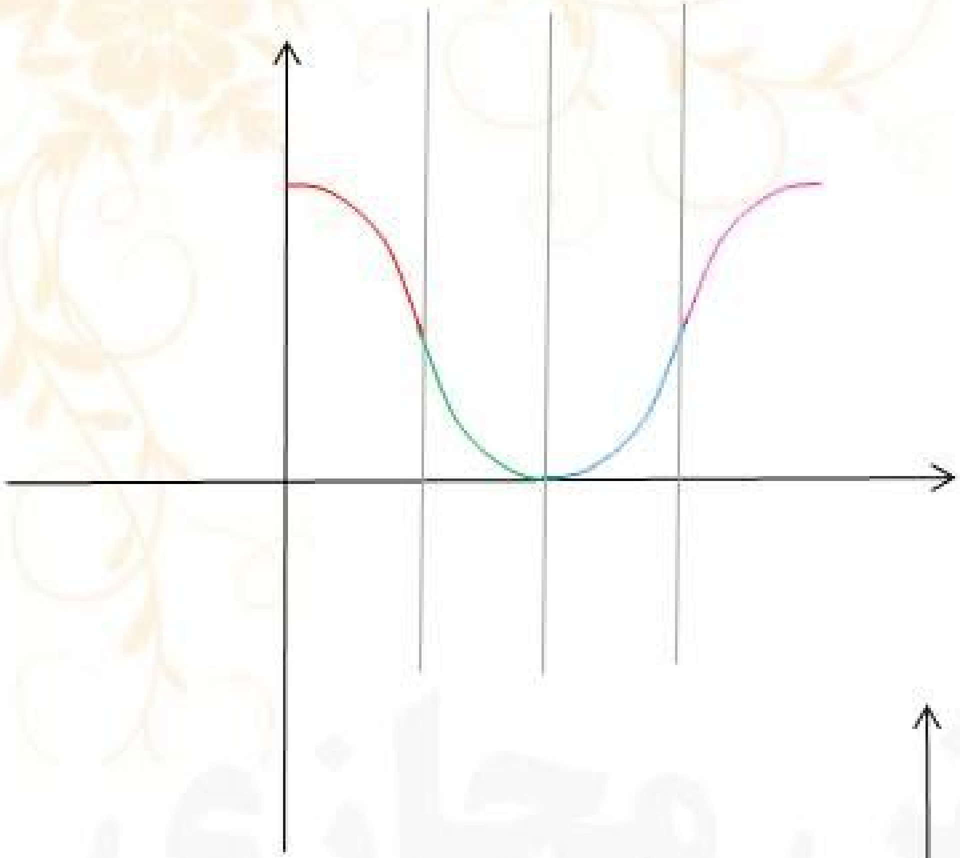
رسم نمودار قطبی
توسط دستگاه دکارتی

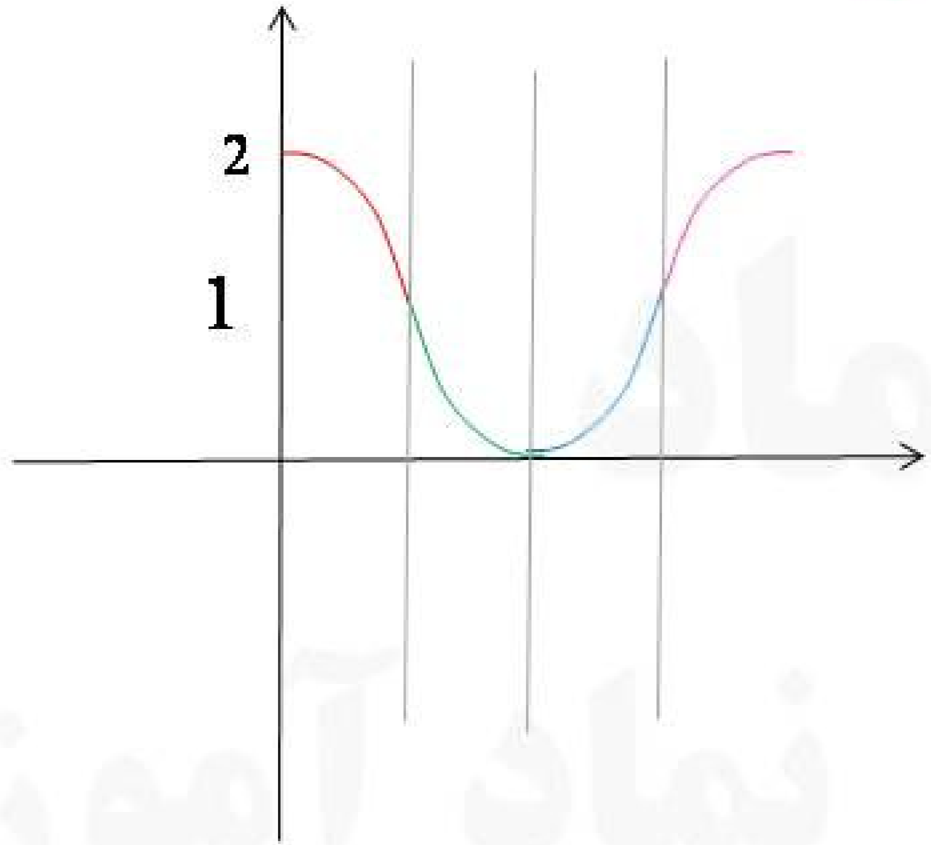
مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

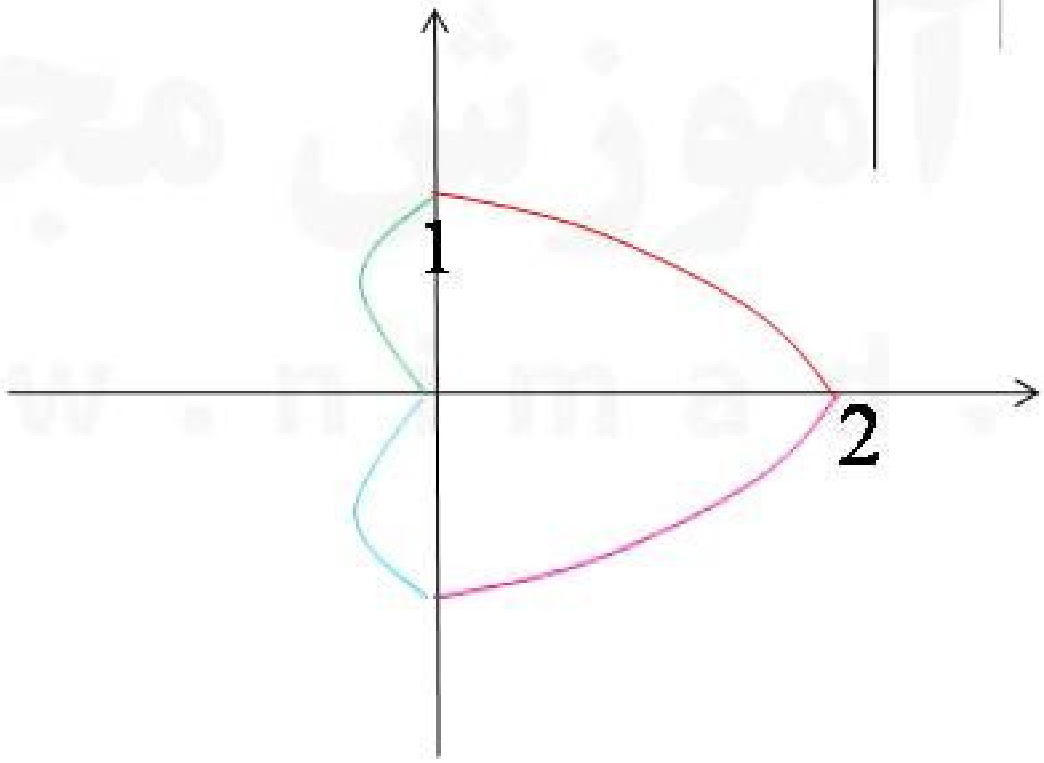
$$r = 1 + \cos\theta$$

$$r = 1 + \cos\theta$$

راه حل:



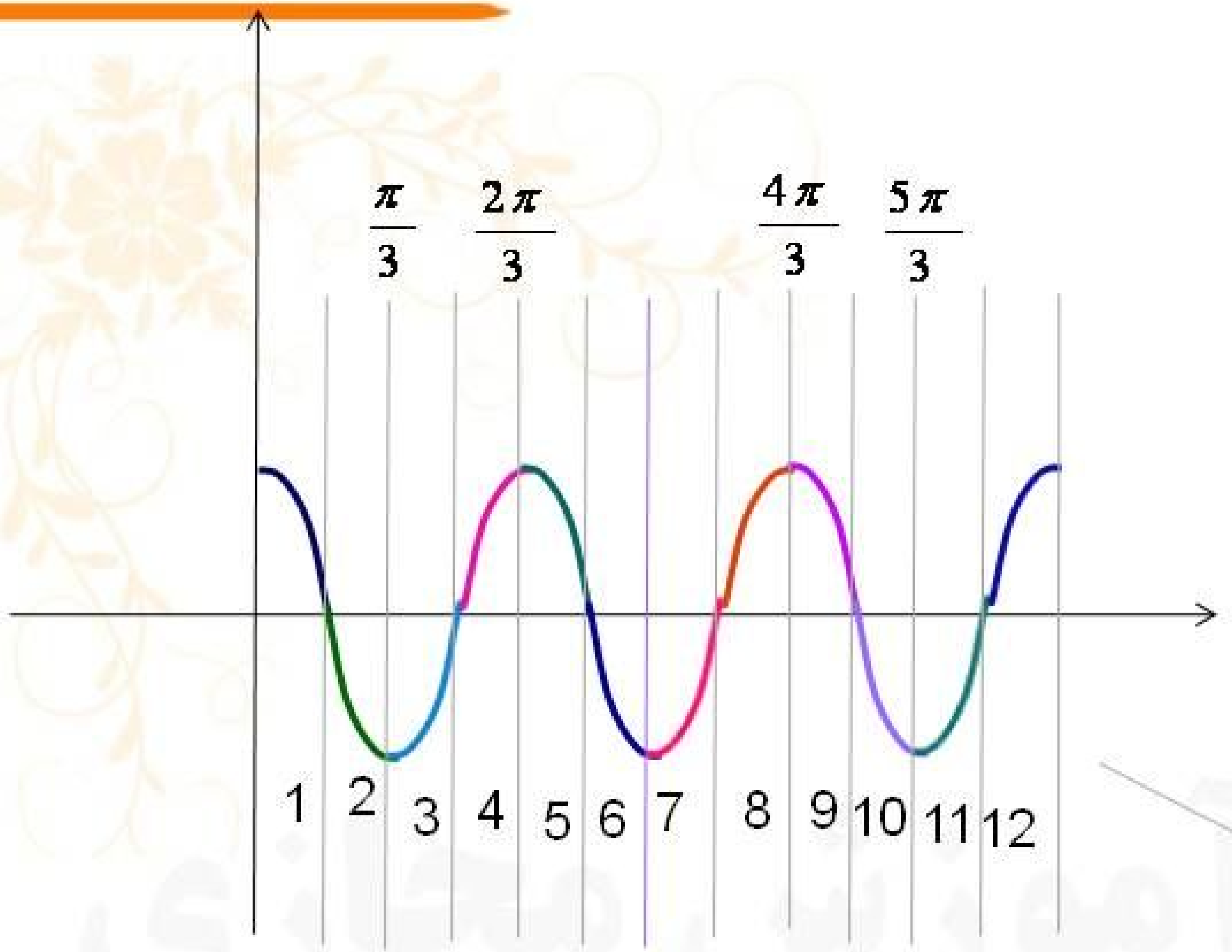




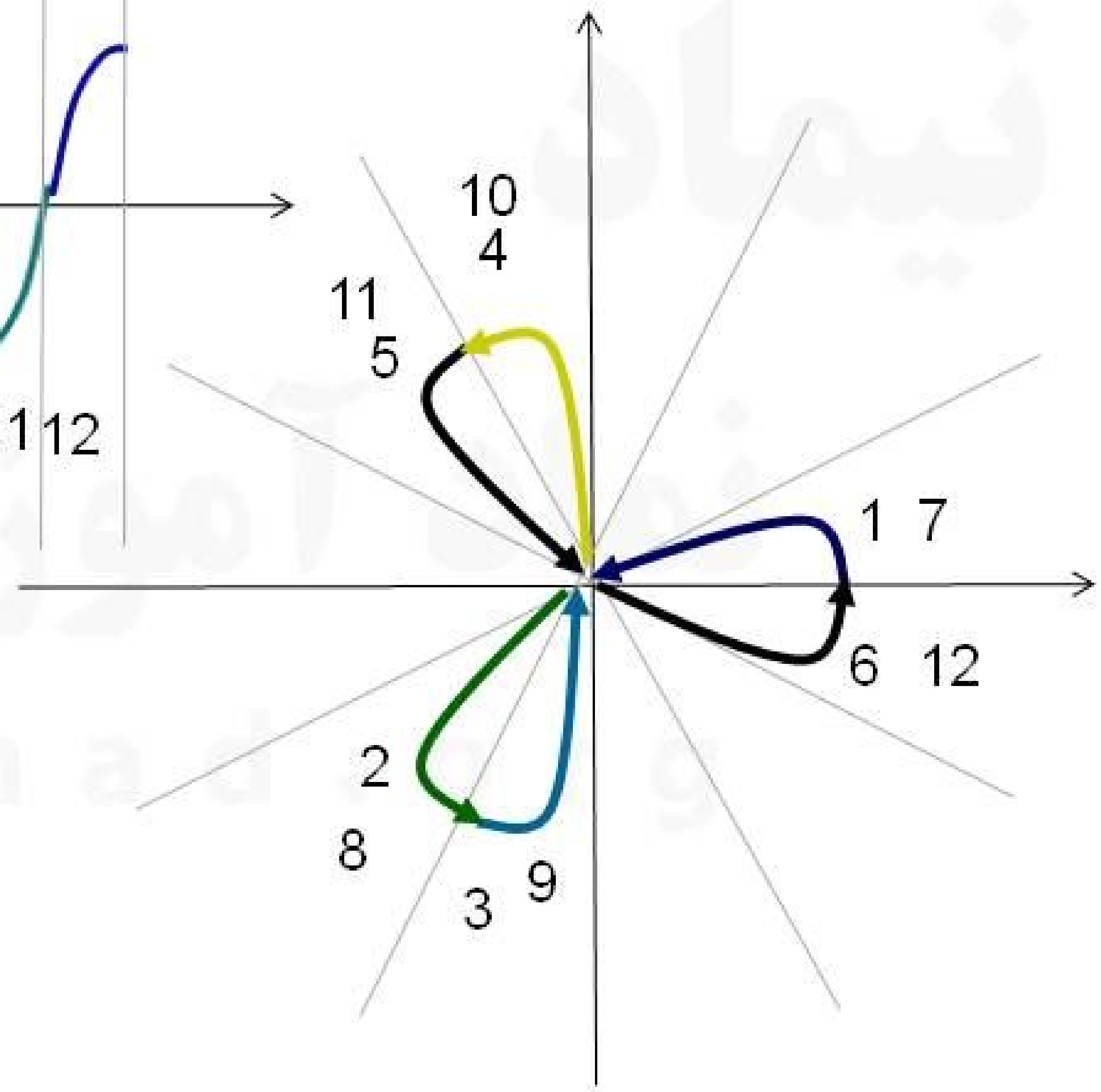
مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$r = 3\cos 3\theta$$

راه حل:



$\frac{\pi}{3}$ $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{4\pi}{3}$ $\frac{5\pi}{3}$
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



10
4
11
5
1 7
6 12
2
8
3 9

رسم نمودار قطبی
با تبدیل به
معادله دکارتی

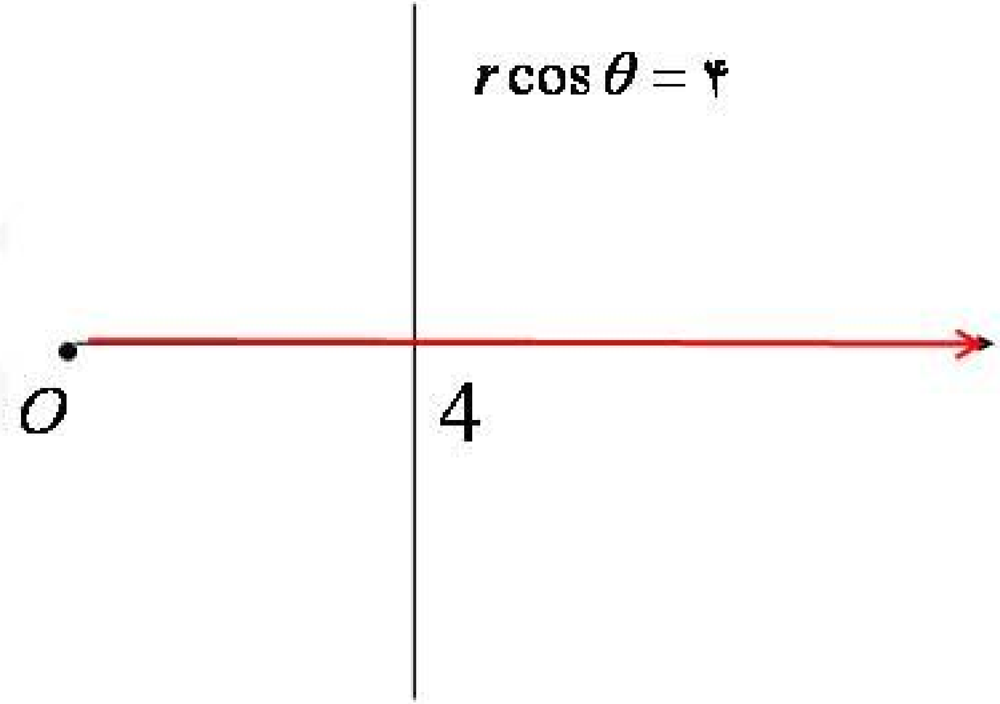
مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$r = \frac{4}{\cos\theta}$$

$$r = \frac{4}{\cos\theta}$$

راه حل:

$$r\cos\theta = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$



مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$r = 2\sin\theta + 4\cos\theta$$

راه حل:

$$r = 2\sin\theta + 4\cos\theta \quad \Rightarrow r^2 = 2r\sin\theta + 4r\cos\theta$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2y + 4x \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

دایره به مرکز $A\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$ و شعاع $\sqrt{5}$

مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$r^2 = \sec 2\theta$$

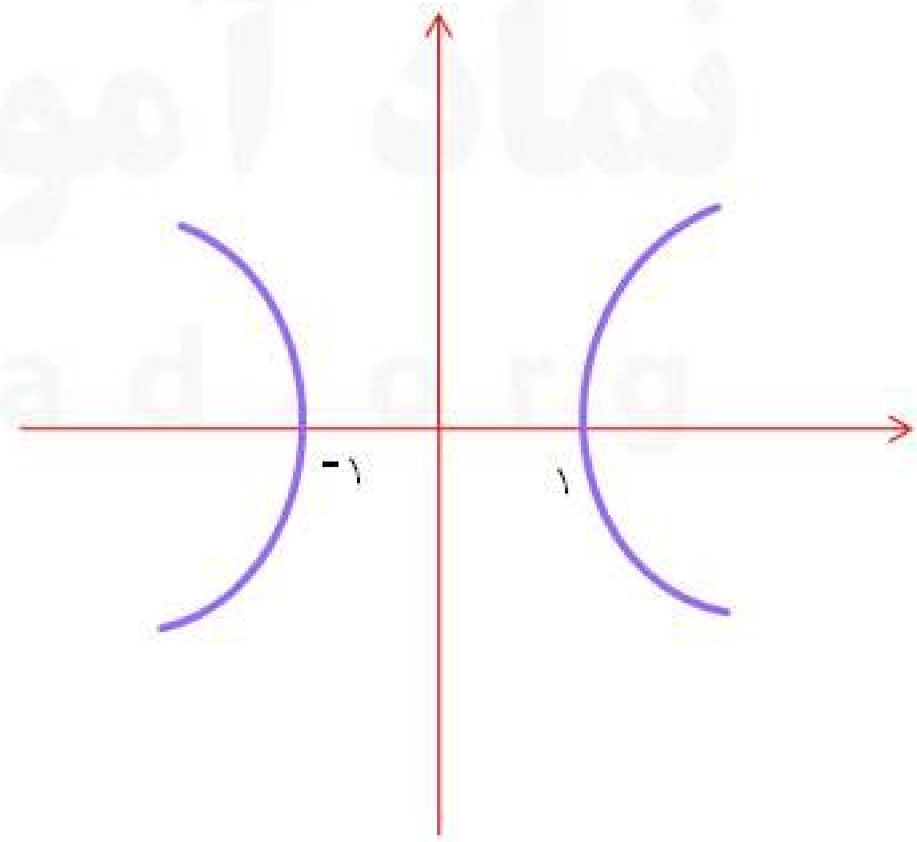
راه حل:

$$r^2 = \sec 2\theta$$

$$r^2 = \frac{1}{\cos 2\theta} \Rightarrow r^2 \cos 2\theta = 1 \Rightarrow r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 1$$

نمودار هذلولی



توجه :

برای رسم نمودار $F(r,\theta+\alpha)=c$ یا $r=f(\theta+\alpha)$ کافی است نمودار $r=f(\theta)$ یا $F(r,\theta)=c$ را رسم نموده و سپس نمودار حاصل را نسبت به مبدا مختصات به اندازه $\theta_0=\alpha$ دوران دهیم.

مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

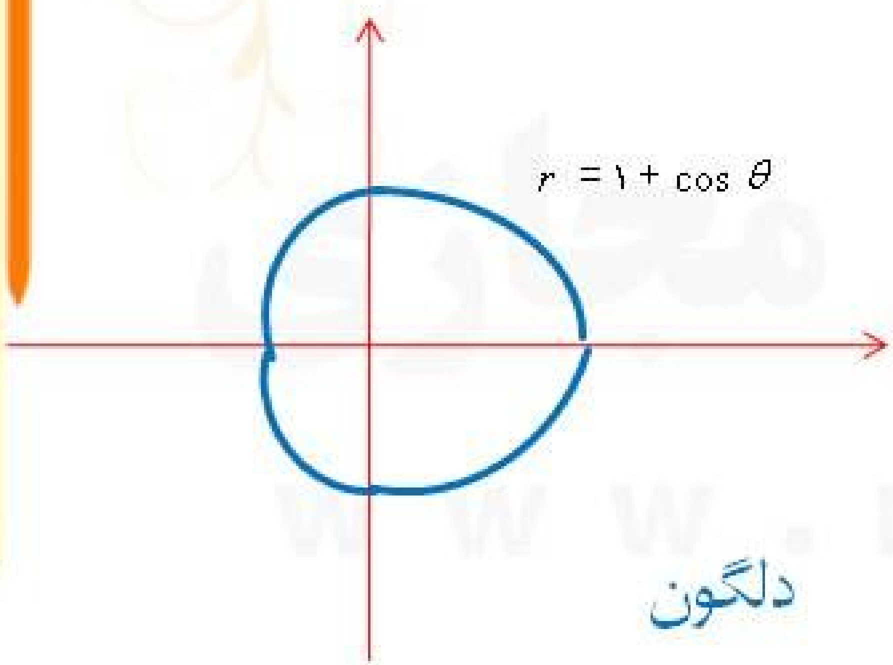
$$r = 1 - \cos\theta$$

راه حل:

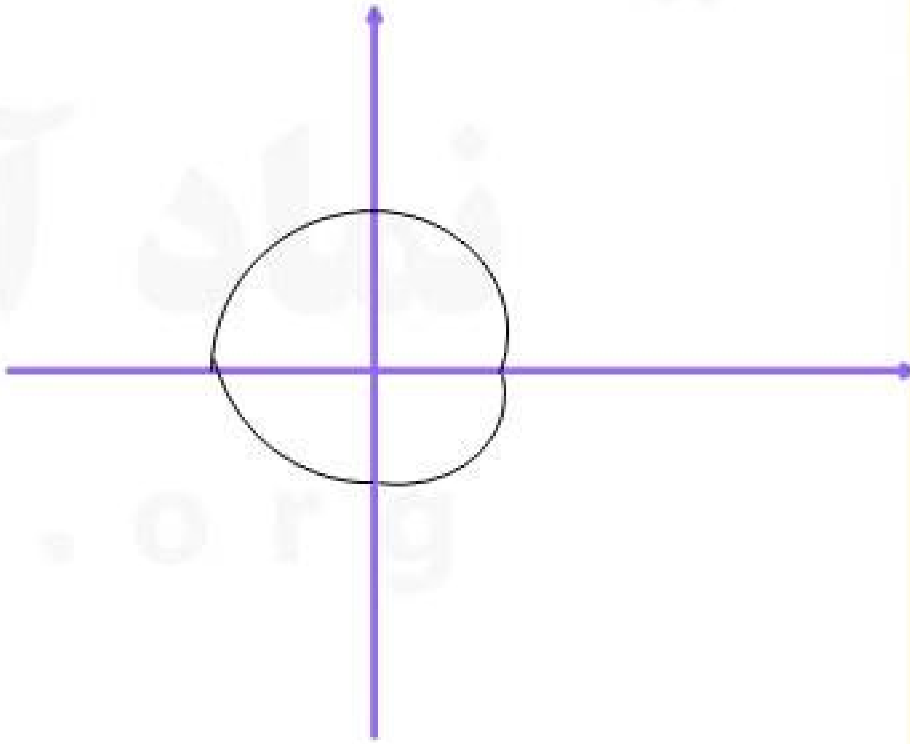
$$r = 1 - \cos\theta$$

$$r = 1 - \cos\theta = 1 + \cos(\pi - \theta) = 1 + \cos(\theta - \pi)$$

نمودار $r = 1 + \cos\theta$ **را به اندازه** $\theta_0 = -(-\pi) = \pi$ **دوران می دهیم.**



دوران به اندازه π



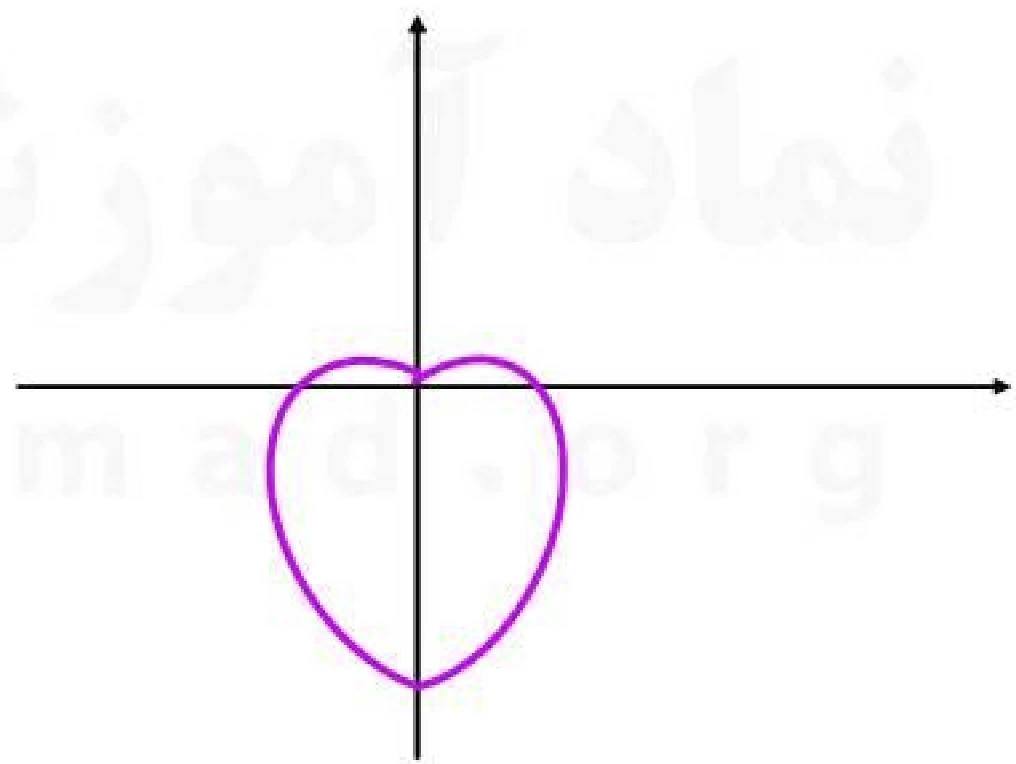
مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

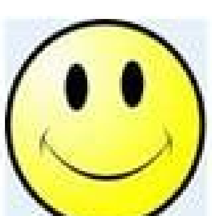
$$r = 1 - \sin\theta$$

راه حل:

$$r = 1 - \sin\theta$$

$$r = 1 + \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) \qquad \theta_0 = -\frac{\pi}{2}$$





نکته :

دلگونها

$$\begin{cases} r = a(1 \pm \cos\theta) \\ r = a(1 \pm \sin\theta) \end{cases}$$

گل رزها

$$\begin{cases} r = a\sin n\theta \\ r = a\cos n\theta \end{cases} \qquad (n \in N)$$

اگر n فرد باشد n پر

اگر n زوج باشد $2n$ پر

تقاطع نمودارها

در مختصات دکارتی داشتیم:

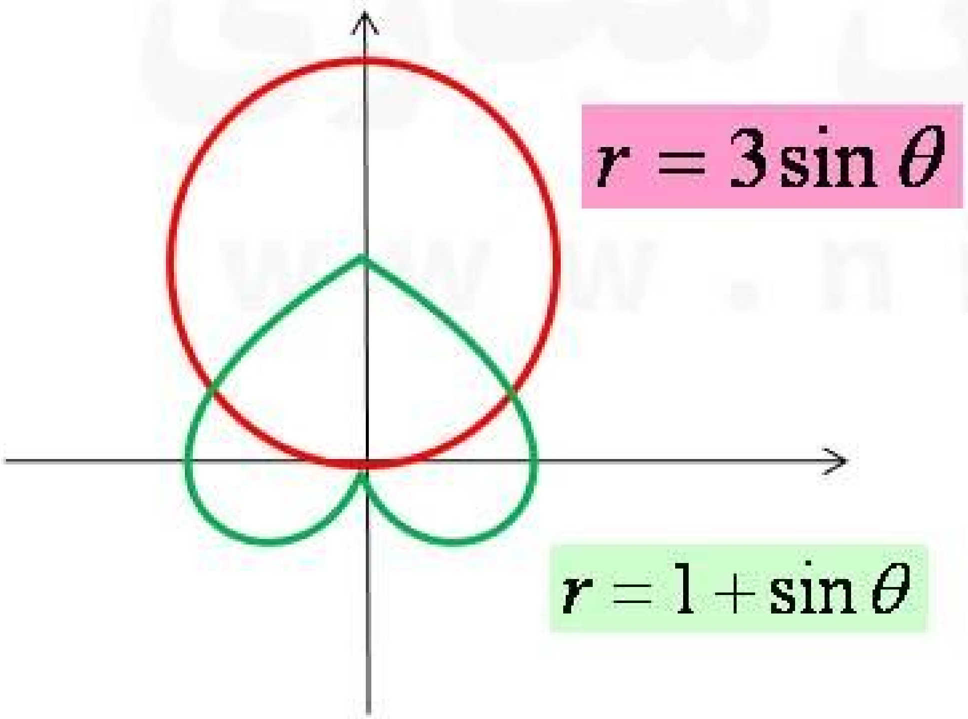
$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y &= g(x) \end{aligned} \xRightarrow{\text{محل تلاقی}} f(x) = g(x)$$

با ذکر مثال تفاوت تقاطع نمودار ها را در مختصات قطبی و دکارتی بررسی می کنیم.

$$\begin{cases} r = 3\sin\theta \\ r = 1+\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \quad 3\sin\theta = 1+\sin\theta \quad \Rightarrow \quad 2\sin\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6} \quad , \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

به نظر می آید که دو نقطه تقاطع داشته باشد، ولی با رسم دو نمودار داریم :



همانطور که ملاحظه می شود مبداء مختصات $O(0,0)$ نیز محل تلاقی دو نمودار است ، ولی

$$O(0,0): \quad \Rightarrow \quad 0 = 3\sin 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

$$O(0,0): \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 + \sin 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 1$$

مبداء مختصات با مختصات $(0,0)$ در معادله $r = 1 + \sin\theta$ صدق نمی کند.

ولی همین نقطه با مختصات $(0,-\frac{\pi}{2})$ در معادله صدق می کند.

پس :

در دستگاه مختصات قطبی با توجه به این که یک نقطه دارای مختصات متفاوتی است ، لذا تعیین محل تلاقی نمودارهای قطبی به سادگی مختصات دکارتی نیست و باید دقت بیشتری داشته باشیم.

(به این دلیل است که در یافتن مساحت یک ناحیه قطبی بر رسم نمودار تاکید می کنیم).

برای تعیین نقاط تقاطع دو منحنی مراحل زیر را انجام می دهیم:

الف) معادلات دو منحنی را با هم قطع می دهیم ، تا تعدادی از نقاط تقاطع تعیین شوند.

ب) بررسی می کنیم که آیا دو منحنی از قطب عبور می کنند ، بدین منظور در هر دو معادله $r = 0$ قرار می دهیم.

ج) منحنی های مشابه با منحنی های داده شده را به دست می آوریم و نقاط تقاطع آن ها را نیز تعیین می کنیم. به طور کلی منحنی $r = f(\theta)$ با منحنی $(-1)^n r = f(\theta + n\pi)$ مشابه است.

مثال: نقاط تلاقی دو منحنی زیر را تعیین کنید.

$$r = 1 - \cos\theta$$

$$r^2 = 4\cos\theta$$

راه حل:

$$r = 1 - \cos\theta$$

$$r^2 = 4\cos\theta$$

آیا دو منحنی از قطب می گذرند؟

$$r = 1 - \cos\theta \quad \overset{\theta = 0}{\Longrightarrow} \quad r = 0$$

$$r^2 = 4\cos\theta \quad \overset{\theta = \frac{\pi}{2}}{\Longrightarrow} \quad r = 0$$

محل تلاقی دو منحنی

$$\begin{cases} r = 1-\cos\theta \\ r^2 = 4\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = 1-r \\ \cos\theta = \dfrac{r^2}{4} \end{cases}$$

$$\frac{r^2}{4} = 1-r \quad \Rightarrow \quad r^2+4r-4=0 \quad \Rightarrow \quad r=-2\pm 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} -2-2\sqrt{2} = 1-\cos\theta \\ -2+2\sqrt{2} = 1-\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = 1+2+2\sqrt{2} > 1 \\ \cos\theta = 1+2-2\sqrt{2} = 3-2\sqrt{2} < 1 \end{cases}$$

که در فاصله $[0,2\pi]$ دو جواب دارد.

به دست آوردن منحنی های مشابه : $(-1)^n r = f(\theta + n\pi)$

$$r^2 = 4\cos\theta$$

$$n=1 \quad \Rightarrow \quad -r^2 = 4\cos(\theta+\pi) = -4\cos(\theta+\pi) \quad \Rightarrow \quad r^2 = 4\cos\theta$$

$$n=2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 4\cos(\theta+2\pi) = 4\cos\theta$$

اگر n زوج یا فرد باشد همان معادله می شود.

$$r = 1-\cos\theta$$

$$n=1 \quad \Rightarrow \quad -r = 1-\cos(\theta+\pi) = 1+\cos\theta \quad \Rightarrow \quad -r = 1+\cos\theta$$

$$n=2 \quad \Rightarrow \quad r = 1-\cos(\theta+2\pi) = 1-\cos\theta \quad \Rightarrow \quad r = 1-\cos\theta$$

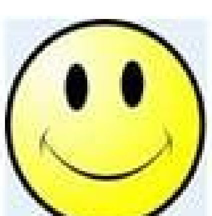
اکنون محل تلاقی $r^2 = 4\cos\theta$ را با $-r = 1+\cos\theta$ به دست می آوریم.

$$\begin{cases} -r = 1+\cos\theta \\ r^2 = 4\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = -r-1 \\ \cos\theta = \dfrac{r^2}{4} \end{cases}$$

$$\frac{r^2}{4} = -r-1 \quad \Rightarrow \quad r^2+4r+4=0 \quad \Rightarrow \quad (r+2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r=-2$$

$$4 = 4\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0 \quad , \quad 2\pi$$

پس $(-2,0)$ و $(-2,2\pi)$ نیز نقاط تلاقی هستند.

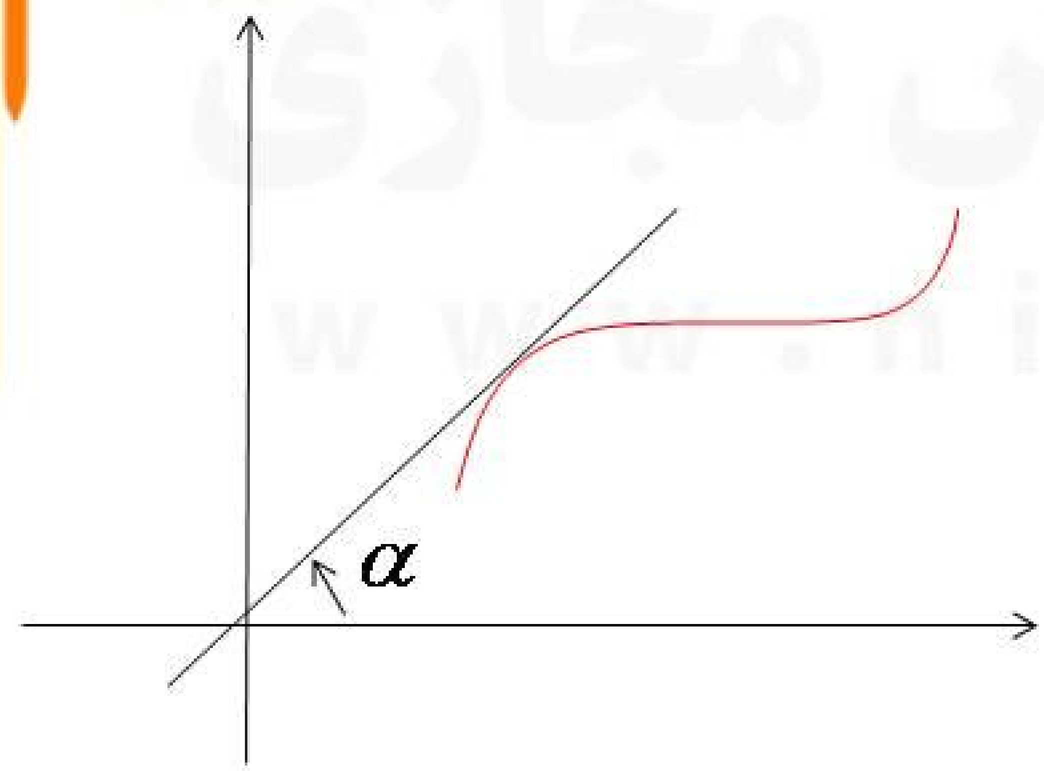


ضریب زاویه خط مماس بر منحنی قطبی:

یاد آوری : اگر $z = f(x, y)$ آنگاه دیفرانسیل f برابر است با

$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

یادآوری: اگر $y = f(x)$ آنگاه ضریب زاویه خط مماس برابر است



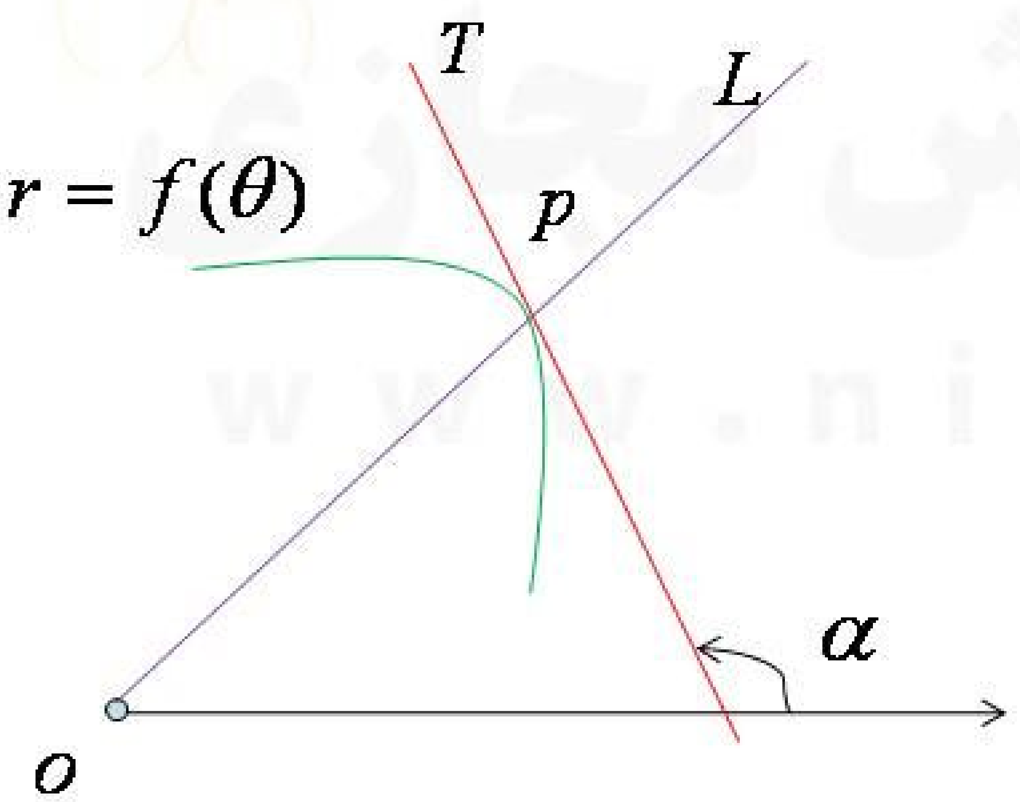
$$m = \tan\alpha = \frac{dy}{dx}$$

ضریب زاویه خط مماس بر منحنی قطبی $r = f(\theta)$

فرض کنیم معادله قطبی منحنی C به صورت $r = f(\theta)$ باشد و از نقطه p روی منحنی ، خط مماس T را رسم کرده ایم ، خط گذرنده از نقاط o و p را شعاع حامل می نامیم و با L نمایش می دهیم .

هدف به دست آوردن

$$m_T = \frac{dy}{dx} = \tan\alpha$$



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \\ dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta \dfrac{dr}{d\theta} - r\sin\theta \\ \dfrac{dy}{d\theta} = \sin\theta \dfrac{dr}{d\theta} + r\cos\theta \end{cases}$$

با فرض

$$\frac{dr}{d\theta} = r' \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = r'\cos\theta - r\sin\theta \\ \dfrac{dy}{d\theta} = r'\sin\theta + r\cos\theta \end{cases}$$

$$m = \tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}$$

$$m = \tan\alpha = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}$$

برای تعیین ضریب زاویه در قطب کافی است در رابطه بالا قرار دهیم : $r = 0$

$$m = \tan\theta$$

(**یادآوری :** معادله خطوط گذرنده از قطب برابر است با $\theta = a$)

مماس های افقی

برای به دست آوردن نقاط مماس های افقی ، نقاطی را که در معادله $\frac{dy}{d\theta} = 0$

(با شرط آن که $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$) تعیین می کنیم.

مماس های قائم

برای به دست آوردن نقاط مماس های قائم ، نقاطی را که در معادله $\frac{dx}{d\theta} = 0$

(با شرط آن که $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$) تعیین می کنیم.

مثال:

شیب خط مماس را برای دلگون

$$r = 1+\sin\theta$$

وقتی $\theta = \frac{\pi}{3}$ است بیابید.

راه حل:

$$r = 1 + \sin\theta$$

$$m = \tan\alpha = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\cos\theta\sin\theta + (1+\sin\theta)\cos\theta}{\cos\theta\cos\theta - (1+\sin\theta)\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta(1+2\sin\theta)}{1-2\sin^2\theta - \sin\theta} = \frac{\cos\theta(1+2\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-2\sin\theta)}$$

$$\Rightarrow \quad m\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = \frac{\cos\frac{\pi}{3}(1+2\sin\frac{\pi}{3})}{(1+\sin\frac{\pi}{3})(1-2\sin\frac{\pi}{3})} = \frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})}{(1+\frac{\sqrt{3}}{2})(1-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}} = -1$$

مثال:

ضریب زاویه خط مماس بر منحنی زیر را در $(4,\frac{\pi}{4})$ تعیین کنید.

$$r = 4$$

$\boldsymbol{r = 4}$

راه حل:

$$m = \tan\alpha = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{r'\tan\theta + r}{r' - r\tan\theta}$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \quad , \quad r = 4 \quad , \quad r' = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{1\times 0 + 4}{0 - 4\times 1} = -1$$

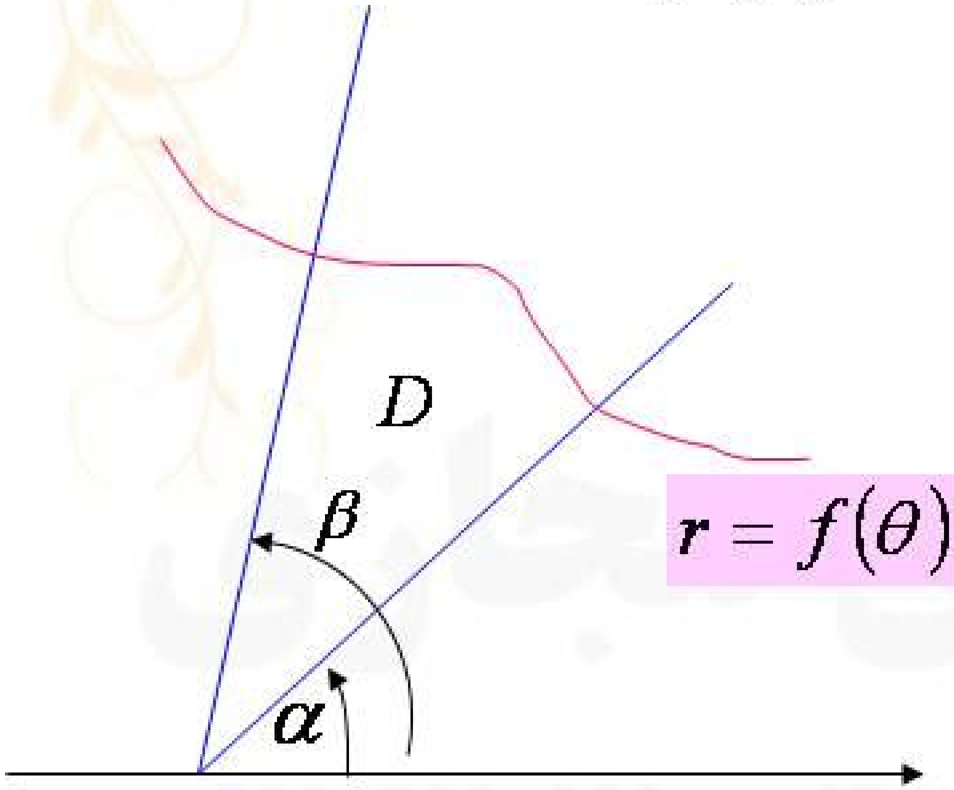
محاسبه مساحت در

مختصات قطبی

فرض کنید D ناحیه محدود به منحنی

$$r = f(\theta) \qquad , \ \theta = \alpha \ , \quad \theta = \beta \ , \qquad (\alpha \langle \beta)$$

باشد.

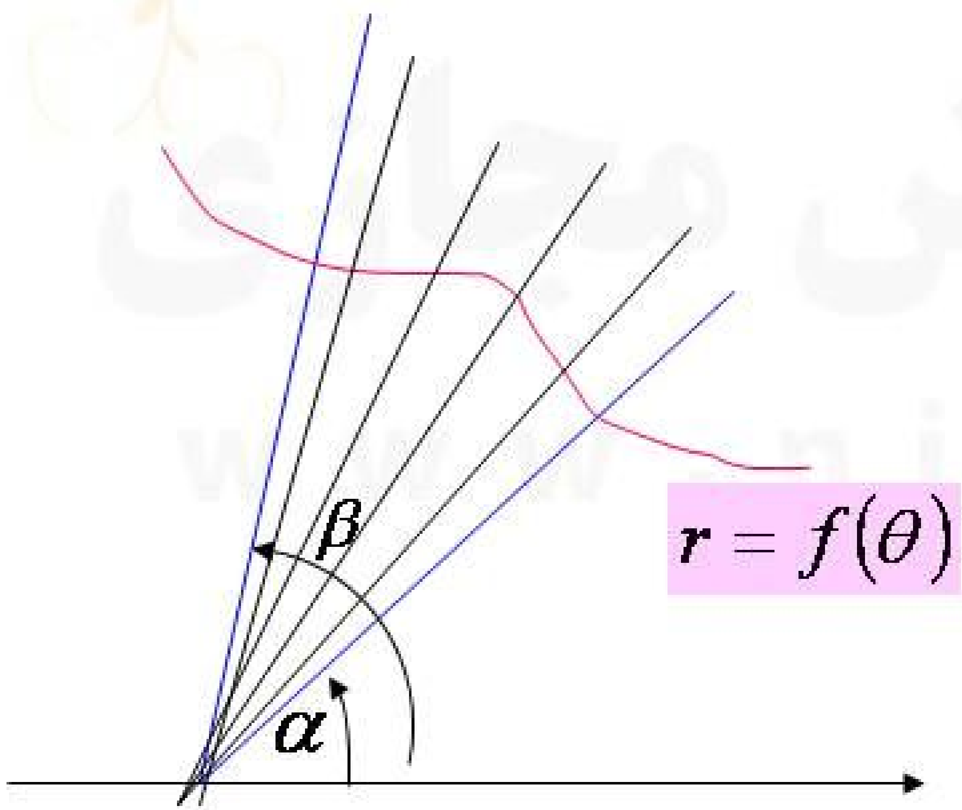


$$S_D = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

توجه :

المان در این حالت نیم خطی است که از مرکز O رسم شده است واز روی منحنی $r = f(\theta)$ از ناحیه خارج می شود و از زاویه α تا β می تواند دوران کند

(ناحیه جاروب شده توسط نیم خط)



مثال:

مطلوب است محاسبه مساحت محصور به دلنمای

$$r = 1 + \cos\theta$$

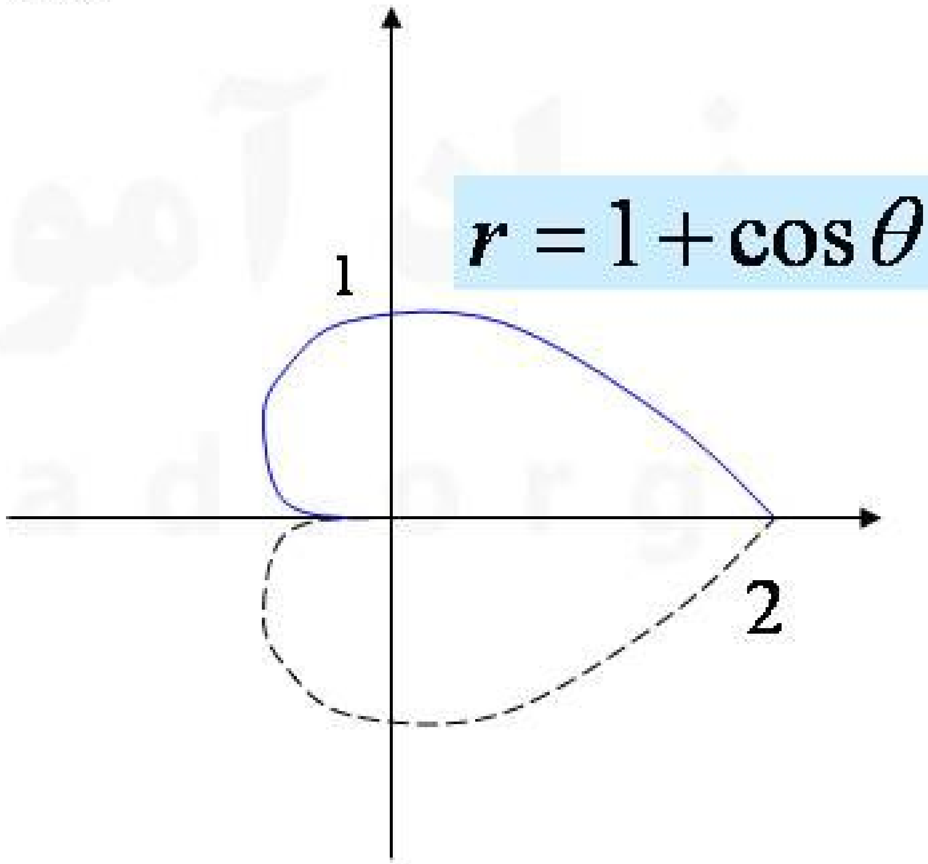
راه حل:

$r = 1 + \cos\theta$

چون محور X محور تقارن تابع $r = 1 + \cos\theta$ است.

$$A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\pi$$



مثال:

مطلوب است محاسبه مساحت محصور به

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$$

راه حل:

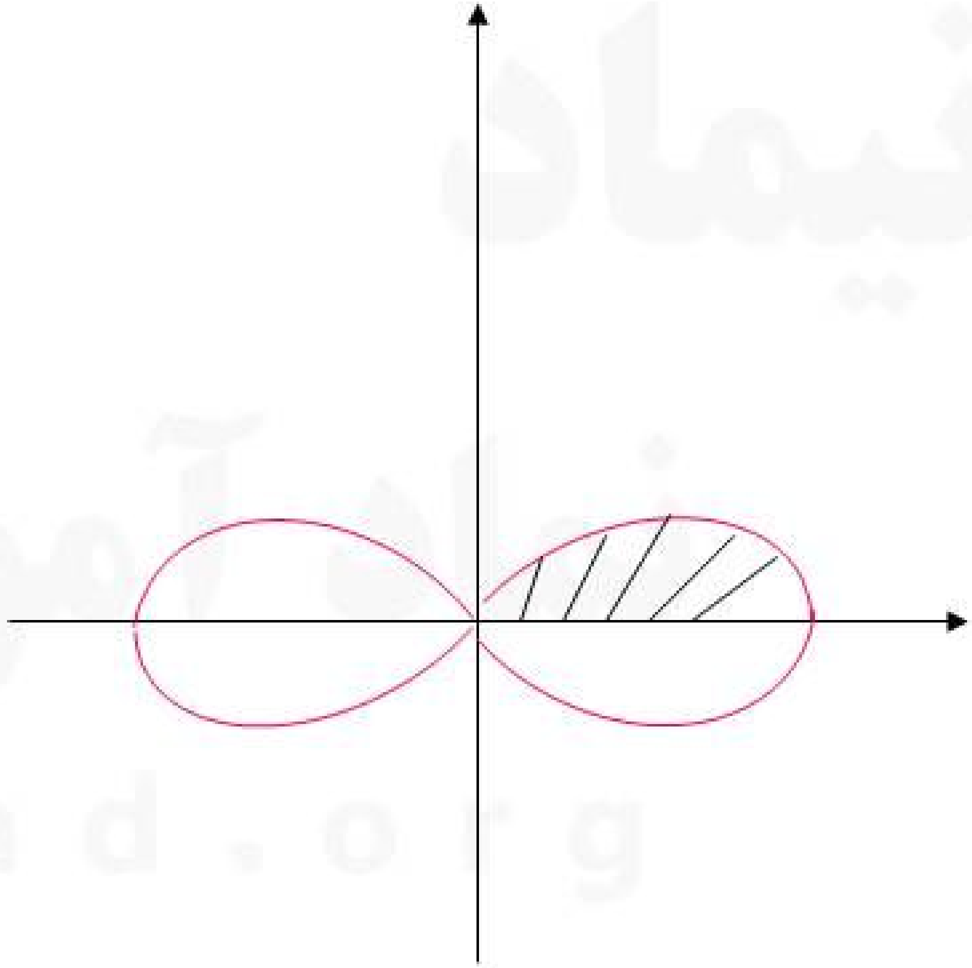
$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$$

$A = 4 \times$ (مساحت هاشور خورده)

$$= 4 \times \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

$$= 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta$$

$$= 2a^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \, \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = a^2$$



محاسبه مساحت بین

دو منحنی در مختصات قطبی

فرض کنید D ناحیه محدود شده توسط

$$r_1 = f_1(\theta)$$

$$r_2 = f_2(\theta)$$

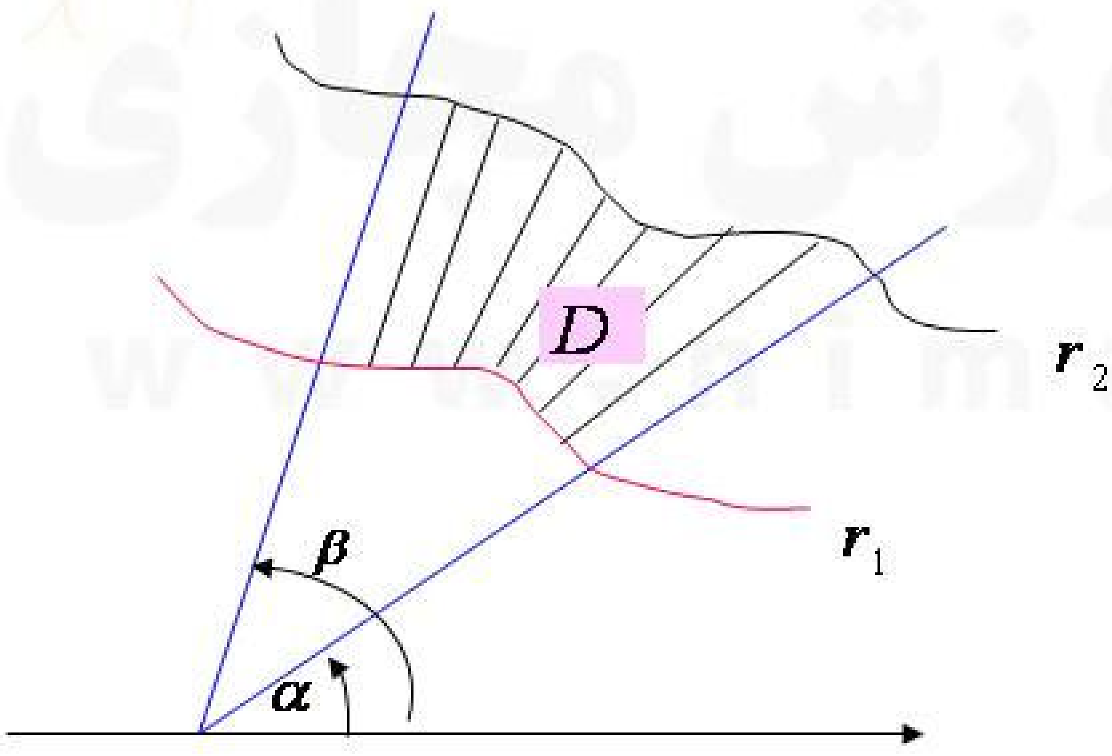
$$r_1 < r_2$$

$$\theta = \alpha$$

$$\theta = \beta$$

$$0 < \beta - \alpha \le 2\pi$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(r_2^2 - r_1^2\right) d\theta$$



با توجه به فرمول

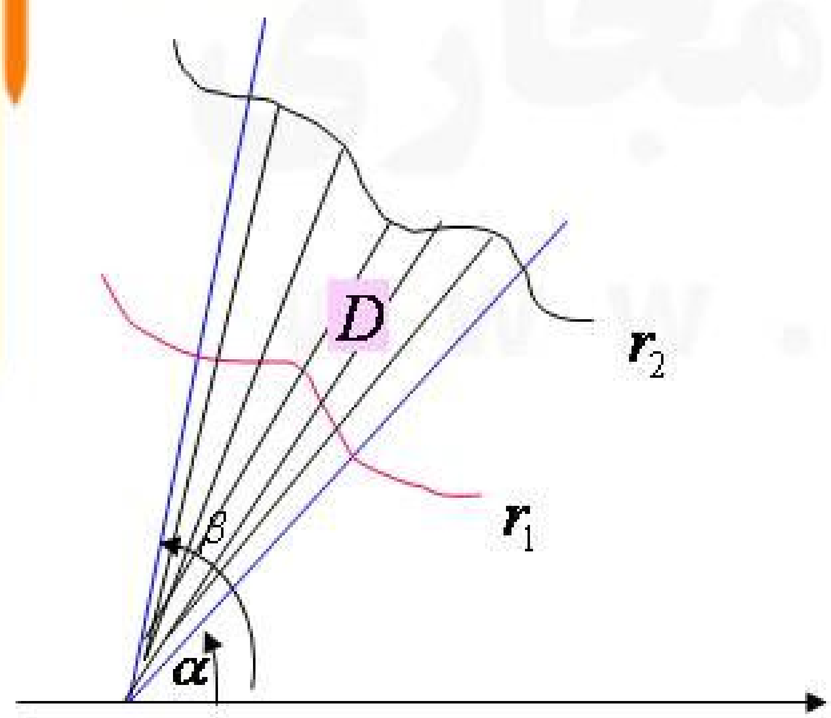
$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(r_2^2 - r_1^2\right) d\theta$$

r_1 : معادله منحنی که هر نیم خط رسم شده از مبدأ آن را قطع کرده و وارد ناحیه می شود.

r_2 : معادله منحنی که هر نیم خط رسم شده در مرحله قبل از آن گذشته و از ناحیه خارج می شود .

$\theta = \alpha$: زاویه ابتدایی دوران نیم خط برای جاروب کردن ناحیه

$\theta = \beta$: زاویه انتهایی دوران نیم خط برای جاروب کردن ناحیه



مثال:

مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به درون منحنی

$r = 2\cos\theta$ و بیرون منحنی $r = 1$

$r = 2\cos\theta$

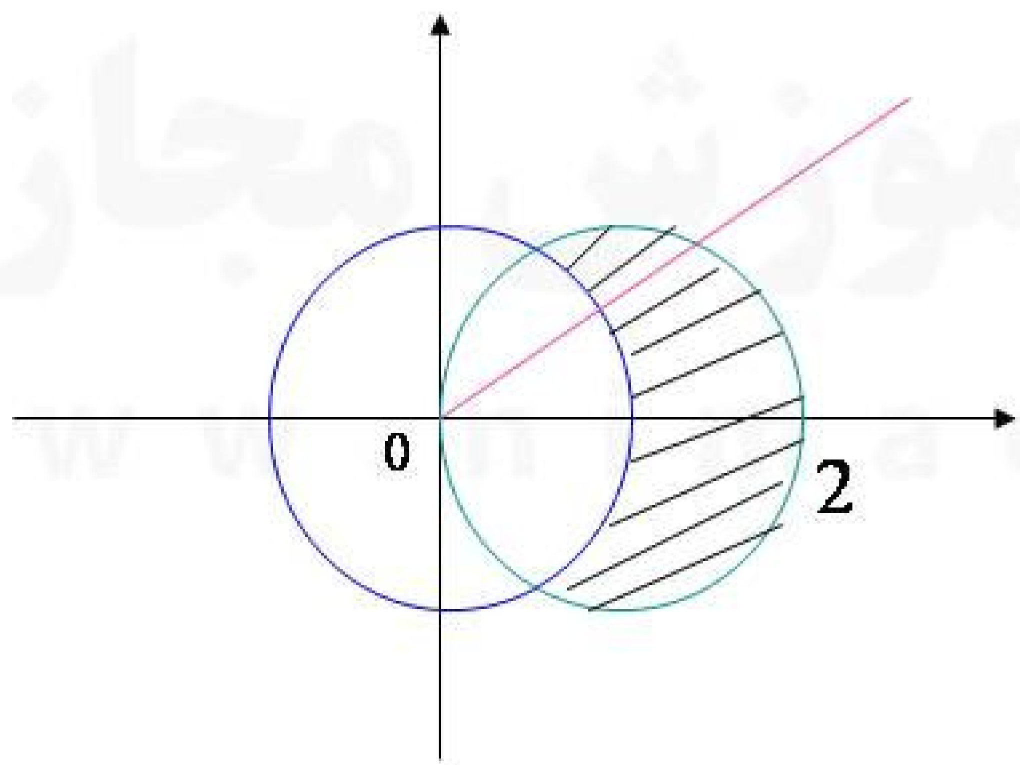
$r = 1$

راه حل:

$r = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۱

$r = 2\cos\theta \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

دایره به مرکز $A\Big|_{0}^{1}$ و شعاع۱



$$r_1 = 1$$

$$r_2 = 2\cos\theta$$

$$\rightarrow 2\cos\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$$ محل تلاقی

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\pi}{3}$$

$$S = 2 \times \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) d\theta = \int_0^{\pi/3} \left(4\cos^2\theta - 1\right) d\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال:

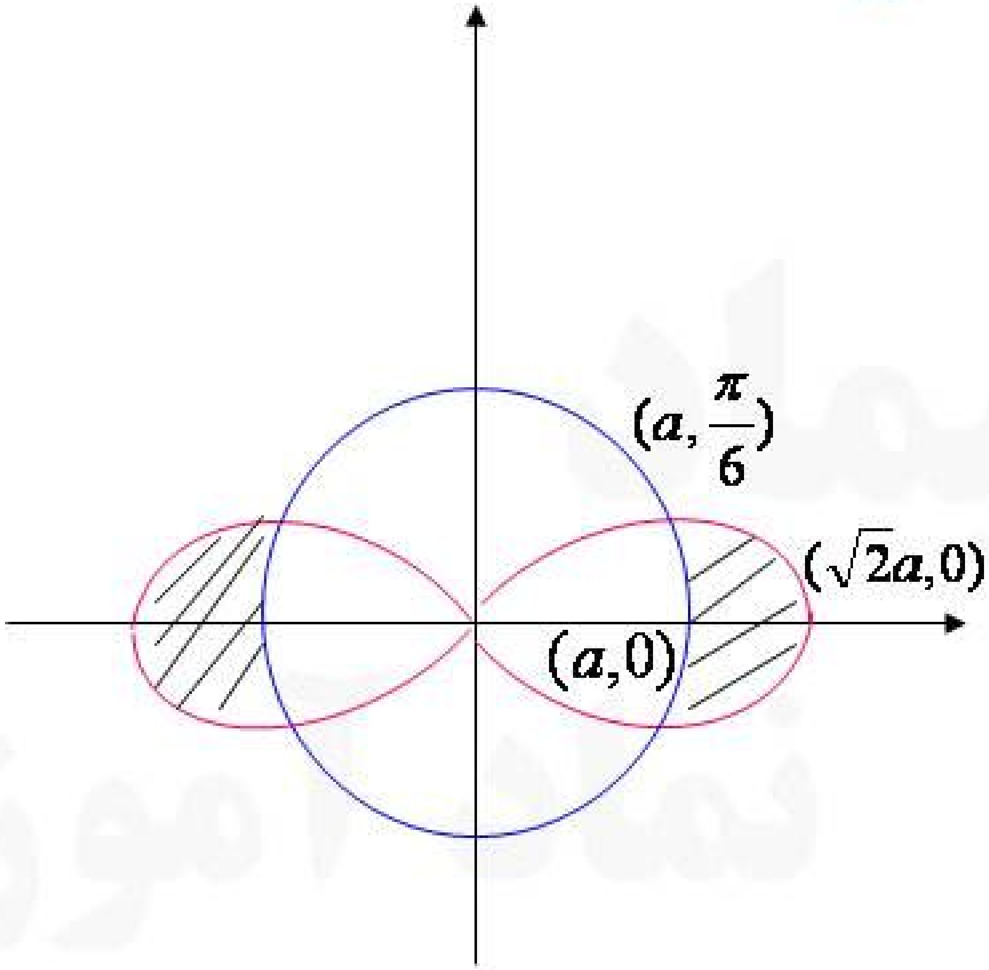
مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به داخل پروانه

$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ و خارج دایره $r = a$

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$$

$$r = a$$

راه حل:



$$r_1 = a$$

$$r_2 = \sqrt{2a^2 \cos 2\theta}$$

$$a^2 = 2a^2 \cos 2\theta \quad \Rightarrow \quad \cos 2\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

محل تلاقی

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\pi}{6}$$

$$S = 4\int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}\left(2a^2\cos 2\theta - a^2\right)d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/6}\left(2\cos 2\theta - 1\right)d\theta$$

$$= 2a^2\left(\sin 2\theta - \theta\right)\Big|_0^{\pi/6} = 2a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= a^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

مختصات قطبی

Polar coordinates

محاسبه مساحت وقتی که معادلات پارامتری منحنی معلوم باشد .

فرض کنید معادلات پارامتری منحنی C در دستگاه قائم به صورت زیر باشد .

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(x) \end{cases}$$

مساحت ناحیه محدود به مرز منحنی C، توسط یکی از دستورهای زیر محاسبه می شود .

مساحت ناحیه محدود به مرز منحنی C،

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} x(t) y'(t) dt \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{\alpha}^{\beta} (xy' - yx') dt \right|$$

که در آن β, α مقادیر متناظر از پارامتر t برای ابتدا و انتهای مرز ناحیه است .

مثال:

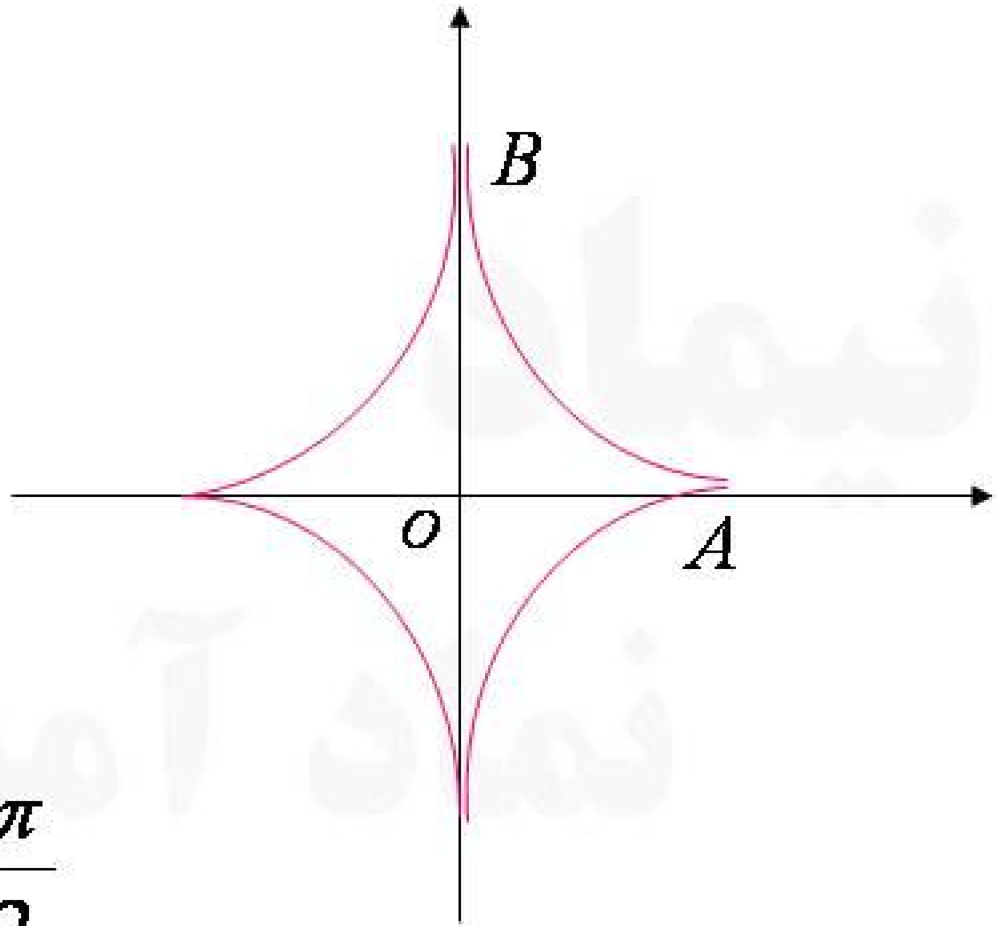
مطلوب است محاسبه مساحت محصور به آستروئید به

معادلات پارامتری زیر

$$C: \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

راه حل:

$$C:\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi$$



$$S=4S_{OAB}$$

$$S_{OAB}=\left|\int_0^{\pi/2}\sin^3 t.\left(\cos^3 t\right)' dt\right|$$

$$=\left|\int_0^{\pi/2}-3\sin^4 t\cos^2 t\, dt\right|=\frac{3\pi}{32}$$

$$\Rightarrow \qquad S=4\times\frac{3\pi}{32}=\frac{3\pi}{8}$$

مثال:

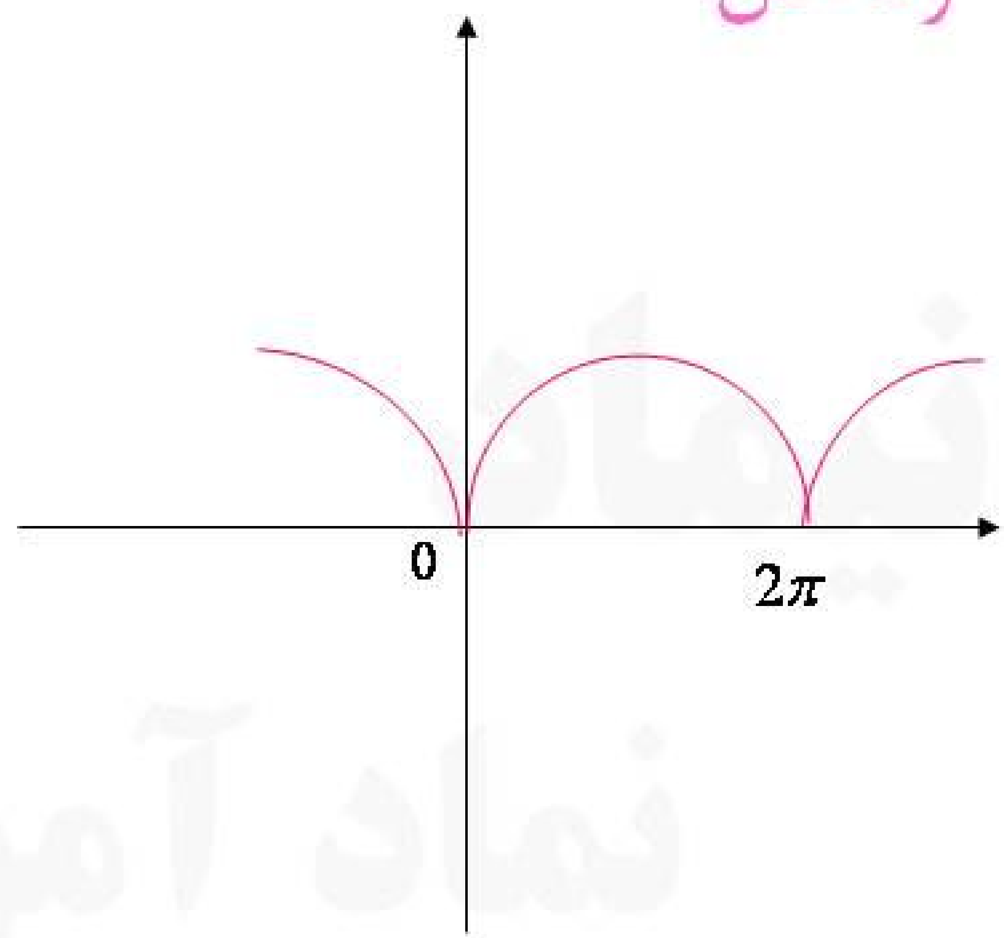
مطلوب است محاسبه مساحت زیر یک طاق چرخزاد به

معادلات پارامتری زیر

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

راه حل:



$$dx = (1 - \cos t)\,dt$$

$$S = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(1 - 2\cos t) + \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) \right] dt$$

$$= \left(\frac{3}{2} t - 2\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi$$